Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA 2

Podręcznik do liceów i techników

ZAKRES ROZSZERZONY

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. hab. Jacka Jędrzejewskiego, dr. Witolda Pająka, mgr. Klemensa Stróżyńskiego.
Zakres kształcenia: rozszerzony
Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: szkoły ponadpodstawowe
Rok dopuszczenia: 2020

Numer dopuszczenia/numer ewidencyjny w wykazie: 979/2/2020

Podręcznik zgodny z programem „Matematyka. Solidnie od podstaw. Program nauczania w liceach i w technikach. Zakres rozszerzony"

Kod dostępu do cyfrowego odzwierciedlenia podręcznika w wersji papierowej znajduje się na końcu książki.

Projekt okładki i strony tytułowej
Bożena Sawicka

Projekt graficzny, rysunki, skład i łamanie
Eryk Krawczyński, Eugeniusz Wojdecki

Redakcja
Ryszard Pagacz, Tomasz Szwed

Fotografia na okładce: *Wnętrze sfery*
Autor: Karolina Kania
Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny „Matematyka w obiektywie"
www.mwo.usz.edu.pl

Wydanie I, Warszawa 2020 r.

Druk i oprawa
Druk-Serwis Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydrukowano na papierze *One Bulk* 65 g
www.antalis.pl

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-195-1

Spis treści

Wstęp

Materiał zamieszczony w tym podręczniku jest kontynuacją i rozwinięciem zagadnień matematycznych przedstawionych w podręczniku do klasy pierwszej. Rozpoczynamy od omówienia przekształceń wykresów funkcji i zastosowania tych wykresów do rozwiązywania równań i nierówności. Następnie przypominamy pojęcie wartości bezwzględnej i prezentujemy sposoby rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną. W trzecim rozdziale systematyzujemy i uzupełniamy wiadomości dotyczące funkcji kwadratowej. Następny rozdział jest poświęcony zagadnieniom geometrycznym związanym m.in.: z okręgami, kątami w kole i konstrukcjami geometrycznymi. W piątym rozdziale rozszerzamy pojęcie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa na przypadek dowolnego kąta płaskiego. W rozdziale szóstym omawiamy równanie prostej i równanie okręgu w układzie współrzędnych. Przedostatni rozdział jest poświęcony obliczaniu pól trójkątów oraz zastosowaniu twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów m.in. do rozwiązywania trójkątów. Treścią ostatniego, ósmego rozdziału, są wielomiany.

Podobnie jak w klasie pierwszej, ważne definicje i twierdzenia zostały oznaczone kolorowymi ramkami z jasnoszarym tłem. Inne istotne informacje, na które warto zwrócić uwagę, zostały oznaczone jasnobrązowym tłem. Aby uczenie się matematyki było jeszcze bardziej skuteczne, w podręczniku do klasy drugiej wprowadziliśmy ćwiczenia. Umożliwiają one nie tylko proste zastosowanie definicji i twierdzeń, ale również służą skupieniu uwagi na ważnych i różnorodnych aspektach omawianych przykładów.

Każdy temat kończy się zestawem zadań do samodzielnego rozwiązania, zatytułowanym *Sprawdź, czy rozumiesz*. Na końcu każdego rozdziału znajdują się zadania powtórzeniowe zatytułowane *Sprawdź, czy umiesz*. Wszystkie zadania na dowodzenie zostały oznaczone symbolem ***D***.

Na końcu podręcznika znajdują się odpowiedzi do większości zadań.

Życzymy sukcesów w uczeniu się matematyki!

Autorzy

1. Przekształcenia wykresów funkcji

Wektor na płaszczyźnie

Pojęcie wektora jest bardzo przydatne nie tylko w fizyce, gdzie jest wygodnym narzędziem do opisu np. prędkości lub siły, lecz również w matematyce, gdzie będziemy go używać do dowodzenia twierdzeń czy definiowania przekształceń geometrycznych. Przypomnimy podstawowe informacje o wektorze z klasy 1.

Definicja 1.

Wektorem zaczepionym nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z tych punktów nazywamy początkiem wektora, a drugi – końcem wektora. Wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$.

Wektor $\overrightarrow{AB}$ będziemy przedstawiać jako strzałkę, której początek znajduje się w punkcie A, natomiast koniec, czyli „grot", w punkcie B.

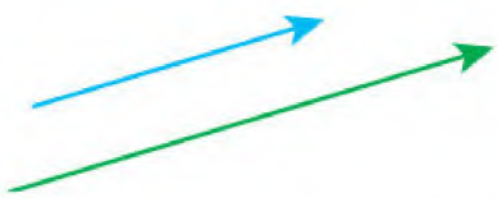
Długością wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy $|\overrightarrow{AB}|$.

Jeśli początek wektora pokrywa się z jego końcem, to taki wektor nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\vec{O}$. Przedstawieniem takiego wektora jest punkt. Długość wektora zerowego jest równa 0.

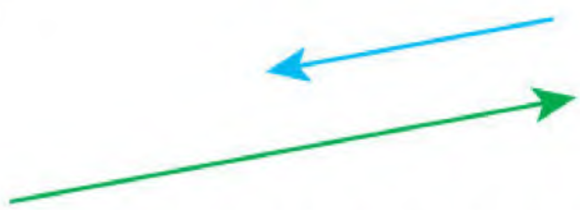
Jeżeli dwa niezerowe wektory leżą na jednej prostej lub leżą na dwóch prostych równoległych, to powiemy, że są to **wektory równoległe**. O wektorach równoległych mówimy też, że mają ten sam kierunek.

Dowolne dwa niezerowe wektory równoległe mają albo zgodne zwroty (rys. a), albo przeciwne zwroty (rys. b).

a)



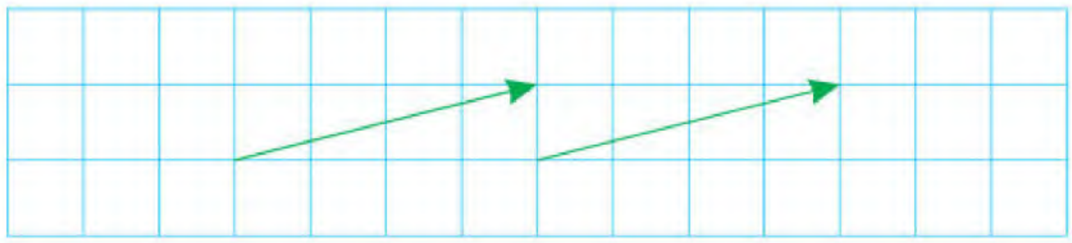
b)



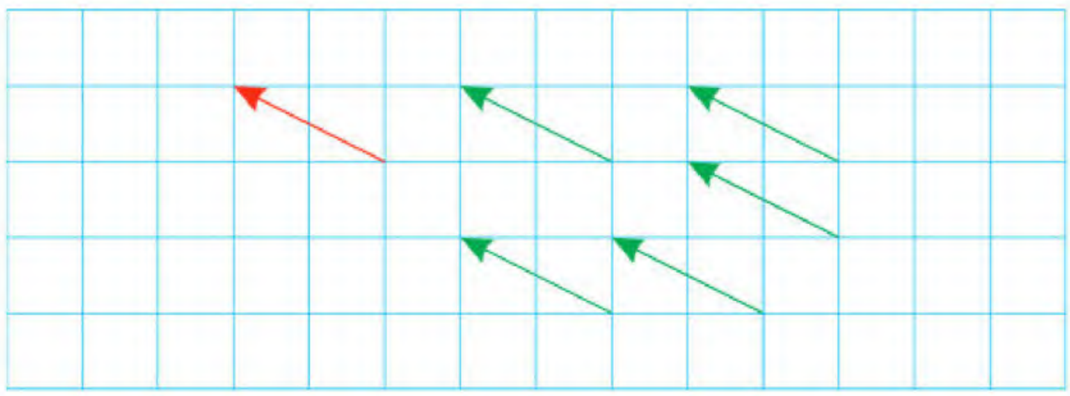
Wektor zerowy nie ma określonego kierunku ani zwrotu. Dodatkowo przyjmujemy, że wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora.

Definicja 2.

Dwa **wektory** niezerowe są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają taką samą długość, kierunek i zwrot.



Wektorem swobodnym nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych, równych danemu wektorowi zaczepionemu.



Aby przedstawić wektor swobodny, wystarczy narysować dowolny wektor zaczepiony, reprezentujący ten wektor swobodny.

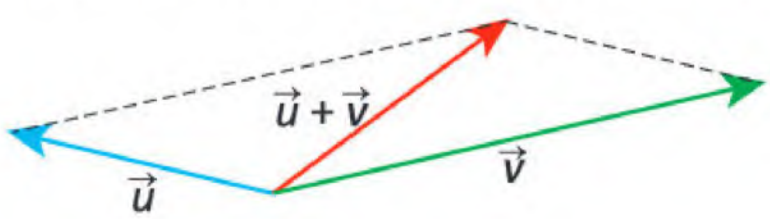
Wektory swobodne oznacza się małymi, pojedynczymi literami ze strzałką, np.: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Na wektorach można wykonywać działania.

Definicja 3.

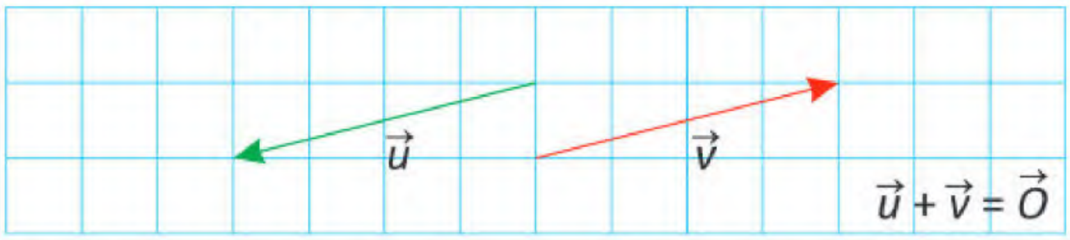
Sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor oznaczany $\vec{u}+\vec{v}$, którego początkiem jest początek wektora $\vec{u}$, a końcem – koniec wektora równego wektorowi $\vec{v}$, zaczepionego w końcu wektora $\vec{u}$.

UWAGA: Jeśli chcemy dodać dwa nierównoległe wektory, to możemy zastosować też tzw. „regułę równoległoboku”, często stosowaną w fizyce.



Zaczepiamy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w tym samym punkcie, a następnie kreślimy równoległobok wyznaczony przez te wektory. Wówczas wektor wyznaczony przez przekątną równoległoboku, zaczepiony w tym samym punkcie co wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jest sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$. O wektorze $\vec{u}+\vec{v}$ mówimy też, że jest wypadkową wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Definicja 4.
Wektorami przeciwnymi nazywamy dwa wektory wtedy i tylko wtedy, gdy ich suma jest wektorem zerowym.



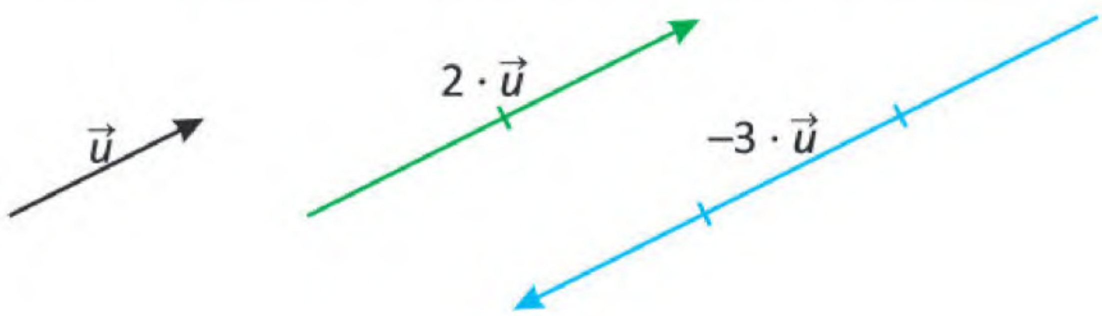
Wektor przeciwny do wektora $\vec{u}$ oznaczamy $-\vec{u}$. Wektor przeciwny do wektora $\overrightarrow{AB}$ oznaczamy $-\overrightarrow{AB}$ lub $\overrightarrow{BA}$.

Twierdzenie 1.
Wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są przeciwne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory te są równoległe, mają przeciwne zwroty i mają taką samą długość.

Definicja 5.
Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor, który jest sumą wektorów $\vec{u}$ i $-\vec{v}$.

Mamy: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

Definicja 6.
Iloczynem wektora niezerowego $\vec{u}$ **i liczby** k, $k \neq 0$, nazywamy wektor równoległy do wektora $\vec{u}$ mający długość $|k| \cdot |\vec{u}|$ i zwrot zgodny ze zwrotem wektora $\vec{u}$, jeśli $k > 0$, natomiast zwrot przeciwny do zwrotu wektora $\vec{u}$, jeśli $k < 0$. Iloczyn taki oznaczamy $k \cdot \vec{u}$.
Dodatkowo przyjmujemy, że iloczyn wektora zerowego i liczby jest wektorem zerowym; również iloczyn wektora niezerowego i liczby zero jest wektorem zerowym.



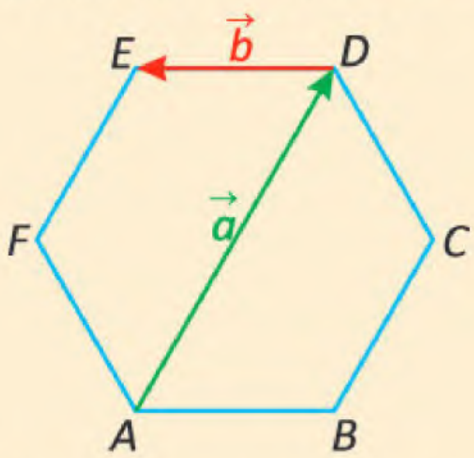
Twierdzenie 2. Własności działań na wektorach

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych k, l:

1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (przemienność dodawania wektorów)
2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (łączność dodawania wektorów)
3) $k\cdot(l\cdot\vec{u})=(k\cdot l)\cdot\vec{u}$
4) $(k+l)\cdot\vec{u}=k\cdot\vec{u}+l\cdot\vec{u}$
5) $k\cdot(\vec{u}+\vec{v})=k\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{v}$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Narysuj wektory $\vec{u}+\vec{v}$ oraz $\vec{u}-\vec{v}$, jeśli $0<|\vec{u}|<|\vec{v}|$ oraz:
   a) wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe i mają zgodne zwroty,
   b) wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe i mają przeciwne zwroty.
2. Dane są dwa nierównoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, $|\vec{u}|>|\vec{v}|>0$. Narysuj wektor:
   a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{u}-\vec{v}$ c) $\vec{v}-\vec{u}$ d) $2\cdot\vec{v}$
3. Dane są punkty A i B, $A\neq B$. Na prostej AB zaznacz punkt P tak, aby:
   a) wektory $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{BP}$ były przeciwne,
   b) wektory $\overrightarrow{AP}$ i $2\cdot\overrightarrow{BP}$ były równe,
   c) $2\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}$,
   d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}=\vec{O}$.
4. Dany jest niezerowy wektor $\vec{u}$. Narysuj wektor:
   a) $-2\vec{u}$ b) $\frac{1}{2}\vec{u}$ c) $-\frac{3}{4}\vec{u}$ d) $\frac{5}{3}\vec{u}$
5. Na rysunku obok dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$.
   Niech $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ oraz $\overrightarrow{DE}=\vec{b}$.



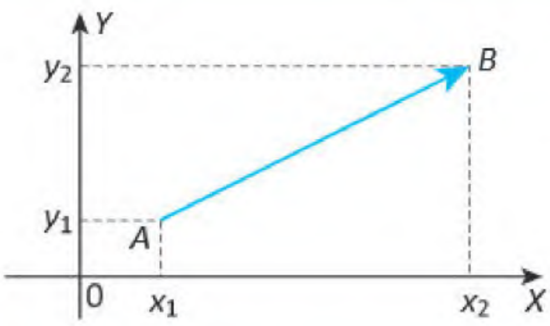
   Zapisz za pomocą wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ wektor:
   a) $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{FC}$
   c) $\overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{BD}$
   e) $\overrightarrow{EB}$ f) $\overrightarrow{FD}$.

Wektor w układzie współrzędnych

W tym temacie będziemy rozpatrywać wektor na płaszczyźnie z układem współrzędnych. Okazuje się, że każdemu wektorowi o ustalonym początku i końcu można przyporządkować tylko jedną parę liczb będącą jego współrzędnymi. Można również w danym układzie współrzędnych każdej parze liczb przyporządkować tylko jeden wektor swobodny, dla którego dane liczby – w rozpatrywanym układzie współrzędnych – stanowią jego współrzędne. Dlatego też możemy zastępować wektory, rozumiane jako uporządkowane pary punktów, uporządkowanymi parami liczb. W temacie tym wszystkie definicje dotyczące wektorów sformułujemy powtórnie, korzystając z odpowiedniości między parami punktów i parami liczb. Wektory na płaszczyźnie z układem współrzędnych są tymi samymi wektorami. Tylko mówimy o nich innym językiem.

Definicja 1.

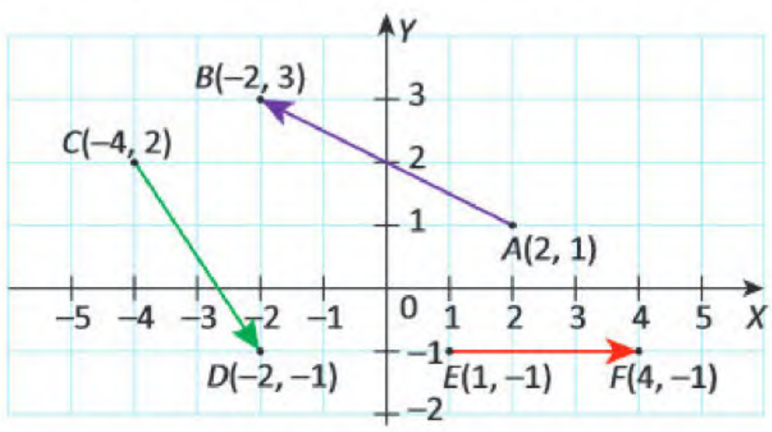
Dane są w układzie współrzędnych punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.
Wektorem nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$. Taki wektor oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$. Liczby $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ nazywamy współrzędnymi wektora.



Wektor $\overrightarrow{AB}$ będziemy przedstawiać jako strzałkę o początku w punkcie A i końcu w punkcie B. O wektorze $\overrightarrow{AB}$ powiemy, że jest zaczepiony w punkcie A.

Przykład 1.

Na rysunku poniżej dane są w układzie współrzędnych punkty A, B, C, D, E, F oraz wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$. Obliczymy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$.



Wektor $\overrightarrow{AB}$ jest zaczepiony w punkcie $A(2, 1)$, a jego końcem jest punkt $B(-2, 3)$. Zatem:

$$\overrightarrow{AB} = [-2 - 2, 3 - 1], \text{ czyli}$$
$$\overrightarrow{AB} = [-4, 2].$$

Ćwiczenie 1. Oblicz współrzędne wektorów $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ z przykładu 1.

Wektor, którego obie współrzędne są zerami, nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\overrightarrow{O}$. Interpretacją geometryczną wektora zerowego jest punkt.

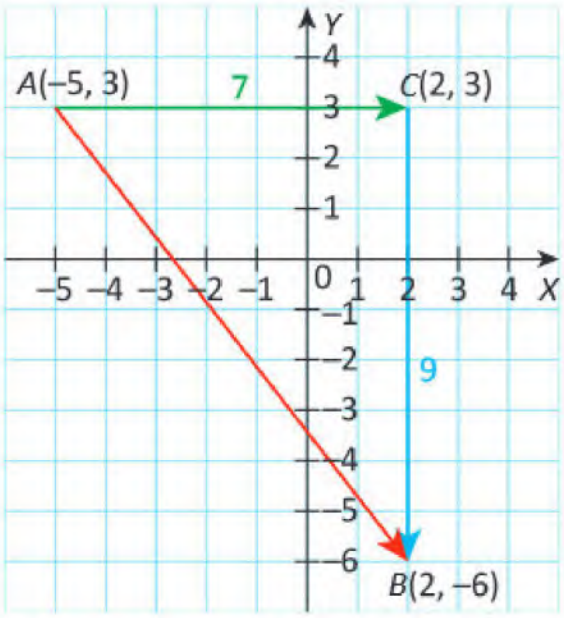
Przykład 2.

Dany jest punkt $A(-5, 3)$. Wyznaczymy współrzędne punktu B, wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = [7, -9]$. Przyjmujemy oznaczenie $B(x, y)$. Z definicji wektora $\overrightarrow{AB}$ mamy:

$$x - (-5) = 7 \quad \text{i} \quad y - 3 = -9$$
$$x = -5 + 7 \quad \text{i} \quad y = 3 - 9$$
$$x = 2 \quad \text{i} \quad y = -6$$

Zatem $B(2, -6)$.

Narysujmy wektor $\overrightarrow{AB}$ z przykładu 2. w prostokątnym układzie współrzędnych i zastanówmy się, co znaczą współrzędne tego wektora.



Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ możemy interpretować jako kolejne etapy „najkrótszej drogi" jaką musimy pokonać, poruszając się z punktu A do punktu B zgodnie z zasadą: najpierw wzdłuż osi OX, potem wzdłuż osi OY.

1) Przesuwamy się o 7 jednostek wzdłuż osi OX, zgodnie z jej zwrotem, czyli w prawo – do punktu $C(2, 3)$.
2) Przesuwamy się z punktu C o 9 jednostek wzdłuż osi OY, przeciwnie do jej zwrotu, czyli w dół – do punktu B.

Obliczmy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{AC} = [2 - (-5), 3 - 3], \text{ czyli } \overrightarrow{AC} = [7, 0]$$
$$\overrightarrow{CB} = [2 - 2, -6 - 3], \text{ czyli } \overrightarrow{CB} = [0, -9]$$

Wektory $\overrightarrow{AC}$ oraz $\overrightarrow{CB}$ nazywamy **wektorami składowymi** wektora $\overrightarrow{AB}$.

Przesunięcie z punktu A do punktu B wzdłuż osi OX opisuje pierwsza współrzędna wektora $\overrightarrow{AB}$, zaś wzdłuż osi OY – druga współrzędna tego wektora. Jeśli współrzędna wektora jest liczbą dodatnią, to przesunięcie jest zgodne ze zwrotem osi, a jeśli liczbą ujemną, to jest przeciwne do zwrotu osi.

Ćwiczenie 2. Dany jest punkt $A(3, 4)$ oraz wektor $\overrightarrow{AB} = [-5, -7]$.

a) Podaj współrzędne składowych tego wektora.
b) Zaznacz w układzie współrzędnych punkt A. Korzystając z wektorów składowych $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CB}$, wyznacz współrzędne punktu C oraz współrzędne punktu B.

Wektory będziemy też oznaczać jedną małą literą, ze strzałką u góry, np.: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{p}$.

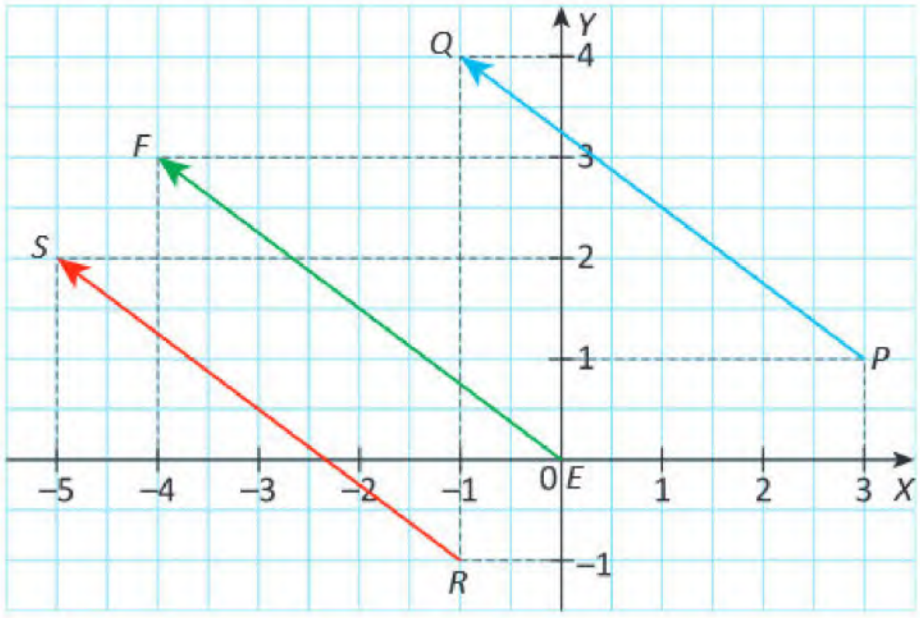
Definicja 2.

Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$, są **równe** wtedy, gdy $u_x = v_x$ i $u_y = v_y$. Równość wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zapisujemy $\vec{u} = \vec{v}$.

Przykład 3.

Przedstawimy w układzie współrzędnych wektor $[-4, 3]$.

Możemy podać wiele rozwiązań tego zadania.



Mamy, na przykład:

$\overrightarrow{EF} = [-4, 3]$, gdzie $E(0, 0)$ i $F(-4, 3)$

$\overrightarrow{PQ} = [-4, 3]$, gdzie $P(3, 1)$ i $Q(-1, 4)$

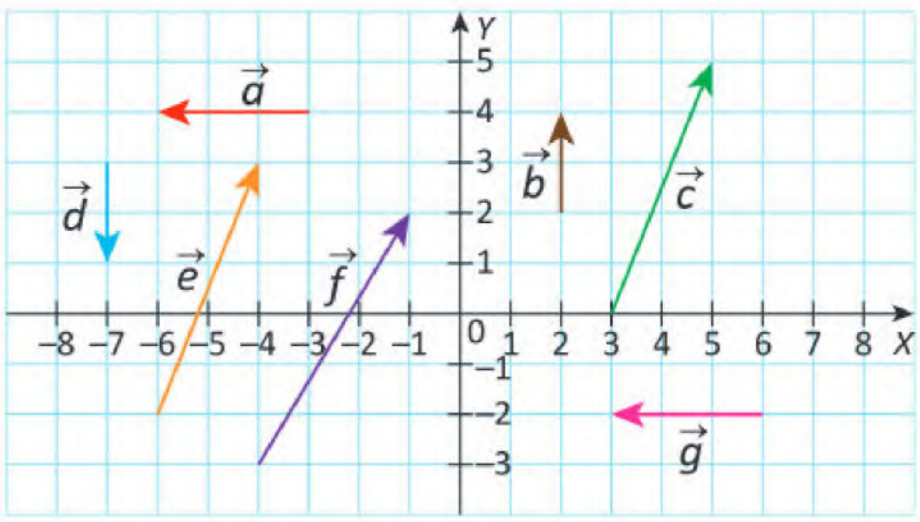
$\overrightarrow{RS} = [-4, 3]$, gdzie $R(-1, -1)$ i $S(-5, 2)$

Takich wektorów jest nieskończenie wiele. Tworzą one rodzinę wektorów równych. Aby przedstawić w układzie współrzędnych wektor $[-4, 3]$, wystarczy wskazać dowolnie wybranego reprezentanta tej rodziny.

Zbiór wszystkich wektorów równych danemu wektorowi zaczepionemu nazywamy **wektorem swobodnym**.

Przykład 4.

Odczytamy z rysunku współrzędne przedstawionych wektorów. Wskażemy wektory równe.



$\vec{a} = [-3, 0]$ $\vec{b} = [0, 2]$ $\vec{c} = [2, 5]$ $\vec{d} = [0, -2]$ $\vec{e} = [2, 5]$ $\vec{f} = [3, 5]$ $\vec{g} = [-3, 0]$

Wektory równe to wektory $\vec{a}$ i $\vec{g}$ oraz wektory $\vec{c}$ i $\vec{e}$.

Definicja 3.

Długością wektora $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = [u_x, u_y]$, nazywamy liczbę $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Długość wektora $\vec{u}$ oznaczamy $|\vec{u}|$.

Przykład 5.

Obliczymy długość wektora $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = [12, 5]$.
Otrzymujemy:

$$|\vec{u}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Długość wektora $\vec{u}$ jest równa 13.

Jeśli $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, to długość wektora $\overrightarrow{AB}$ wyraża się wzorem:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Łatwo uzasadnić, powołując się na twierdzenie Pitagorasa, że długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest równa długości odcinka o końcach A i B.

Ćwiczenie 3. Mamy dane punkty: $A(-8, 1)$, $B(-6, -3)$. Wykaż, że długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest równa $2\sqrt{5}$.

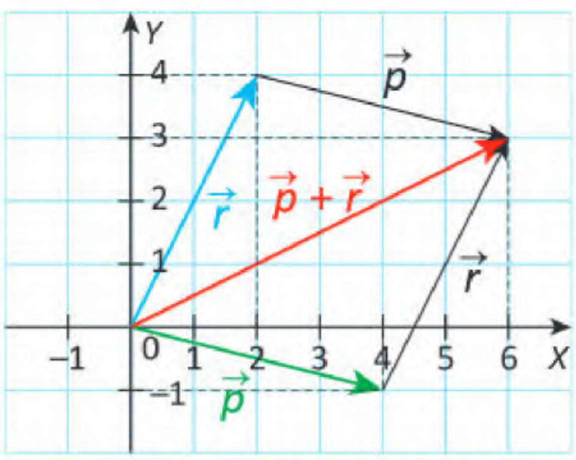
Definicja 4.

Sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$, nazywamy wektor $[u_x + v_x, u_y + v_y]$. Sumę wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oznaczamy $\vec{u} + \vec{v}$.

Wracając do rozważań na str. 12 możemy powiedzieć, że wektor $[7, -9]$ jest sumą swoich wektorów składowych $[7, 0]$ i $[0, -9]$.

Przykład 6.

Wyznaczymy sumę wektorów $\vec{p}$ i $\vec{r}$, gdzie $\vec{p} = [4, -1]$ i $\vec{r} = [2, 4]$, i przedstawimy jej graficzną interpretację.



$$\vec{p} + \vec{r} = [4 + 2, -1 + 4] = [6, 3]$$

Definicja 5.

Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie $\vec{u}=[u_x, u_y]$, $\vec{v}=[v_x, v_y]$, są **przeciwne** wtedy, gdy suma wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest wektorem zerowym, tzn. $u_x + v_x = 0$ oraz $u_y + v_y = 0$.

Wektor przeciwny do wektora $\vec{u}$ oznaczamy $-\vec{u}$. Wektor przeciwny do wektora $\overrightarrow{AB}$ oznaczamy $-\overrightarrow{AB}$ lub $\overrightarrow{BA}$. Łatwo zauważyć, że jeśli

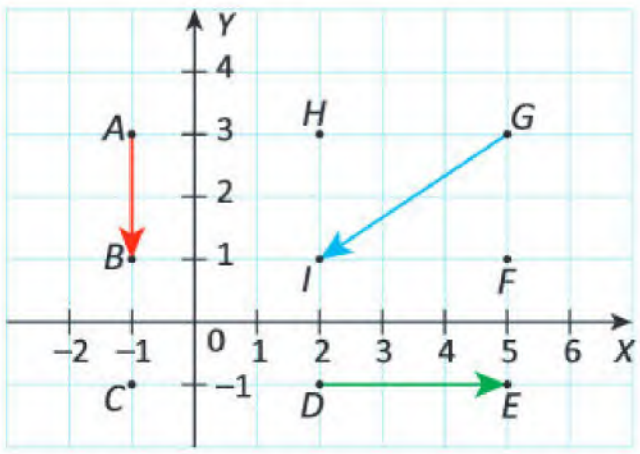
$$\vec{u}=[u_x, u_y], \quad \text{to} \quad -\vec{u}=[-u_x, -u_y].$$

Przykład 7.

a) Jeśli $\vec{u}=[-2,-5]$, to $-\vec{u}=[2,5]$.

b) Jeśli $A(3,-4)$, $B(3,7)$, to $\overrightarrow{AB}=[0,11]$ oraz $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}=[0,-11]$.

Ćwiczenie 4. W układzie współrzędnych danych jest dziewięć punktów oznaczonych literami od A do I oraz trzy wektory: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{DE}$.



Podaj trzy wektory równe i trzy wektory przeciwne do każdego z zaznaczonych wektorów. Zrób to w taki sposób, aby podane wektory były wyznaczone przez punkty od A do I.

Definicja 6.

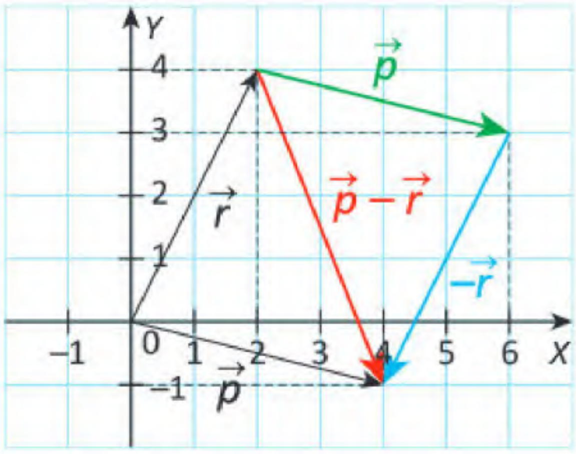
Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie $\vec{u}=[u_x, u_y]$ i $\vec{v}=[v_x, v_y]$, nazywamy wektor $[u_x - v_x, u_y - v_y]$. Różnicę wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oznaczamy $\vec{u}-\vec{v}$.

Odjąć wektor $\vec{v}$ od wektora $\vec{u}$ to znaczy dodać do wektora $\vec{u}$ wektor $-\vec{v}$.

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

Przykład 8.

Wyznaczymy różnicę wektorów $\vec{p}$ i $\vec{r}$, gdzie $\vec{p}=[4,-1]$, $\vec{r}=[2,4]$ oraz przedstawimy jej graficzną interpretację.



$\vec{p}-\vec{r}=[4-2, -1-4]=[2, -5]$

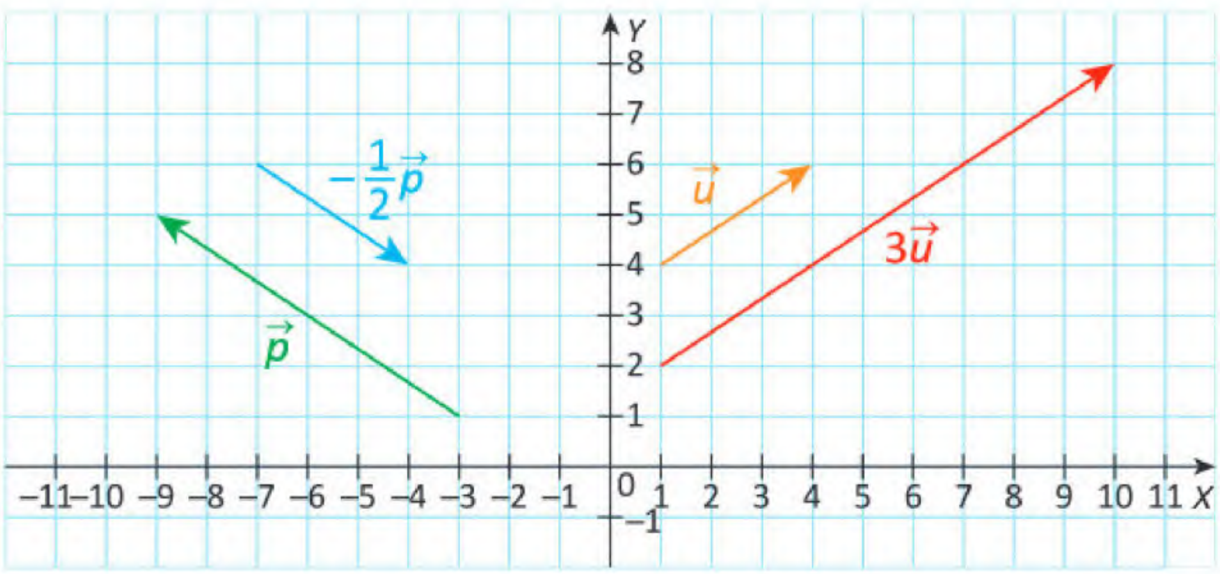
Definicja 7.

Iloczynem wektora $\vec{u}$, gdzie $\vec{u}=[u_x, u_y]$, **przez liczbę rzeczywistą** a nazywamy wektor $[a \cdot u_x, a \cdot u_y]$. Iloczyn wektora $\vec{u}$ przez liczbę a oznaczamy $a \cdot \vec{u}$.

Przykład 9.

Jeśli $\vec{p}=[2, -1]$, to $-3 \cdot \vec{p}=[(-3) \cdot 2, (-3) \cdot (-1)]$, czyli $-3 \cdot \vec{p}=[-6, 3]$.

Jeśli dla wektorów niezerowych $\vec{u}$ i $\vec{v}$ istnieje liczba rzeczywista a, dla której $\vec{u}=a \cdot \vec{v}$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazwiemy **wektorami równoległymi**. O wektorach równoległych mówimy, że **mają ten sam kierunek**. Jeśli dodatkowo $a>0$, to powiemy, że **wektory** $\vec{u}$ **i** $\vec{v}$ **mają ten sam zwrot**; jeśli natomiast $a<0$, to powiemy, że **wektory** $\vec{u}$ **i** $\vec{v}$ **mają przeciwne zwroty**.



Dodatkowo przyjmujemy, że wektor zerowy jest równoległy do każdego wektora.
Podamy twierdzenia charakteryzujące wektory równe i wektory przeciwne.

Twierdzenie 1.

Wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równe, wtedy i tylko wtedy, gdy wektory te:

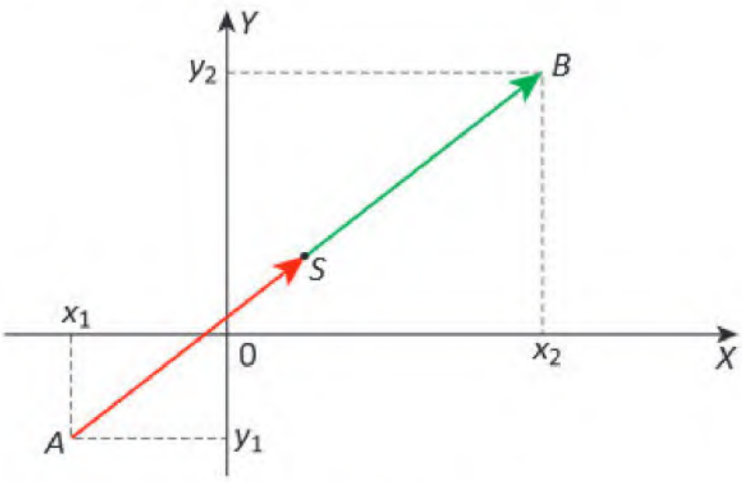
- mają taką samą długość,
- są równoległe,
- mają ten sam zwrot.

Twierdzenie 2.
Wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są przeciwne, wtedy i tylko wtedy, gdy wektory te:
- mają taką samą długość,
- są równoległe,
- mają przeciwne zwroty.

Ćwiczenie 5. Udowodnij ostatnie dwa twierdzenia, wykorzystując definicje zawarte w tym temacie.

Przykład 10.

W układzie współrzędnych dane są punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$. Wyznaczymy współrzędne punktu S, będącego środkiem odcinka AB.



Przyjmijmy oznaczenie $S(x_S, y_S)$.
Jeśli punkt S jest środkiem odcinka AB, to wektory $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{SB}$ są równe (zobacz tw. 1).
Obliczamy współrzędne tych wektorów:

$$\overrightarrow{AS} = [x_S - x_1, y_S - y_1]$$
$$\overrightarrow{SB} = [x_2 - x_S, y_2 - y_S]$$

Mamy $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$, zatem

$x_S - x_1 = x_2 - x_S$ i $y_S - y_1 = y_2 - y_S$

$x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ i $y_S = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Otrzymaliśmy, że $S\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.
Jeśli punkt S jest środkiem odcinka AB, gdzie $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, to

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Na koniec tego tematu podamy twierdzenie charakteryzujące działania na wektorach.

Twierdzenie 4. Własności działań na wektorach

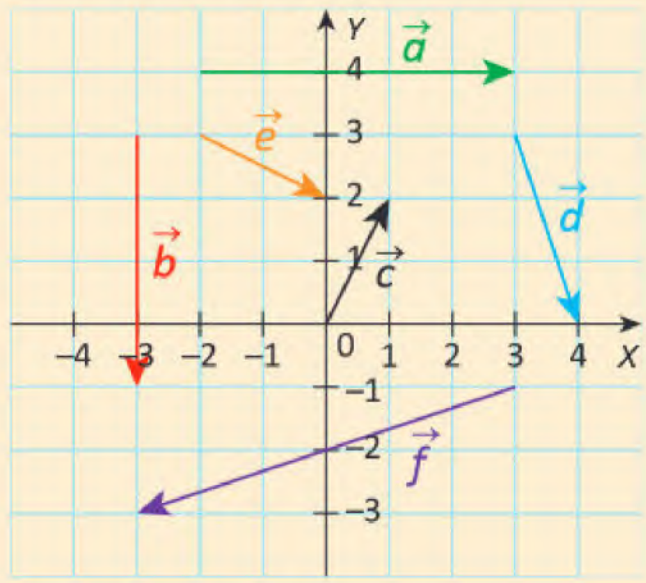
Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ w układzie współrzędnych oraz dowolnych liczb rzeczywistych k, l:

1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (przemienność dodawania wektorów)
2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (łączność dodawania wektorów)
3) $k\cdot(l\cdot\vec{u})=(k\cdot l)\cdot\vec{u}$
4) $(k+l)\cdot\vec{u}=k\cdot\vec{u}+l\cdot\vec{u}$
5) $k\cdot(\vec{u}+\vec{v})=k\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{v}$

Ćwiczenie 6. Udowodnij twierdzenie 4. Przyjmij, że $\vec{u}=[a, b]$, $\vec{v}=[c, d]$, $\vec{w}=[e, f]$, a następnie wykaż, korzystając z poznanych w tym temacie definicji, że prawdziwe są powyższe równości.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, wiedząc, że:
   a) $A(-4, 3)$, $B(-1, 7)$ b) $A(0, -2)$, $B(-3, 0)$.
   Jakie współrzędne ma wektor $\overrightarrow{BA}$?
2. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{p}$, gdzie $\vec{u}=[0, 3]$, $\vec{v}=[2, 0]$, $\vec{p}=[-4, 5]$. Początek wektora obierz dowolnie.
3. Podaj współrzędne wektorów zaznaczonych na rysunku obok. Następnie oblicz długości tych wektorów.



4. Dany jest punkt A oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Wyznacz współrzędne punktu B.
   a) $A(0, -3)$, $\overrightarrow{AB}=[4, 8]$ b) $A(2, 11)$, $\overrightarrow{AB}=[-8, -9]$
5. Dany jest punkt B oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Wyznacz współrzędne punktu A.
   a) $B(0, 1)$, $\overrightarrow{AB}=[-7, 6]$ b) $B(5, 7)$, $\overrightarrow{AB}=[3, -2]$
6. Dane są punkty $A(1, 2)$, $B(5, -1)$, $C(7, 3)$. Wyznacz punkt D, dla którego:
   a) wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe b) wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są przeciwne.
   Narysuj wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ w jednym układzie współrzędnych.

7. Wyznacz liczby a i b, dla których wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie:
   a) $\vec{u}=[a+b, 3]$, $\vec{v}=[-9, a-b]$, są równe,
   b) $\vec{u}=[a+4, b-1]$, $\vec{v}=[2b+1, 4a]$, są przeciwne.

8. Oblicz współrzędne środka odcinka AB, jeśli:
   a) $A(-4, 1)$, $B(6, -1)$
   b) $A(5, 7)$, $B(13, -3)$
   c) $A(-17, 30)$, $B(-25, -8)$
   d) $A(103, 46)$, $B(-29, -84)$.

9. Oblicz długość wektora:
   a) $\overrightarrow{AB}$, jeśli $A(-3, 1)$, $B(-5, -6)$
   b) $\overrightarrow{CD}$, jeśli $C(2, -7)$, $D(-13, 1)$
   c) $\vec{u}$, jeśli $\vec{u}=[-5, 12]$
   d) $\vec{v}$, jeśli $\vec{v}=[7, -24]$.

10. Dane są punkty: A, B i P. Zaznacz w układzie współrzędnych wektory $\overrightarrow{PA}$ oraz $\overrightarrow{PB}$ i oblicz ich współrzędne. Jaka jest zależność między wektorem $\overrightarrow{PB}$ i wektorem $\overrightarrow{PA}$?
    a) $A(-3, 1)$, $B(6, -2)$, $P(0, 0)$
    b) $A(-4, 4)$, $B(-2, 1)$, $P(0, -2)$
    c) $A(5, 6)$, $B(3, 4)$, $P(-1, 0)$
    d) $A(-7, -2)$, $B(3, 3)$, $P(1, 2)$

11. Dany jest wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u}=[-3, 7]$ i punkt $A(1, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu B, dla którego:
    a) $\overrightarrow{AB}=3\vec{u}$ b) $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$ c) $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}$.

12. Wiedząc, że $\vec{u}=[-2, 3]$ oraz $\vec{v}=[4, -2]$, wyznacz współrzędne wektora:
    a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{v}-\vec{u}$ c) $2\vec{u}+\vec{v}$ d) $\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$.

    Przedstaw graficzną interpretację tego wektora, zakładając, że początkiem wektora $\vec{u}$ i początkiem wektora $\vec{v}$ jest punkt $O(0, 0)$.

13. Wiedząc, że $\vec{a}=[0, -1]$ oraz $\vec{b}=[4, 4]$, wyznacz długość wektora:
    a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $\vec{a}-\vec{b}$ c) $2(\vec{b}-\vec{a})$ d) $3\vec{a}+\vec{b}$.

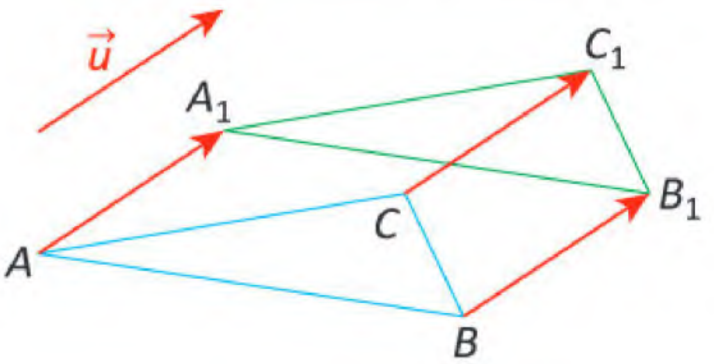
14. Wiedząc, że $\vec{u}=[3, -4]$ i $\vec{v}=[1, 2]$, wyznacz liczby a i b, dla których:
    a) $a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}=[7, 4]$
    b) $a\cdot\vec{u}-b\cdot\vec{v}=[-5, -8]$
    c) $(a+b)\cdot\vec{v}+(a-b)\cdot\vec{u}=[0, 2]$
    d) $a\cdot(\vec{u}+\vec{v})-b\cdot(\vec{u}-\vec{v})=[-1, 0]$.

15. Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe. Oblicz a, jeśli:
    a) $\vec{u}=[-2, 1]$, $\vec{v}=[a, 3]$ b) $\vec{u}=[-4, a]$, $\vec{v}=[-2, a+1]$.

Przesunięcie równoległe. Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX

W kolejnych tematach poznasz niektóre przekształcenia geometryczne płaszczyzny i nauczysz się przekształcać wykresy funkcji.

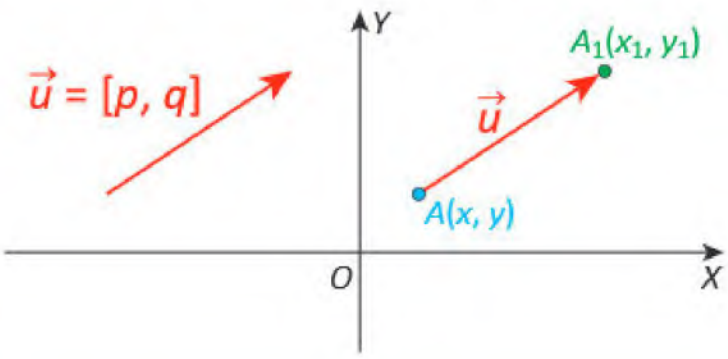
Definicja 1.
Przesunięciem równoległym o wektor $\vec{u}$ nazywamy przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi A przyporządkowujemy taki punkt A_1, dla którego $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$. Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u}$ nazywamy też translacją o wektor $\vec{u}$ i oznaczamy $T_{\vec{u}}$.



$T_{\vec{u}}(A) = A_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$
$T_{\vec{u}}(B) = B_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} = \vec{u}$
$T_{\vec{u}}(C) = C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{CC_1} = \vec{u}$

Przesunięcie równoległe zachowuje kształt i wielkość figury.

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczmy dowolny punkt $A(x, y)$ oraz wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = [p, q]$. Niech $A_1(x_1, y_1)$ będzie obrazem punktu A w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$. Zbadamy, jaka jest zależność między współrzędnymi wektora $\vec{u}$, a współrzędnymi punktów A i A_1.



Wiemy, że $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$, czyli

$$[x_1 - x, y_1 - y] = [p, q]$$

Zatem, na podstawie definicji równości wektorów, otrzymujemy:

$$x_1 - x = p \quad \text{i} \quad y_1 - y = q \qquad \text{stąd}$$
$$x_1 = x + p \quad \text{i} \quad y_1 = y + q$$

Twierdzenie 1.
W prostokątnym układzie współrzędnych obrazem punktu $A(x, y)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = [p, q]$, jest punkt $A_1(x + p, y + q)$.

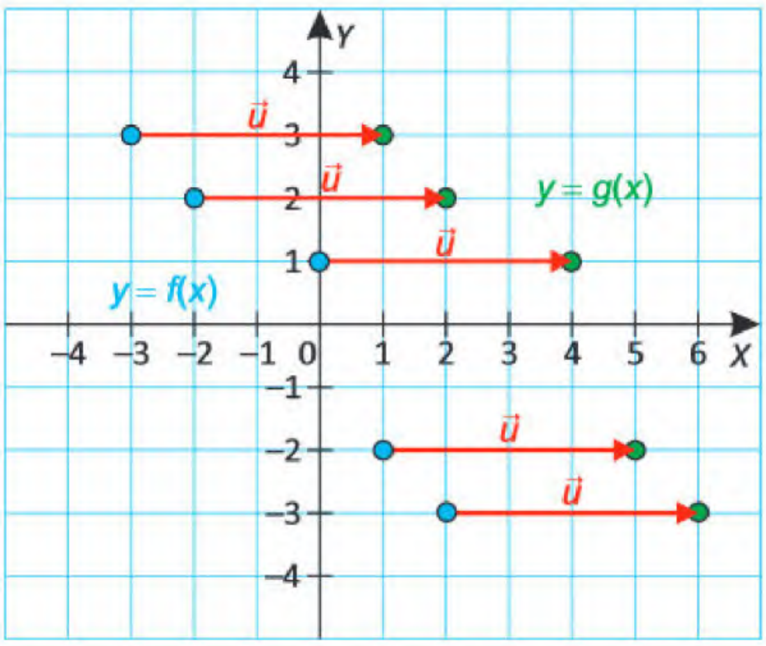
Ćwiczenie 1. Dane są punkty $A(-4, 1)$, $B(3, -2)$, $C(-2, 4)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A_1B_1C_1$, będącego obrazem trójkąta ABC w przesunięciu równoległym o wektor $[-1, 3]$.

Omówimy teraz przesunięcie równoległe wykresu funkcji wzdłuż osi OX.

W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest pięciopunktowy wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $\{-3, -2, 0, 1, 2\}$.

1) Każdy punkt wykresu funkcji f przesuwamy o wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = [4, 0]$, czyli o 4 jednostki w prawo.

W ten sposób otrzymujemy wykres funkcji, który oznaczamy $y = g(x)$.



Porównajmy tabele, opisujące funkcje f oraz g:

x	-3	-2	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	-2	-3

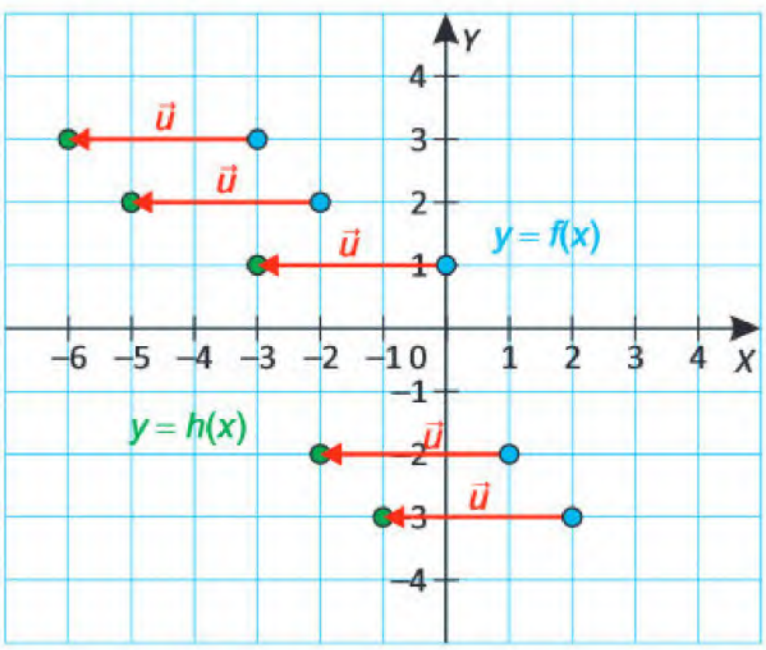
x	1	2	4	5	6
$g(x)$	3	2	1	-2	-3

Funkcja g dla każdego argumentu x przyjmuje taką samą wartość, jaką funkcja f przyjmuje dla argumentu mniejszego o 4, czyli dla argumentu $x - 4$. Dla dowolnego argumentu x zachodzi równość

$$g(x) = f(x - 4).$$

2) Każdy punkt wykresu funkcji f przesuwamy o wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = [-3, 0]$, czyli o 3 jednostki w lewo.

W ten sposób otrzymujemy wykres funkcji, który oznaczamy $y = h(x)$.



Porównajmy tabele, opisujące funkcje f oraz h:

x	-3	-2	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	-2	-3

x	-6	-5	-3	-2	-1
$h(x)$	3	2	1	-2	-3

Funkcja h dla każdego argumentu x przyjmuje taką samą wartość, jaką funkcja f przyjmuje dla argumentu większego o 3, czyli dla argumentu $x + 3$. Dla dowolnego argumentu x zachodzi równość

$$h(x) = f(x + 3), \quad \text{czyli} \quad h(x) = f(x - (-3)).$$

Twierdzenie 2.

Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy równolegle o wektor $[p, 0]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - p)$.

Przykład 1.

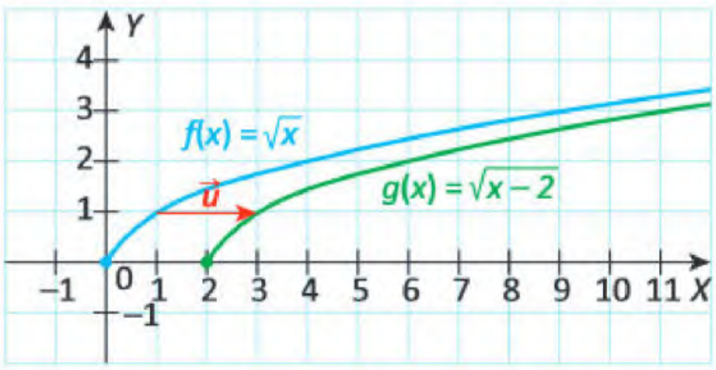
Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty)$, został przesunięty równolegle:

a) o wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = [2, 0]$,

b) o wektor $\vec{v}$, gdzie $\vec{v} = [-4, 0]$.

Naszkicujemy wykres otrzymanej funkcji i podamy jej wzór.

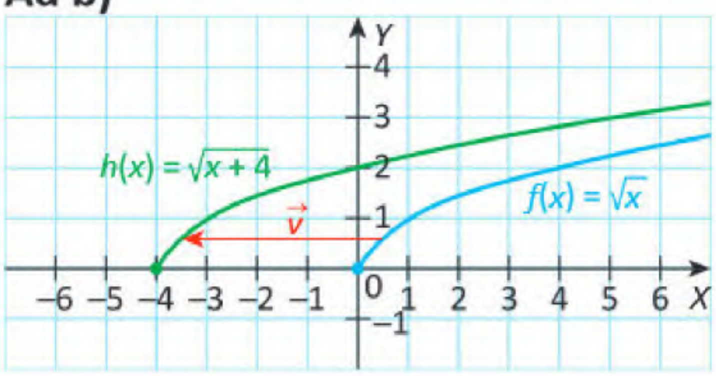
Ad a)



Po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ o wektor $[2, 0]$, czyli o 2 jednostki w prawo, otrzymujemy wykres funkcji

$$g(x) = \sqrt{x-2}, \text{ gdzie } x \in \langle 2, +\infty).$$

Ad b)



Po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ o wektor $[-4, 0]$, czyli o 4 jednostki w lewo, otrzymujemy wykres funkcji

$$h(x) = \sqrt{\mathbf{x - (-4)}}, \text{ stąd}$$

$$h(x) = \sqrt{x+4}, \text{ gdzie } x \in \langle -4, +\infty).$$

Ćwiczenie 2. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$ o 5 jednostek w prawo. Jaka jest dziedzina otrzymanej funkcji?

Ćwiczenie 3. O jaki wektor wystarczy przesunąć równolegle wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \frac{1}{x+7}$?

Przykład 2.

Wyznaczymy wzór funkcji g, której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 2x - 1$ o wektor $[-6, 0]$.

Korzystamy z twierdzenia 2. i otrzymujemy:

$g(x) = f(x+6) = (x+6)^2 + 2(x+6) - 1$

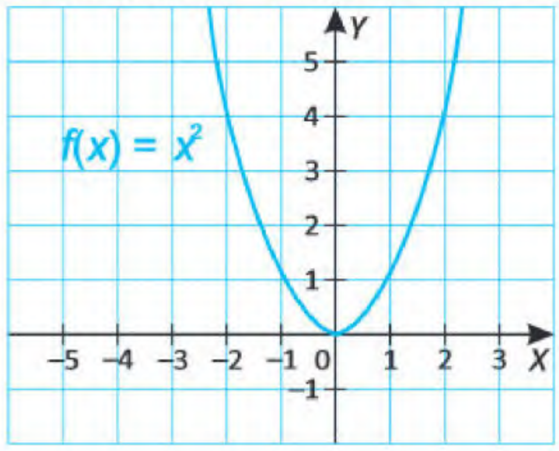
$g(x) = x^2 + 12x + 36 + 2x + 12 - 1$

$g(x) = x^2 + 14x + 47$

Szukany wzór funkcji: $g(x) = x^2 + 14x + 47$.

Stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ćwiczenie 4. Na rysunku poniżej znajduje się wykres funkcji $f(x) = x^2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



a) Przerysuj ten wykres do zeszytu. Następnie przesuń go równolegle wzdłuż osi OX o 2 jednostki w lewo. Jaki wzór ma funkcja g, której wykres otrzymasz?

b) Porównaj miejsca zerowe obu funkcji.

c) O jaki wektor wystarczy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji $h(x) = x^2 - 2x + 1$?

Przykład 3.

Wykres funkcji liniowej $f(x) = 3x + 5$ przesunięto równolegle wzdłuż osi OX i otrzymano wykres funkcji liniowej $g(x) = 3x - 16$. Wyznaczymy wektor tego przesunięcia.

Oznaczmy szukany wektor: $[p, 0]$. Znowu korzystamy z twierdzenia 2.

$g(x) = f(x - p)$, gdzie $f(x) = 3x + 5$, zatem

$g(x) = 3(x - p) + 5 = 3x - 3p + 5$.

Jednocześnie funkcję liniową g opisuje wzór $g(x) = 3x - 16$, więc otrzymujemy

$-3p + 5 = -16$, stąd

$p = 7$

Szukany wektor to $[7, 0]$.

Ćwiczenie 5. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji liniowych $f(x) = 3x + 5$ oraz $g(x) = 3x - 16$ i sprawdź poprawność rozwiązania z przykładu 3.

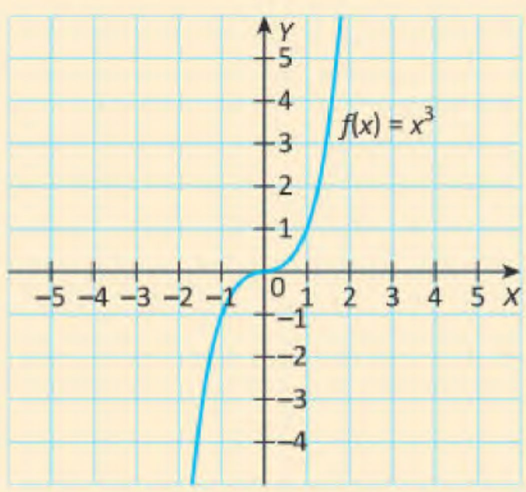
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji $f(x) = x^3$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Przerysuj go do zeszytu, a następnie przesuń go równolegle:

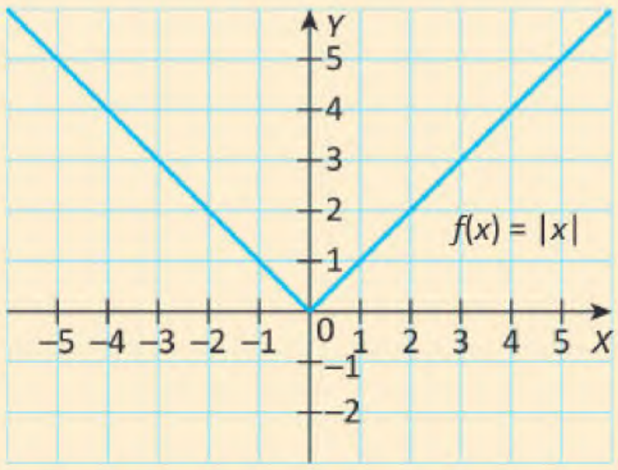
   a) o wektor $[-1, 0]$,

   b) o wektor $[2, 0]$.

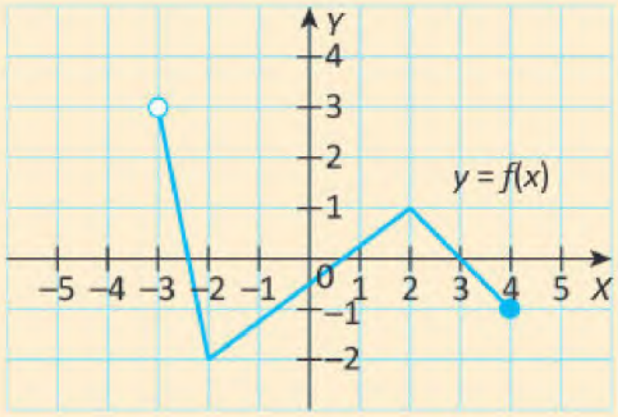
   Podaj wzór otrzymanej funkcji.



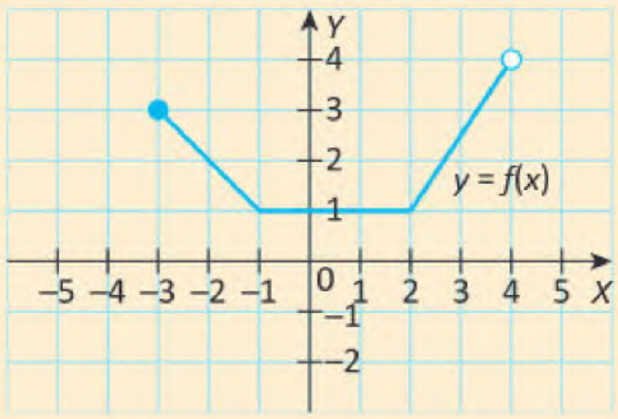
2. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji $f(x) = |x|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Przerysuj go do zeszytu, a następnie przesuń go równolegle:
   a) o 3 jednostki w prawo,
   b) o 5 jednostek w lewo.
   Podaj wzór otrzymanej funkcji.



3. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f.
   a) Przerysuj ten wykres do zeszytu.
   b) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x+2)$.
   c) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x-4)$.
   Porównaj dziedzinę funkcji f z dziedziną otrzymanej funkcji.



4. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f.
   a) Przerysuj ten wykres do zeszytu.
   b) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x-3)$.
   c) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x+5)$.
   Porównaj przedziały monotoniczności funkcji f i otrzymanej funkcji.

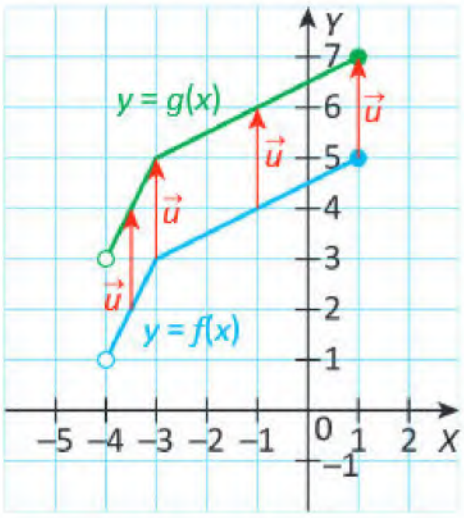


5. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji liniowej $f(x) = -2x + 1$ o wektor $[7, 0]$.
6. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ o wektor $[-1, 0]$.
7. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wzdłuż osi OX wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x+3}$ o 4 jednostki w prawo.
8. Wykres funkcji liniowej $f(x) = 2x$ przesunięto równolegle wzdłuż osi OX, otrzymując wykres funkcji $g(x) = 2x + 10$. Wyznacz wektor tego przesunięcia.
9. Wykres funkcji liniowej $f(x) = 14 - \frac{x}{2}$ przesunięto równolegle wzdłuż osi OX, otrzymując wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$. Wyznacz wektor tego przesunięcia.
10. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -6, 9)$. Podaj dziedzinę funkcji:
    a) $g(x) = f(x-8)$ b) $h(x) = f(x+7)$.
11. Funkcja f ma trzy miejsca zerowe: -2, 0, 13. Podaj miejsca zerowe funkcji:
    a) $g(x) = f(x+25)$ b) $h(x) = f(x-41)$.

Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OY

W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Przeanalizujemy przesunięcie równoległe wykresu funkcji f w dwóch przypadkach: o 2 jednostki w górę i o 5 jednostek w dół.

1) Każdy punkt wykresu funkcji f przesuwamy o wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = [0, 2]$, czyli o 2 jednostki w górę. W ten sposób otrzymujemy wykres funkcji, którą oznaczamy $y = g(x)$.

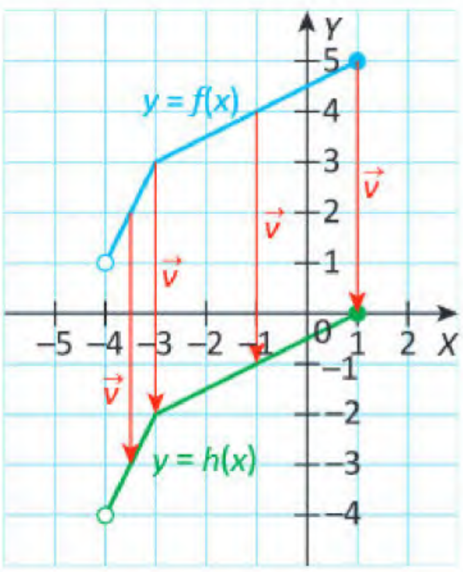


Zauważ, że $D_f = D_g = (-4, 1\rangle$.

Funkcja g dla każdego argumentu x przyjmuje wartość o 2 większą niż funkcja f.

Dla dowolnego argumentu x zachodzi równość:
$$g(x) = f(x) + 2.$$

2) Każdy punkt wykresu funkcji f przesuwamy o wektor $\vec{v}$, gdzie $\vec{v} = [0, -5]$, czyli o 5 jednostek w dół. W ten sposób otrzymujemy wykres funkcji, którą oznaczamy $y = h(x)$.



Zauważ, że $D_f = D_h = (-4, 1\rangle$.

Funkcja h dla każdego argumentu x przyjmuje wartość o 5 mniejszą niż funkcja f.

Dla dowolnego argumentu x zachodzi równość:
$$h(x) = f(x) - 5.$$

Twierdzenie 1.
Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy równolegle o wektor $[0, q]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x) + q$.

Jeśli $q > 0$, to przesunięcie następuje w górę, a jeśli $q < 0$, to przesunięcie następuje w dół.

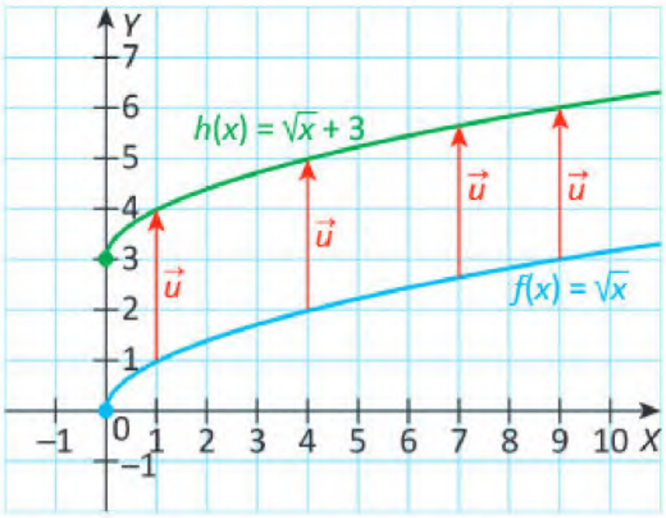
Przykład 1.

Wykres funkcji $f(x)=\sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty)$, został przesunięty równolegle:

a) o wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u}=[0, 3]$ b) o wektor $\vec{v}$, gdzie $\vec{v}=[0, -4]$

Naszkicujemy wykres otrzymanej funkcji i podamy jej wzór.

Ad a)



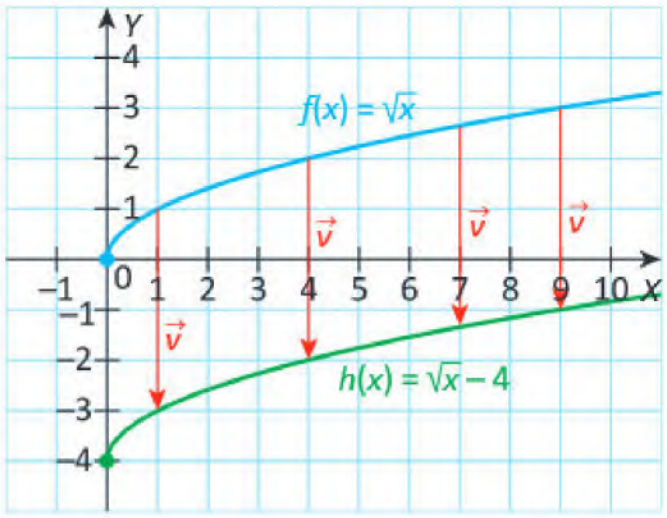
Po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y=f(x)$ o wektor

$[0, 3]$

otrzymujemy wykres funkcji

$h(x)=\sqrt{x}+3$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty)$

Ad b)



Po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y=f(x)$ o wektor

$[0, -4]$

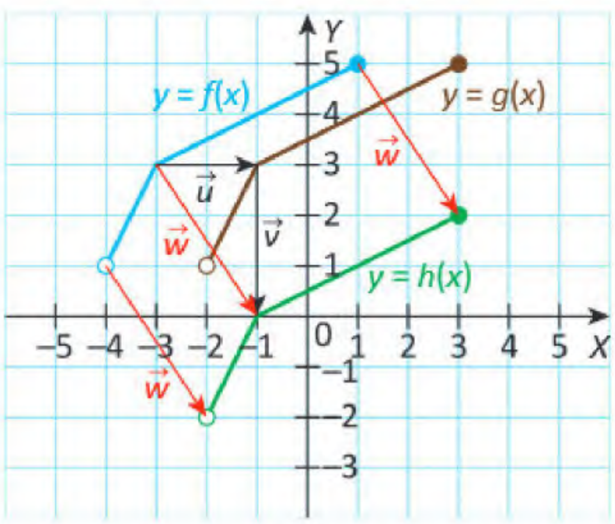
otrzymujemy wykres funkcji

$h(x)=\sqrt{x}-4$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty)$

Ćwiczenie 1. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymasz, przesuwając równolegle wykres funkcji $f(x)=\sqrt{x}$ o 1 jednostkę w dół. Jaka jest najmniejsza wartość funkcji g?

Przykład 2.

W prostokątnym układzie współrzędnych przedstawiony jest wykres funkcji $y=f(x)$. Przesuniemy równolegle wykres tej funkcji o wektor $[2, 0]$. Następnie otrzymany wykres przesuniemy o wektor $[0, -3]$. Napiszemy wzór końcowej funkcji.



Po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y=f(x)$ o wektor $[2, 0]$, czyli o 2 jednostki w prawo, otrzymujemy wykres funkcji

$g(x)=f(x-2)$.

Przesuwając wykres funkcji $g(x)=f(x-2)$ o wektor $[0, -3]$, czyli o 3 jednostki w dół, otrzymujemy wykres funkcji

$h(x)=g(x)-3$, czyli

$h(x)=f(x-2)-3$.

Wykres funkcji h z ostatniego przykładu jest obrazem wykresu funkcji $y=f(x)$ w przesunięciu równoległym o wektor $[2, -3]$.

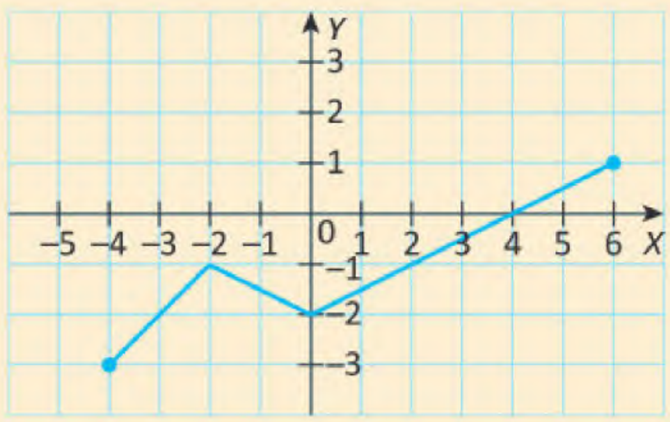
Ćwiczenie 2. Zmień kolejność przekształceń z poprzedniego przykładu: najpierw wykres danej funkcji f przesuń równolegle o wektor $[0, -3]$, a następnie otrzymany wykres – o wektor $[2, 0]$. Czy końcowy wykres to wykres funkcji h?

Twierdzenie 2.
Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy równolegle o wektor $[p, q]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$.

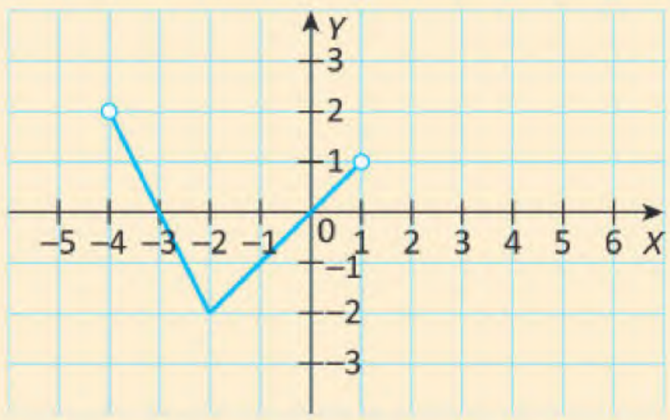
Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Wykres funkcji $f(x) = x^3$ przesuń równolegle:
   a) o 2 jednostki w dół wzdłuż osi OY. Podaj wzór otrzymanej funkcji.
   b) o 1 jednostkę w górę wzdłuż osi OY. Podaj wzór otrzymanej funkcji.
2. Wykres funkcji $f(x) = |x|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przesuń równolegle o wektor $[5, -2]$. Podaj wzór nowej funkcji. Jaką najmniejszą wartość przyjmuje ta funkcja?
3. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem:
   a) $y = (x + 3)^2 - 1$ b) $y = \dfrac{1}{x-4} - 3$ c) $y = \sqrt{x+5} + 2$.
4. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji f. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji:
   a) $g(x) = f(x) + 5$,
   b) $h(x) = f(x) - 1$,
   c) $k(x) = f(x + 2) - 1$.



5. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji f. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji:
   a) $g(x) = f(x) + 3$,
   b) $h(x) = f(x - 5)$,
   c) $k(x) = f(x - 3) - 2$.

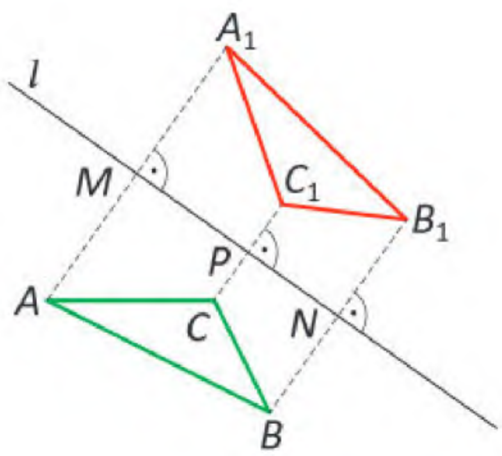


6. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-3, 8)$. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty, 5\rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji:
   a) $g(x) = f(x + 4) + 7$ b) $h(x) = f(x - 3) - 11$.
7. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -9, 10)$, a zbiorem wartości – przedział $(-\infty, 3\rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji:
   a) $g(x) = f(x + 13) - 2$ b) $h(x) = 1 + f(x - 8)$.
8. Wyznacz wzór funkcji, której wykres powstał po przesunięciu równoległym wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ o wektor:
   a) $[0, -4]$ b) $[2, 0]$ c) $[-1, 3]$.

Symetria osiowa.
Symetria osiowa względem osi OX i OY

Definicja 1.

Symetrią osiową względem prostej l nazywamy przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi A, $A \notin l$, przyporządkowujemy taki punkt A_1, dla którego prosta AA_1 jest prostopadła do prostej l i środkiem odcinka AA_1 jest punkt M należący do prostej l. Jeśli $A \in l$, to obrazem tego punktu w symetrii osiowej względem prostej l jest ten sam punkt. Symetrię osiową względem prostej l oznaczamy S_l.



$S_l(A) = A_1$
$S_l(B) = B_1$
$S_l(C) = C_1$

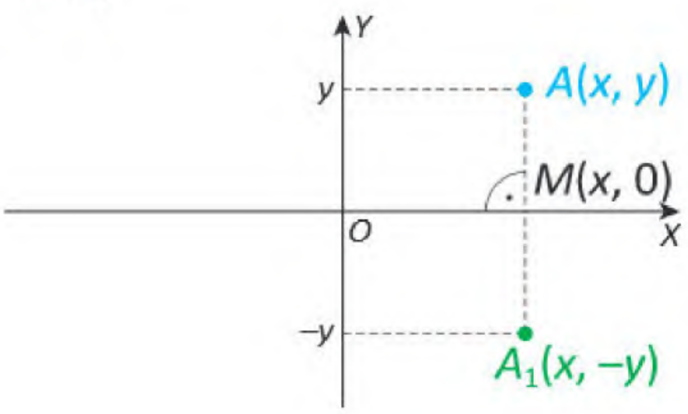
Symetria osiowa zachowuje kształt i wielkość figury.

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczono punkt $A(x, y)$ oraz obraz A_1 punktu A w symetrii osiowej:

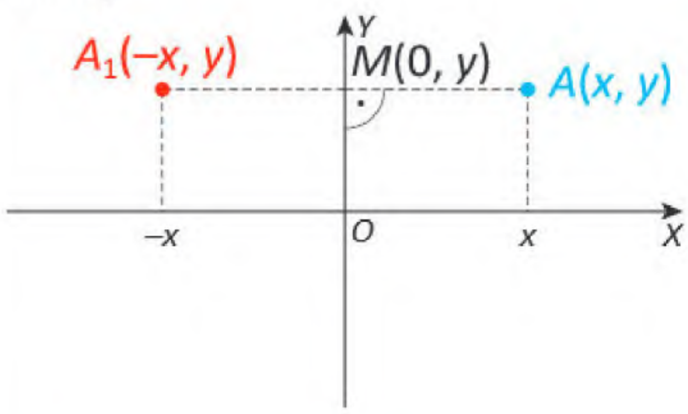
a) względem osi OX,
b) względem osi OY.

Sytuację tę przedstawiają poniższe rysunki.

Ad a)



Ad b)



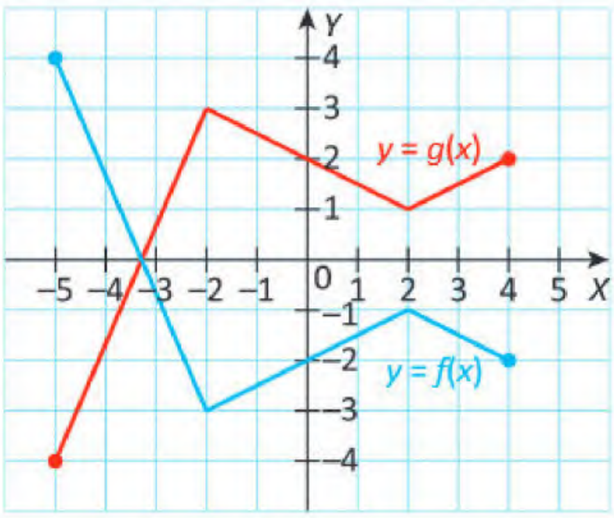
Twierdzenie 1.

a) Obrazem punktu $A(x, y)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A_1(x, -y)$.
b) Obrazem punktu $A(x, y)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $A_1(-x, y)$.

Ćwiczenie 1. W układzie współrzędnych narysuj odcinek AB, gdzie $A(-3, 1)$, $B(2, 4)$. Następnie wyznacz obraz tego odcinka, czyli odcinek A_1B_1, w symetrii osiowej względem osi OX, oraz obraz odcinka AB, czyli odcinek A_2B_2, w symetrii osiowej względem osi OY.

Symetria osiowa wykresu funkcji względem osi *OX*

W prostokątnym układzie współrzędnych narysowany jest wykres funkcji $y = f(x)$ i obraz wykresu tej funkcji w symetrii osiowej względem osi OX, czyli wykres funkcji $y = g(x)$. Przyjrzyjmy się wartościom funkcji f i g dla tych samych argumentów.



Zauważ, że $D_f = D_g = \langle -5, 4\rangle$.

Funkcje f oraz g dla tych samych argumentów przyjmują przeciwne wartości.

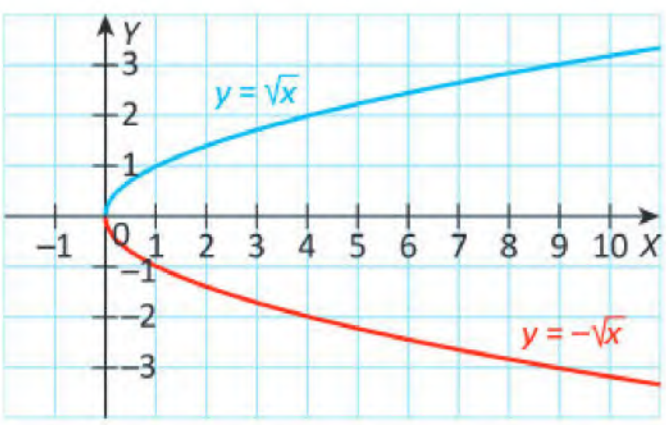
Dla dowolnego argumentu x zachodzi równość:

$$g(x) = -f(x).$$

Twierdzenie 2.
Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcimy przez symetrię osiową względem osi OX, to otrzymamy wykres funkcji $y = -f(x)$.

Przykład 1.

Dana jest funkcja $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \geqslant 0$. Naszkicujemy obraz wykresu tej funkcji w symetrii osiowej względem osi OX, a następnie napiszemy wzór funkcji, której wykres otrzymaliśmy.



W wyniku przekształcenia wykresu funkcji

$$y = \sqrt{x}, \text{ gdzie } x \geqslant 0$$

przez symetrię osiową względem osi OX otrzymujemy wykres funkcji

$$y = -\sqrt{x}, \text{ gdzie } x \geqslant 0$$

Przykład 2.

Wykres funkcji opisanej wzorem $y = x^2 - 3x + 4$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OX. Napiszemy wzór funkcji, której wykres otrzymano.

Z twierdzenia 2. wynika, że otrzymano wykres funkcji opisanej wzorem

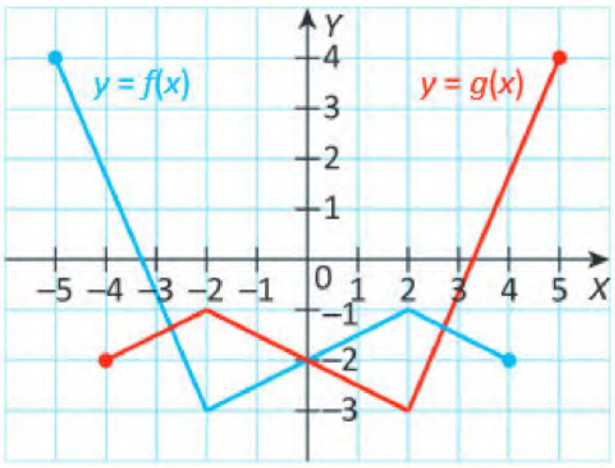
$y = -(x^2 - 3x + 4)$, czyli

$y = -x^2 + 3x - 4$.

Ćwiczenie 2. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po odbiciu symetrycznym wykresu funkcji liniowej $f(x) = 2x - 3$ względem osi OX.

Symetria osiowa wykresu funkcji względem osi OY

W prostokątnym układzie współrzędnych narysowany jest wykres funkcji $y = f(x)$ i obraz wykresu tej funkcji w symetrii osiowej względem osi OY, czyli wykres funkcji $y = g(x)$. Przyjrzyjmy się wartościom funkcji f i g dla przeciwnych argumentów.



Zauważ, że $D_f = \langle -5, 4 \rangle$ i $D_g = \langle -4, 5 \rangle$.

Funkcje f oraz g dla przeciwnych argumentów przyjmują te same wartości.

Dla dowolnego argumentu x zachodzi równość:

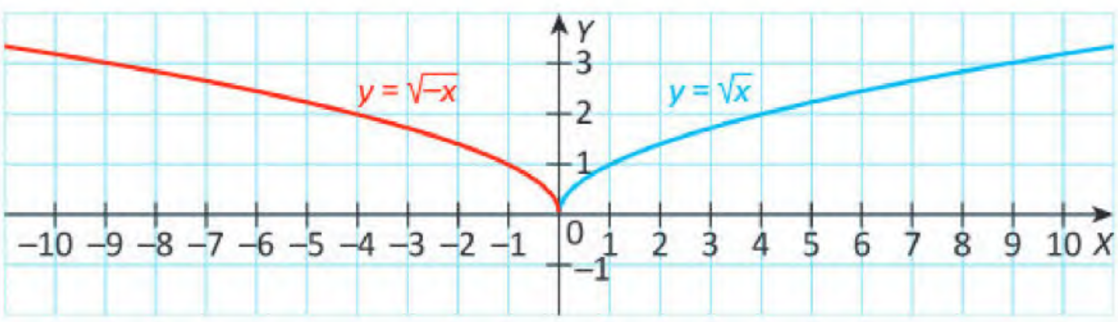
$g(x) = f(-x)$.

Twierdzenie 3.

Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcimy przez symetrię osiową względem osi OY, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(-x)$.

Przykład 3.

Dana jest funkcja $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \geqslant 0$. Naszkicujemy obraz wykresu tej funkcji w symetrii osiowej względem osi OY, a następnie napiszemy wzór funkcji, której wykres otrzymaliśmy.



Po przekształceniu wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \geqslant 0$ przez symetrię osiową względem osi OY otrzymujemy wykres funkcji $y = \sqrt{-x}$, gdzie $x \leqslant 0$.

Przykład 4.

Wykres funkcji opisanej wzorem $y = x^2 - 3x + 4$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY. Napiszemy wzór funkcji, której wykres otrzymano.

Z twierdzenia 3. wynika, że otrzymano wykres funkcji opisanej wzorem

$y = (-x)^2 - 3(-x) + 4$, czyli

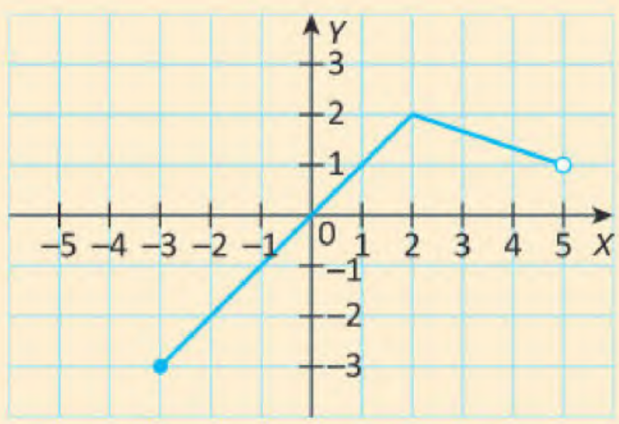
$y = x^2 + 3x + 4$.

Ćwiczenie 3. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $f(x) = 2x - 3$ przez symetrię osiową względem osi OY.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ przekształć przez symetrię osiową względem:
   a) osi OX b) osi OY.
   Podaj wzór otrzymanej funkcji.
2. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-4}$ przekształć przez symetrię osiową względem:
   a) osi OX b) osi OY.
   Podaj wzór otrzymanej funkcji.
3. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 1$ przekształć przez symetrię osiową względem:
   a) osi OX b) osi OY.
   Podaj wzór otrzymanej funkcji.
4. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji:
   a) $g(x) = -f(x)$ b) $h(x) = f(-x)$.
   Porównaj dziedzinę i zbiór wartości nowej funkcji odpowiednio z dziedziną i zbiorem wartości funkcji f.



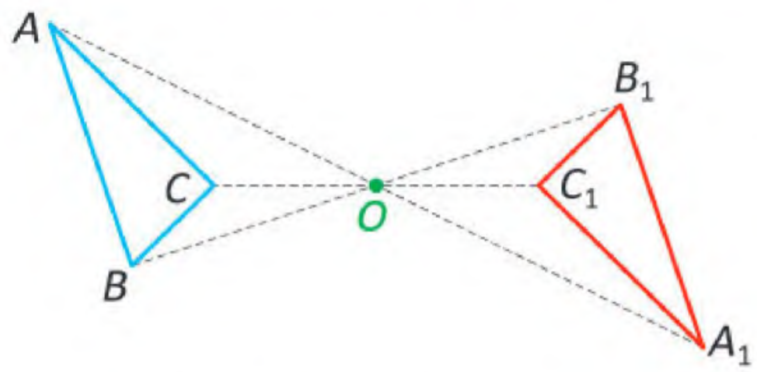
5. Funkcję f opisuje tabelka obok. Wykonaj w zeszycie tabelę, opisującą funkcję:
   a) $g(x) = -f(x)$ b) $h(x) = f(-x)$.

x	-3	-1	0	3	5
$f(x)$	0	2	4	6	8

6. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymano po przekształceniu wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 3x - 1$ przez symetrię względem:
   a) osi OX b) osi OY.
7. Naszkicuj wykres funkcji:
   a) $y = -|x| + 4$ b) $y = -|x + 2|$ c) $y = |-x + 1|$.

Symetria środkowa. Symetria środkowa względem punktu (0, 0)

Definicja 1.
Symetrią środkową względem punktu O nazywamy przekształcenie geometryczne, w którym obrazem każdego punktu A, $A \neq O$, jest taki punkt A_1, dla którego punkt O jest środkiem odcinka AA_1. Obrazem punktu O jest ten sam punkt. Symetrię środkową względem punktu O oznaczamy S_O.

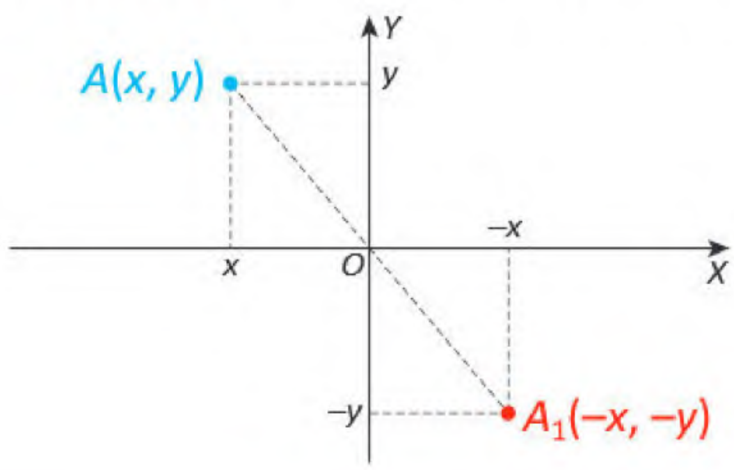


$S_O(A) = A_1$
$S_O(B) = B_1$
$S_O(C) = C_1$

Punkt O nazywamy środkiem symetrii.

Symetria środkowa zachowuje kształt i wielkość figury.

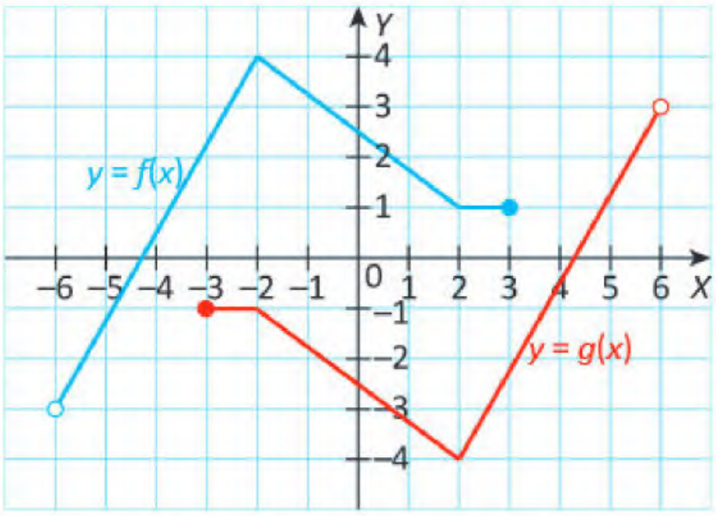
Niech $A(x, y)$ będzie dowolnie wybranym punktem na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych. Z tw. 3. ze str. 17 wynika, że punkt A_1 będący obrazem punktu A w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$ ma współrzędne $(-x, -y)$.



Twierdzenie 1.
Obrazem punktu $A(x, y)$ w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$ jest punkt $A_1(-x, -y)$.

Ćwiczenie 1. W układzie współrzędnych narysuj odcinek AB o końcach $A(-5, 1)$, $B(-3, -2)$. Następnie znajdź obraz A_1B_1 tego odcinka w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Jakie współrzędne mają punkty A_1 i B_1?

W prostokątnym układzie współrzędnych jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$ i obraz wykresu tej funkcji w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$, czyli wykres funkcji $y = g(x)$. Przyjrzyjmy się wartościom funkcji f i g dla przeciwnych argumentów.



Zauważ, że $D_f = (-6, 3\rangle$ i $D_g = \langle -3, 6)$.

Funkcje f i g dla przeciwnych argumentów przyjmują przeciwne wartości.

Dla dowolnego argumentu x zachodzi równość:

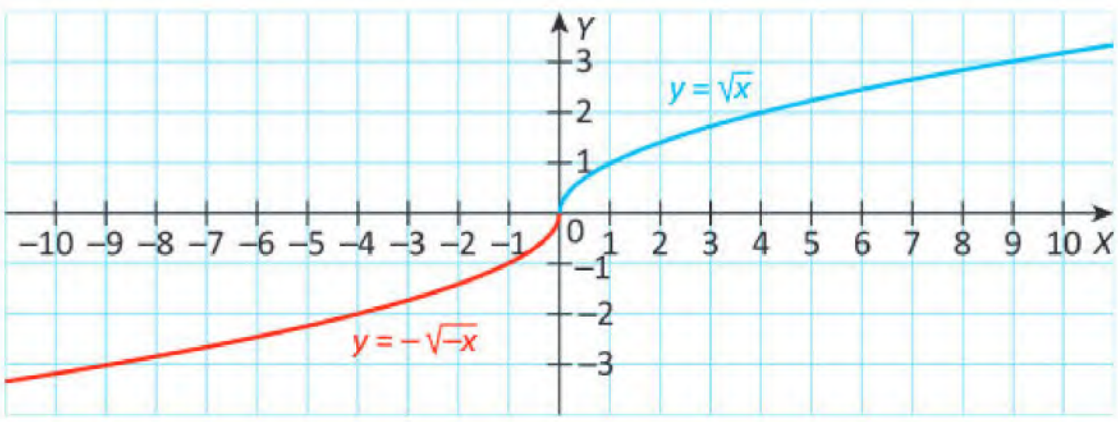
$$g(x) = -f(-x).$$

Ćwiczenie 2. Porównaj zbiór wartości funkcji f na powyższym rysunku ze zbiorem wartości funkcji g, gdzie $g(x) = -f(-x)$.

Twierdzenie 2.
Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcimy przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$, to otrzymamy wykres funkcji $y = -f(-x)$.

Przykład 1.

Dana jest funkcja $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \geqslant 0$. Naszkicujemy obraz wykresu tej funkcji w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$. Następnie napiszemy wzór funkcji, której wykres otrzymaliśmy.

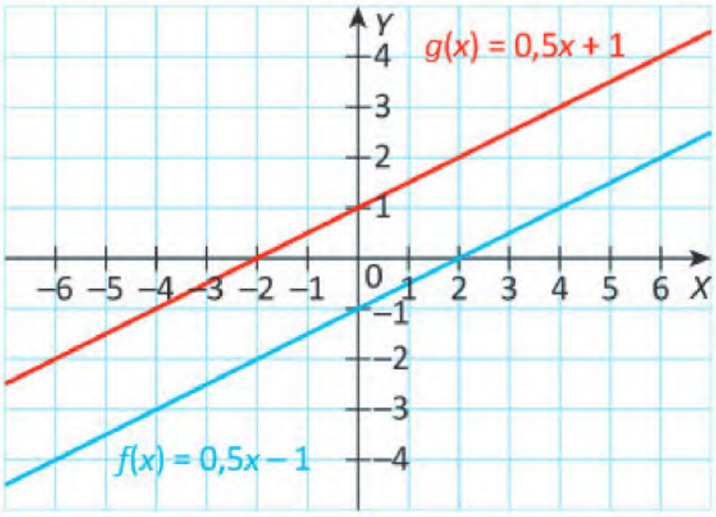


Po przekształceniu wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \geqslant 0$, przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$ otrzymujemy wykres funkcji $y = -\sqrt{-x}$, gdzie $x \leqslant 0$.

Przykład 2.

Wykres funkcji liniowej $f(x) = 0{,}5x - 1$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$ i otrzymano wykres funkcji g. Wyznaczymy wzór funkcji g i naszkicujemy jej wykres .

Po przekształceniu wykresu funkcji $f(x) = 0{,}5x - 1$ przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$ otrzymujemy wykres funkcji $y = -f(-x)$.



Zatem:

$$g(x) = -[0{,}5(-x) - 1] = -(-0{,}5x - 1) = 0{,}5x + 1$$

Tak więc

$$g(x) = 0{,}5x + 1.$$

Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji f oraz wykres funkcji g.

Przykład 3.

Wykres funkcji opisanej wzorem $y = x^2 - 3x + 4$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$. Napiszemy wzór funkcji, której wykres otrzymano.

Z twierdzenia 2. wynika, że otrzymano wykres funkcji opisanej wzorem

$y = -[(-x)^2 - 3(-x) + 4]$, czyli

$y = -(x^2 + 3x + 4)$

$y = -x^2 - 3x - 4$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wykres funkcji f przekształć przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

   a) $f(x) = |x + 3|$ b) $f(x) = \sqrt{x} + 2$ c) $f(x) = 4 - x$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x-5} + 1$.

2. Wykres funkcji f przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano.

   a) $f(x) = 2x^2 - 7x - 5$ b) $f(x) = -x^2 + 2x - 9$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 1$ d) $f(x) = \dfrac{-3}{x-2} - 4$.

3. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -2, 7, 108. Jakie miejsca zerowe ma funkcja g, jeśli $g(x) = -f(-x)$?

4. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-4, 8)$, a jej zbiorem wartości – przedział $\langle 0, 5\rangle$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, jeśli $g(x) = -f(-x)$.

5. Zbiór wartości funkcji f jest przedziałem $\langle 1, 9\rangle$. Jaką największą i jaką najmniejszą wartość przyjmuje funkcja g, jeśli $g(x) = -f(-x)$?

6. Jakie jedno przekształcenie wykonasz, aby z wykresu funkcji $f(x) = -x + 1$ otrzymać wykres funkcji:

   a) $y = x + 1$ b) $y = x - 1$ c) $y = -x - 1$?

Wykres funkcji $y = |f(x)|$ oraz $y = f(|x|)$

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie definicję wartości bezwzględnej. Na podstawie tej definicji napisz wzór funkcji $f(x) = |2x|$ bez użycia znaku wartości bezwzględnej.

Wykres funkcji $y = |f(x)|$

Przykład 1.

Funkcję $y = f(x)$ opisuje tabelka obok. Wykonamy tabelkę, opisującą funkcję $y = |f(x)|$.

x	−2	−1	0	1	3	5
$f(x)$	**4**	**−2**	**3**	**0**	**−5**	**−9**

Do dziedziny funkcji $y = |f(x)|$ należą wszystkie argumenty, które należą do dziedziny funkcji $y = f(x)$. Mamy bowiem:

$|f(-2)| = |4| = 4$, $|f(-1)| = |-2| = 2$, $|f(0)| = |3| = 3$,
$|f(1)| = |0| = 0$, $|f(3)| = |-5| = 5$, $|f(5)| = |-9| = 9$

Oto tabelka funkcji $y = |f(x)|$.

x	−2	−1	0	1	3	5
$\|f(x)\|$	**4**	**2**	**3**	**0**	**5**	**9**

Zauważ, że funkcja $y = |f(x)|$ przyjmuje te same wartości co funkcja $y = f(x)$ tylko dla tych argumentów, dla których funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartości nieujemne. W pozostałych przypadkach funkcja $y = |f(x)|$ przyjmuje wartości przeciwne niż funkcja $y = f(x)$.

Powiemy teraz jak, mając wykres funkcji $y = f(x)$, otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$.

Załóżmy, że dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Aby naszkicować wykres funkcji $y = |f(x)|$, posłużymy się definicją wartości bezwzględnej. Mamy:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{jeśli } f(x) < 0 \end{cases}$$

Stwierdzenie:

jeśli $f(x) \geqslant 0$, to $|f(x)| = f(x)$

oznacza, że dla wszystkich argumentów x, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, wykresy funkcji $y = |f(x)|$ i $y = f(x)$ się pokrywają.

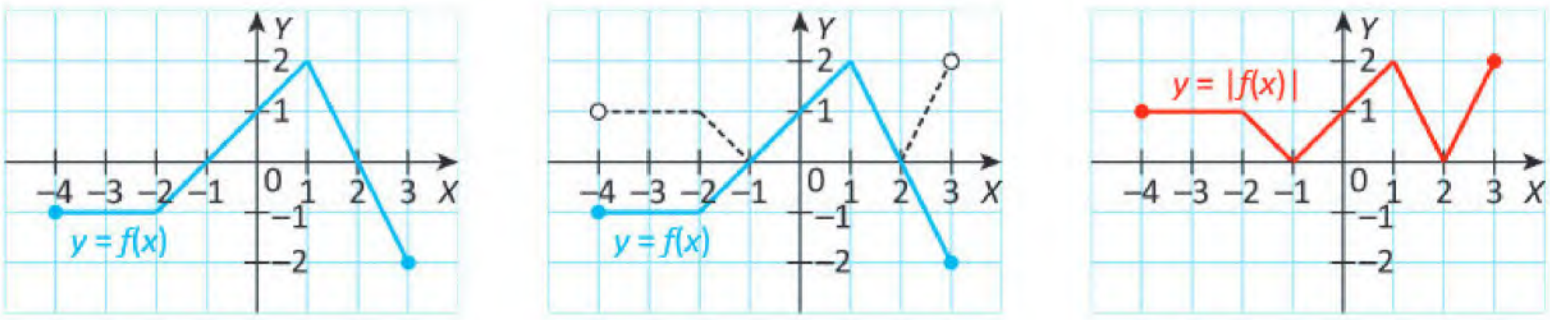
Stwierdzenie:

jeśli $f(x) < 0$, to $|f(x)| = -f(x)$

oznacza, że dla wszystkich argumentów x, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne, wykres funkcji $y = |f(x)|$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = -f(x)$, czyli z odbiciem symetrycznym wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

Aby z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, wystarczy:
1) tę część wykresu, która leży nad osią OX lub na niej, pozostawić bez zmian,
2) tę część wykresu, która leży poniżej osi OX, przekształcić przez symetrię osiową względem osi OX.

Oto etapy takiego przekształcenia:



Funkcje $y = f(x)$ oraz $y = |f(x)|$ mają takie same dziedziny.

Wykres funkcji $y = f(|x|)$

Przykład 2.

Funkcję $y = f(x)$ opisuje tabelka obok. Wykonamy tabelkę, opisującą wykres funkcji $y = f(|x|)$.

x	-2	-1	0	1	3	5
$f(x)$	4	-2	3	0	-5	-9

Zauważ, że wszystkie nieujemne argumenty funkcji $y = f(x)$ należą również do dziedziny funkcji $y = f(|x|)$ i obie funkcje przyjmują dla tych samych argumentów równe wartości:

$f(|0|) = f(0) = 3$, $f(|1|) = f(1) = 0$, $f(|3|) = f(3) = -5$,
$f(|5|) = f(5) = -9$.

Do dziedziny funkcji $y = f(|x|)$ należą również **liczby przeciwne** do wszystkich dodatnich argumentów funkcji $y = f(x)$. Wówczas mamy:

$f(|-1|) = f(1) = 0$, $f(|-3|) = f(3) = -5$, $f(|-5|) = f(5) = -9$.

Natomiast liczba -2 należąca do dziedziny funkcji $y = f(x)$, nie należy do dziedziny funkcji $y = f(|x|)$, bo liczba 2 nie jest argumentem funkcji f.

Ostatecznie tabela opisująca funkcję $y = f(|x|)$ jest następująca:

x	-5	-3	-1	0	1	3	5
$f(\|x\|)$	-9	-5	0	3	0	-5	-9

Powiemy teraz jak, mając wykres funkcji $y=f(x)$, otrzymać wykres funkcji $y=f(|x|)$. Odwołajmy się jeszcze raz do definicji wartości bezwzględnej. Mamy:

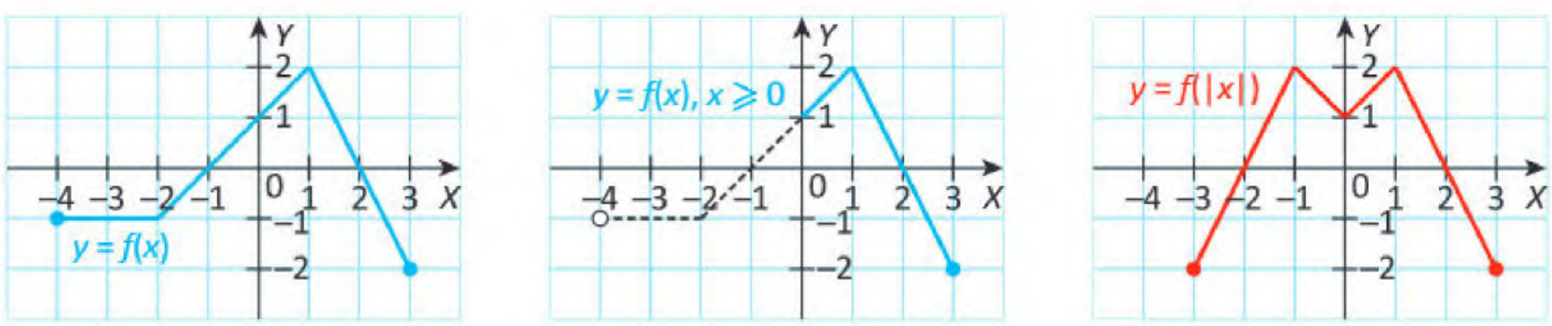
$$f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{jeśli } x \geqslant 0 \\ f(-x), & \text{jeśli } x < 0 \end{cases}$$

Stwierdzenie:
jeśli $x \geqslant 0$, to $f(|x|)=f(x)$
oznacza, że dla wszystkich argumentów nieujemnych wykresy funkcji $y=f(|x|)$ oraz $y=f(x)$ się pokrywają.

Stwierdzenie:
jeśli $x<0$, to $f(|x|)=f(-x)$
oznacza, że dla wszystkich argumentów ujemnych wykres funkcji $y=f(|x|)$ pokrywa się z wykresem funkcji $y=f(-x)$, czyli z odbiciem symetrycznym wykresu funkcji $y=f(x)$, gdzie $x>0$ względem osi OY.

Aby z wykresu funkcji $y=f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y=f(|x|)$, wystarczy:
1) tę część wykresu funkcji $y=f(x)$, która odpowiada argumentom nieujemnym, pozostawić bez zmiany,
2) otrzymaną w punkcie 1) część wykresu odbić symetrycznie względem osi OY,
3) wyznaczyć zbiór będący sumą wykresów znalezionych w punkcie 1) i 2).

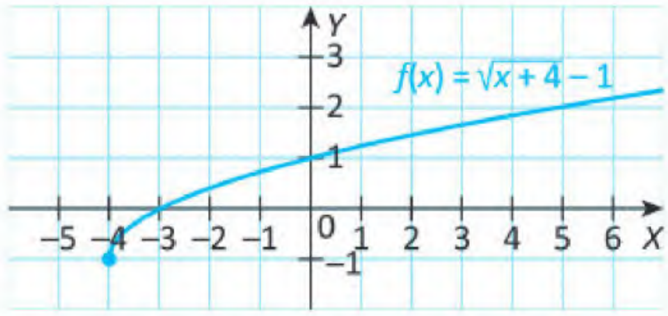
Oto etapy takiego przekształcenia:



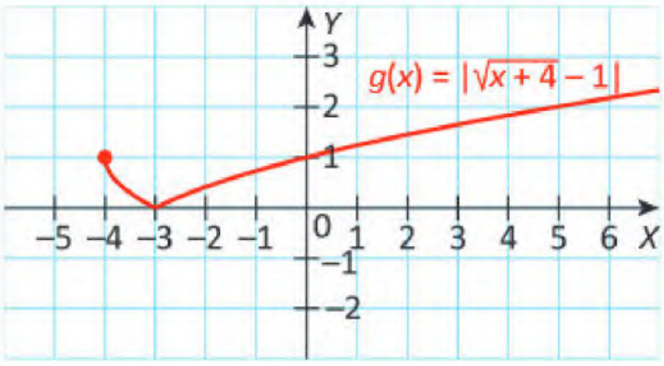
Zauważ, że:
- dziedziny funkcji $y = f(x)$ i $y = f(|x|)$ mogą się różnić,
- funkcja $y = f(|x|)$ jest funkcją parzystą.

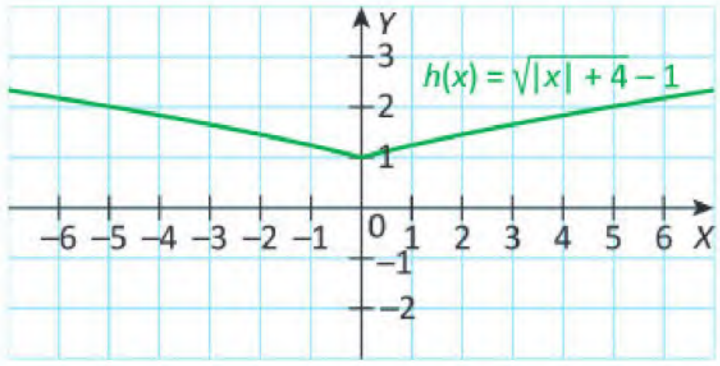
Przykład 3.

Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$, gdzie $x \geqslant -4$. Naszkicujemy wykresy funkcji $g(x) = |f(x)|$ oraz $h(x) = f(|x|)$.



Oto wykresy funkcji g i h:

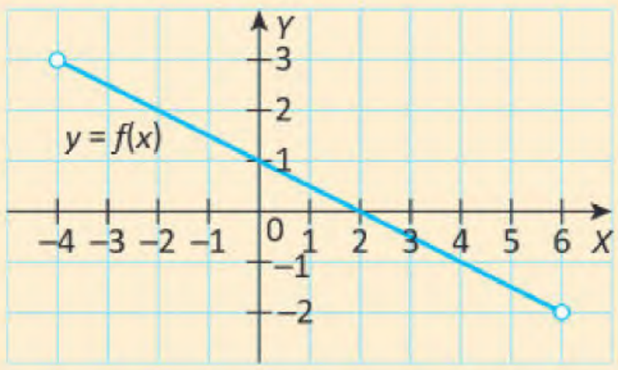




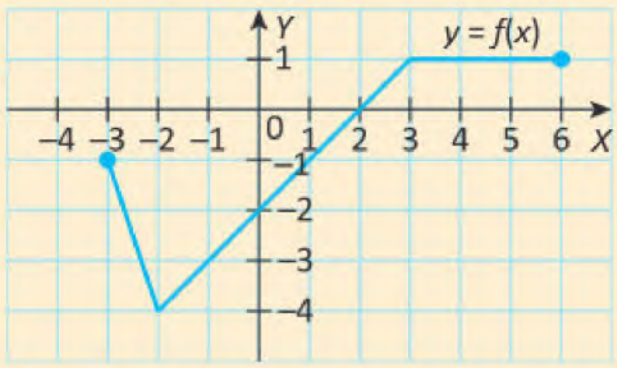
Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Dany jest wykres funkcji f. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji:
   a) $y = |f(x)|$,
   b) $y = f(|x|)$.
   Podaj dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.



2. Dany jest wykres funkcji f. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji:
   a) $y = |f(x)|$,
   b) $y = f(|x|)$.
   Podaj dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.



3. Dziedziną pewnej funkcji f jest przedział $\langle -2, 5)$. Podaj dziedzinę funkcji:
   a) $g(x) = |f(x)|$ b) $h(x) = f(|x|)$.
4. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = 4 - 2x$ naszkicuj w osobnych układach współrzędnych wykresy funkcji: $g(x) = 4 - 2|x|$ oraz $h(x) = |4 - 2x|$. Dla jakich argumentów wykresy funkcji g i h się pokrywają?
5. Wyznacz dziedziny funkcji $g(x) = |\sqrt{x} - 2|$ oraz $h(x) = \sqrt{|x|} - 2$, a następnie naszkicuj ich wykresy w osobnych układach współrzędnych. Dla jakich argumentów wykresy funkcji g i h się pokrywają?
6. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |x + 5|$, korzystając z wykresu funkcji:
   a) $f(x) = x + 5$ b) $f(x) = |x|$.

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ oraz $y = f(k \cdot x)$, gdzie $k \neq 0$

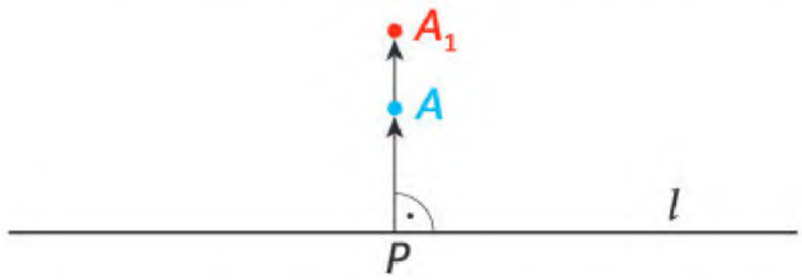
Wykresy funkcji $y = k \cdot f(x)$ oraz $y = f(k \cdot x)$ otrzymuje się z wykresu funkcji $y = f(x)$ po zastosowaniu przekształcenia, zwanego powinowactwem prostokątnym.

Definicja 1.

Powinowactwem prostokątnym o osi l i skali k, $k \neq 0$, nazywamy przekształcenie geometryczne, w którym obrazem dowolnego punktu A jest taki punkt A_1, że

pr. $AA_1 \perp l$ oraz $\overrightarrow{PA_1} = k \cdot \overrightarrow{PA}$

gdzie P jest punktem wspólnym prostej AA_1 i prostej l.



$$\overrightarrow{PA_1} = k \cdot \overrightarrow{PA}$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

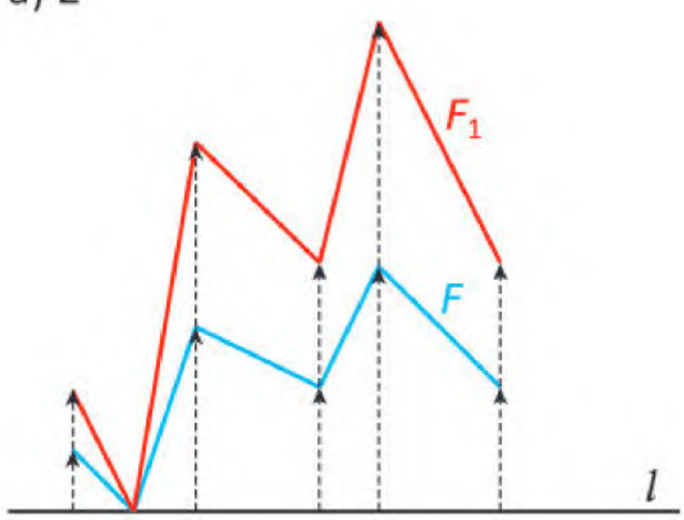
Twierdzenie 1.

W powinowactwie prostokątnym obrazem prostej jest prosta.

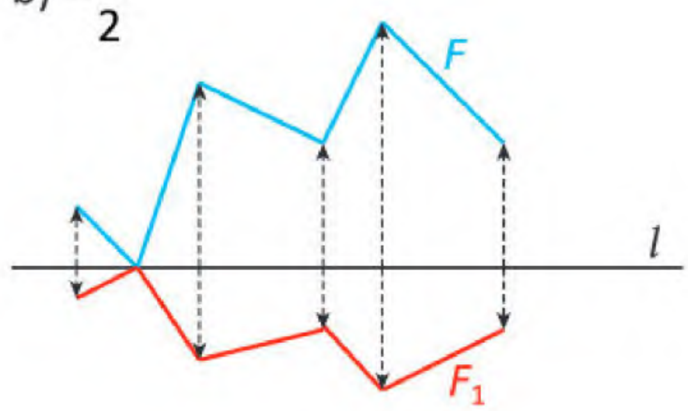
Przykład 1.

Rysunek poniżej przedstawia figurę F i jej obraz F_1 w powinowactwie prostokątnym o osi l i skali:

a) 2



b) $-\frac{1}{2}$



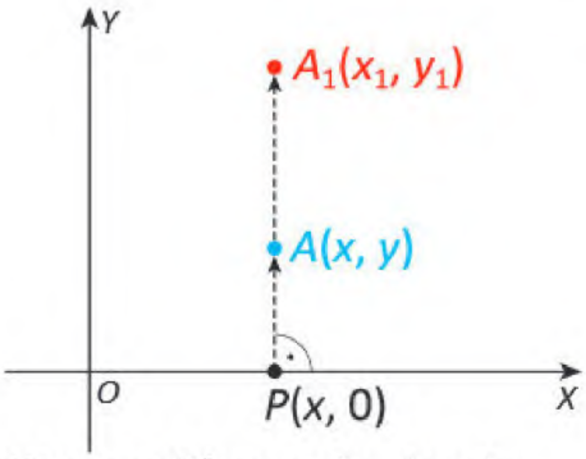
Potocznie możemy powiedzieć, że powinowactwo prostokątne o skali większej od 1 lub mniejszej od -1 „rozciąga" figury, a o skali z przedziału $(-1, 1)$ – „ściska" figury. Dodatkowo – w przypadku skali ujemnej – powinowactwo prostokątne „odwraca" figury.

Ćwiczenie 1. Narysuj w zeszycie łamaną składającą się z trzech odcinków i prostą l, mającą dwa punkty wspólne z tą łamaną. Następnie wyznacz obraz tej łamanej w powinowactwie prostokątnym o osi l i skali: a) -2 b) $\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2. Jakim przekształceniem jest powinowactwo prostokątne o skali 1, a jakim – o skali (-1)?

Powinowactwo prostokątne o osi OX

Rozważmy prostokątny układ współrzędnych, a w nim punkt $A(x, y)$ oraz punkt $P(x, 0)$. Niech punkt $A_1(x_1, y_1)$ będzie obrazem punktu A w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali k, $k \neq 0$.



Wiemy, że wówczas:

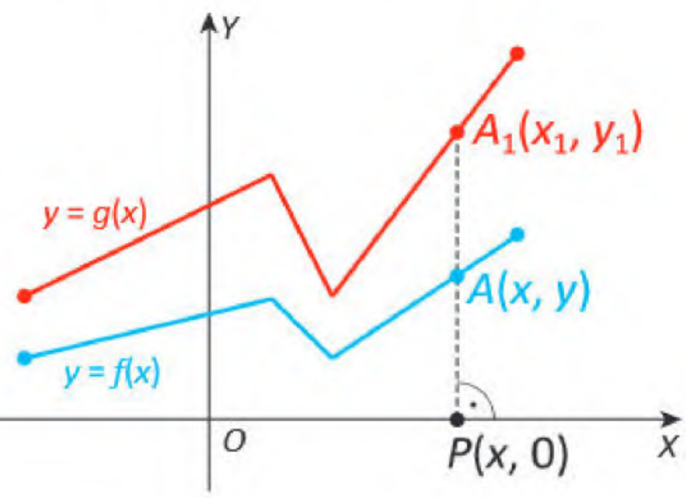
$$\overrightarrow{PA_1} = k \cdot \overrightarrow{PA} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{PA} \perp OX$$
$$[x_1 - x, y_1] = k \cdot [0, y]$$
$$[x_1 - x, y_1] = [0, k \cdot y] \quad \text{zatem}$$
$$x_1 - x = 0 \ \wedge \ y_1 = k \cdot y$$
$$x_1 = x \ \wedge \ y_1 = k \cdot y$$

Otrzymaliśmy twierdzenie:

Twierdzenie 2.
W prostokątnym układzie współrzędnych obrazem punktu $A(x, y)$ w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali k, $k \neq 0$, jest punkt $A_1(x, k \cdot y)$.

Ćwiczenie 3. W układzie współrzędnych narysuj trójkąt ABC, w którym $A(-3, -2)$, $B(6, 0)$, $C(1, 4)$. Wyznacz obraz tego trójkąta w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali: a) $\frac{1}{4}$, b) $-\frac{3}{2}$.

Rozpatrzmy wykres funkcji $y = f(x)$. Wykres ten przekształcono przez powinowactwo prostokątne o osi OX i skali k. Ustalimy wzór funkcji g, której wykres otrzymaliśmy.



Na wykresie funkcji f wybieramy dowolny punkt $A(x, y)$. Jego obrazem we wskazanym powinowactwie jest punkt $A_1(x_1, y_1)$. Między współrzędnymi punktów A i A_1 zachodzą następujące zależności:

$$x_1 = x \ \wedge \ y_1 = k \cdot y, \ \text{czyli}$$
$$x = x_1 \ \wedge \ y = \frac{1}{k} \cdot y_1.$$

Po podstawieniu w miejsce x i y wyznaczonych wielkości do wzoru funkcji $y = f(x)$, otrzymujemy:

$\frac{1}{k} \cdot y_1 = f(x_1)$, stąd

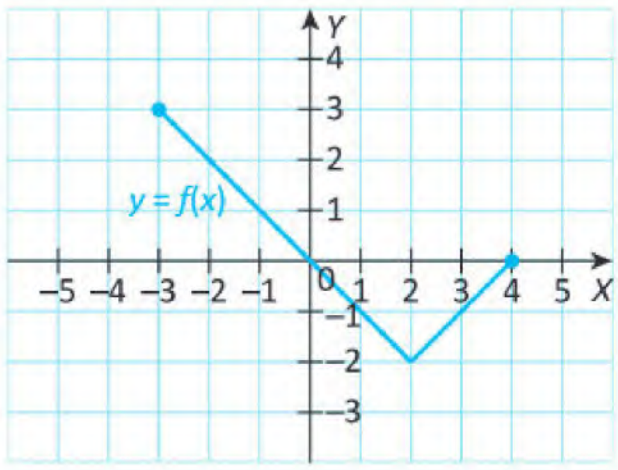
$y_1 = k \cdot f(x_1)$.

Zatem możemy zapisać: $g(x) = k \cdot f(x)$.

Twierdzenie 3.
Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcimy przez powinowactwo prostokątne o osi OX i skali k, $k \neq 0$, to otrzymamy wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$.

Przykład 2.

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.

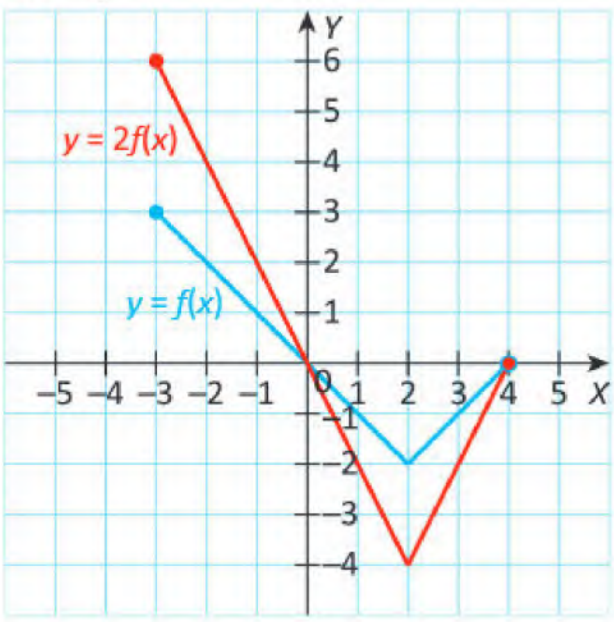


Naszkicujemy wykresy funkcji:

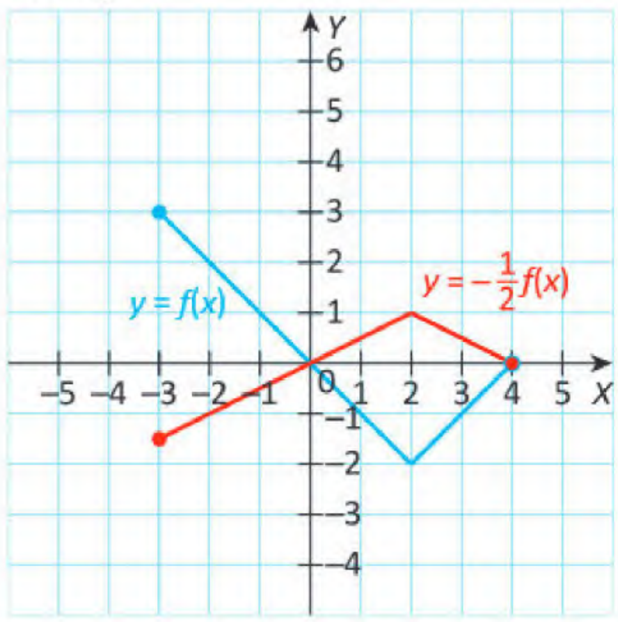
a) $y = 2 \cdot f(x)$

b) $y = -\frac{1}{2} \cdot f(x)$.

Ad a)



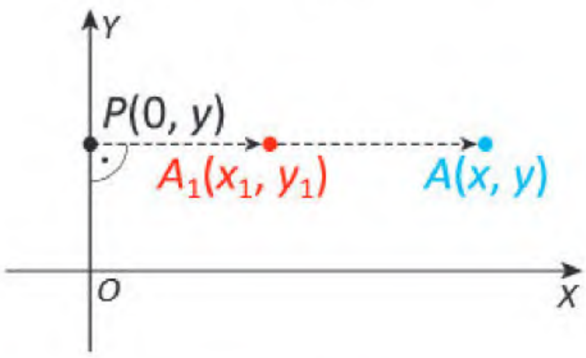
Ad b)



Ćwiczenie 4. Porównaj zbiór wartości funkcji f z przykładu 2. ze zbiorem wartości otrzymanych funkcji. Jakie są miejsca zerowe tych funkcji? Jaka jest wartość najmniejsza, a jaka największa każdej funkcji, i dla jakiego argumentu są one przyjmowane?

Powinowactwo prostokątne o osi *OY*

Rozważmy prostokątny układ współrzędnych, a w nim punkty: $A(x, y)$ oraz $P(0, y)$. Niech punkt $A_1(x_1, y_1)$ będzie obrazem punktu A w powinowactwie prostokątnym o osi OY i skali $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$.



Postępując analogicznie jak w przypadku powinowactwa prostokątnego o osi OX można wykazać, że:

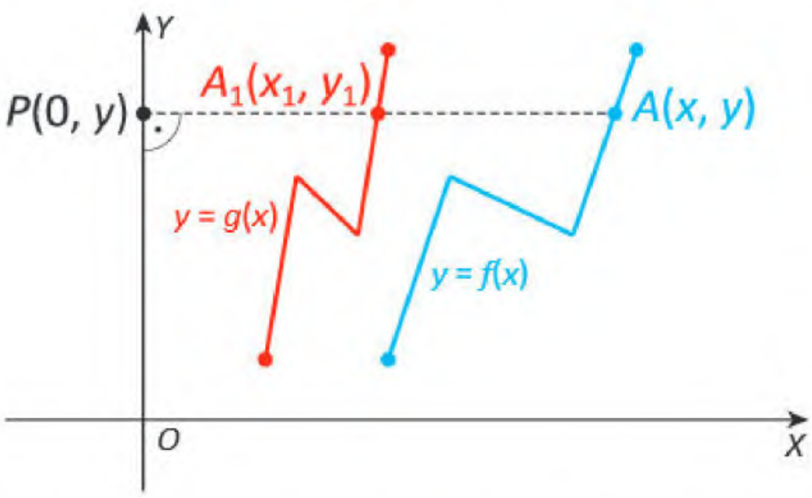
$$x_1 = \frac{1}{k} \cdot x \quad \wedge \quad y_1 = y.$$

Twierdzenie 4.
W prostokątnym układzie współrzędnych obrazem punktu $A(x, y)$ w powinowactwie prostokątnym o osi OY i skali $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$, jest punkt $A_1\left(\frac{1}{k} \cdot x, y\right)$.

Ćwiczenie 5. W układzie współrzędnych narysuj kwadrat $ABCD$, w którym $A(6, 2)$, $B(8, 4)$, $C(6, 6)$, $D(4, 4)$. Wyznacz obraz tego kwadratu w powinowactwie prostokątnym o osi OY i skali: a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{3}{2}$.

Załóżmy teraz, że dany wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcono przez powinowactwo prostokątne o osi OY i skali $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$. Wyznaczymy wzór funkcji g, której wykres otrzymaliśmy.

Na wykresie funkcji f wybieramy dowolny punkt $A(x, y)$.



Punkt $A_1(x_1, y_1)$ jest obrazem punktu A w omawianym przekształceniu.

Między współrzędnymi punktów A i A_1 zachodzą następujące zależności:

$$x_1 = \frac{1}{k} \cdot x \quad \wedge \quad y_1 = y, \text{ czyli}$$
$$x = k \cdot x_1 \quad \wedge \quad y = y_1$$

Po podstawieniu w miejsce x i y wyznaczonych wielkości do wzoru funkcji $y = f(x)$ otrzymujemy:

$y_1 = f(k \cdot x_1)$, zatem możemy zapisać

$g(x) = f(k \cdot x)$.

Twierdzenie 5.
Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcimy przez powinowactwo prostokątne o osi OY i skali $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(k \cdot x)$

Rozważmy funkcję $y = f(x)$ opisaną tabelką obok. Wykonamy tabelkę opisującą funkcję $y = g(x)$, gdzie $g(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$.

x	-1	0	2	3
$f(x)$	3	1	4	-2

Zauważ, że do dziedziny funkcji g należą takie liczby x, dla których $\frac{1}{3}x$ należy do dziedziny funkcji f. Zatem:

$$\frac{1}{3}x = -1 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{3}x = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{3}x = 2 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{3}x = 3, \quad \text{stąd}$$

$$x = -3 \quad \text{lub} \quad x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 6 \quad \text{lub} \quad x = 9$$

Dziedziną funkcji g jest zbiór: $\{-3, 0, 6, 9\}$. Obliczamy:

$$g(-3) = f\left(\frac{1}{3} \cdot (-3)\right) = f(-1) = 3 \quad \text{oraz} \quad g(0) = 1, \quad g(6) = 4, \quad g(9) = -2$$

x	-3	0	6	9
$g(x)$	3	1	4	-2

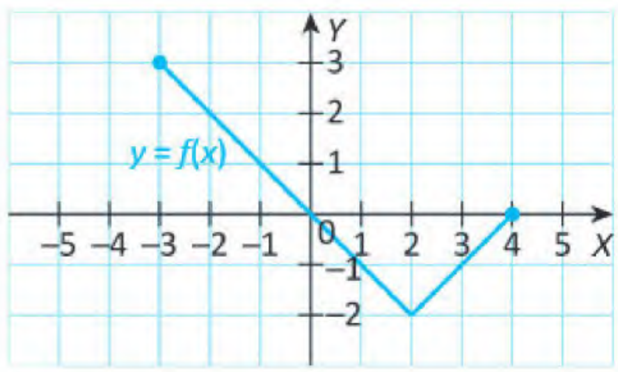
Ćwiczenie 6. Naszkicuj wykresy omówionych funkcji f i g.

Przykład 3.

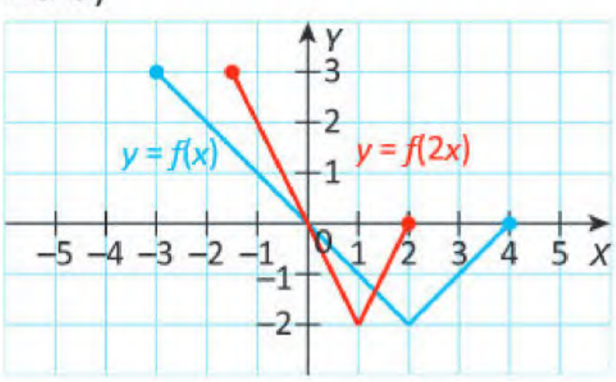
Na rysunku obok dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.
Naszkicujemy wykresy funkcji:

a) $y = f(2x)$

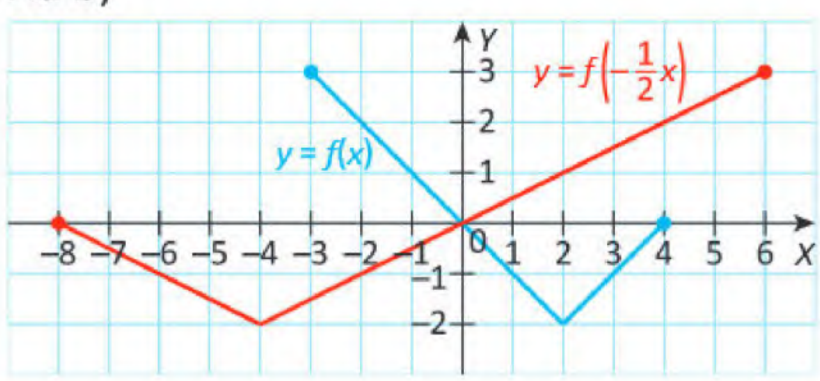
b) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$



Ad a)



Ad b)



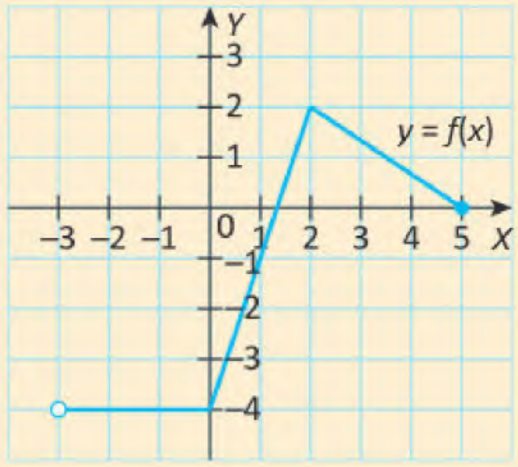
Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Funkcję f opisuje tabelka obok. Wykonaj w zeszycie tabelkę, opisującą wykres funkcji $g(x) = -3f(x)$.

x	–2	–1	0	1	3	5
$f(x)$	4	–2	3	0	–5	–9

2. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. W osobnych układach współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji:



a) $y = 2f(x)$ b) $y = \frac{1}{4}f(x)$

c) $y = -\frac{1}{2}f(x)$ d) $y = -3f(x)$.

Porównaj zbiory wartości otrzymanych funkcji.

3. Naszkicuj wykres funkcji f, korzystając z odpowiedniego powinowactwa prostokątnego.

a) $f(x) = 2\sqrt{x} + 2$ b) $f(x) = -2(x+1)^2$

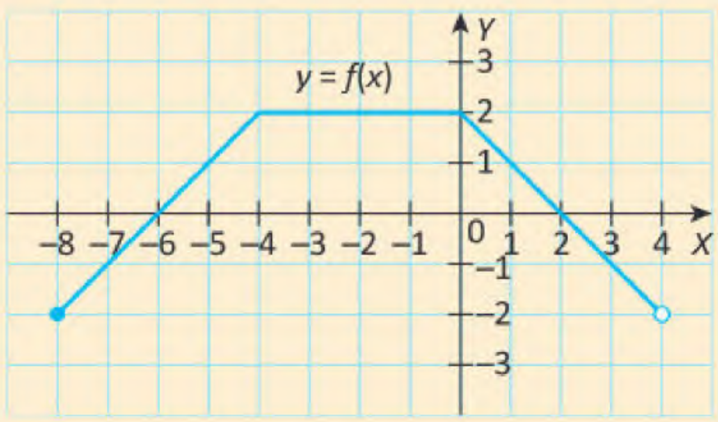
c) $f(x) = \frac{x^3}{4}$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}|x-4|$.

4. Funkcję f opisuje tabelka obok. Wykonaj w zeszycie tabelkę, opisującą wykres funkcji

x	–4	–2	0	2	6	8
$f(x)$	–3	–1	–2	0	2	4

a) $g(x) = f(2x)$ b) $h(x) = f(-0{,}5x)$.

5. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. W osobnych układach współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji:



a) $y = f(2x)$ b) $y = f(-4x)$

c) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ d) $y = f\left(\frac{4}{3}x\right)$.

Porównaj dziedziny tych funkcji.

6. Podaj dziedzinę danej funkcji, a następnie naszkicuj jej wykres:

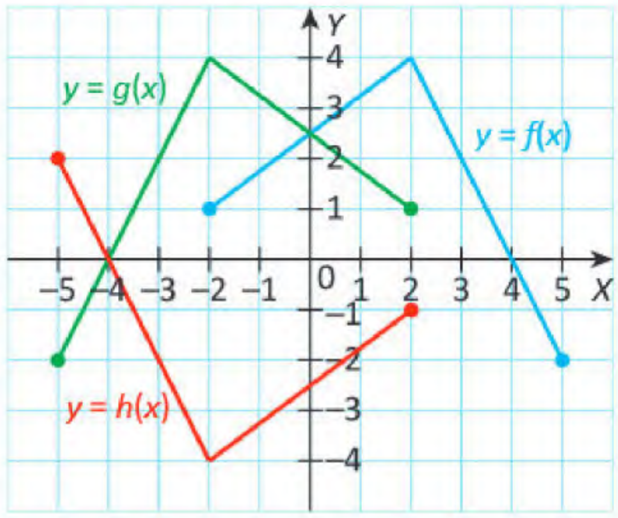
a) $y = \sqrt{-2x}$ b) $y = (2x-4)^2$ c) $y = \left(\frac{-1}{3}x\right)^2$ d) $y = \sqrt{\frac{x}{2}+2}$.

7. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe: 4 oraz –12. Podaj miejsca zerowe funkcji:

a) $y = f(2x)$ b) $y = -3f(x)$ c) $y = f(0{,}5x)$ d) $y = 4f(-3x)$.

Szkicowanie wykresów wybranych funkcji

Dany wykres funkcji f przekształcimy przez symetrię osiową względem osi OY. Wówczas otrzymamy wykres nowej funkcji; oznaczmy ją jako g. Następnie wykres funkcji g przekształcimy przez symetrię osiową względem osi OX i otrzymamy wykres trzeciej funkcji, h (zobacz rysunek poniżej).



Powiemy, że wykres funkcji h powstał z wykresu funkcji f w wyniku połączenia dwóch przekształceń. Czy można wzór funkcji h wyrazić za pomocą wzoru funkcji f? Okazuje się, że tak. Funkcję g można opisać wzorem

$$g(x) = f(-x)$$

Natomiast wzór funkcji h możemy zapisać za pomocą wzoru funkcji g:

$$h(x) = -g(x)$$

W takim razie

$$h(x) = -g(x) = -f(-x)$$

Funkcję h można opisać wzorem $y = -f(-x)$.

Zauważ, że połączenie dwóch symetrii osiowych: jednej względem osi OX, a drugiej względem osi OY, możemy zastąpić jednym przekształceniem – symetrią środkową względem punktu $O(0, 0)$.

W kolejnych przykładach nauczymy się szkicować wykresy funkcji, które otrzymamy po wykonaniu kilku znanych Ci przekształceń.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykres funkcji $y = \sqrt{-x+3} + 2$, przekształcając odpowiednio wykres funkcji $y = \sqrt{x}$.

<u>I sposób</u>

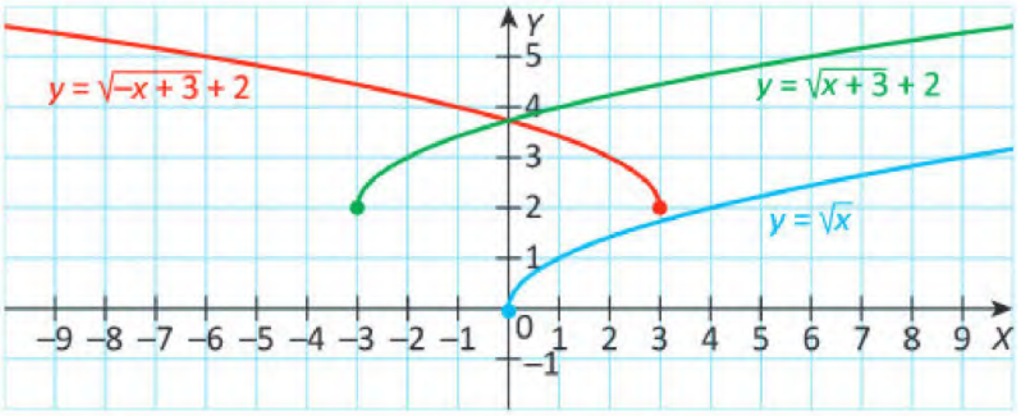
Szkicujemy wykres funkcji

$$y = \sqrt{x}$$

a następnie wykresy

$y = \sqrt{x+3} + 2$ przesunięcie równoległe o wektor [–3, 2]

$y = \sqrt{-x+3} + 2$ symetria osiowa względem osi OY



II sposób

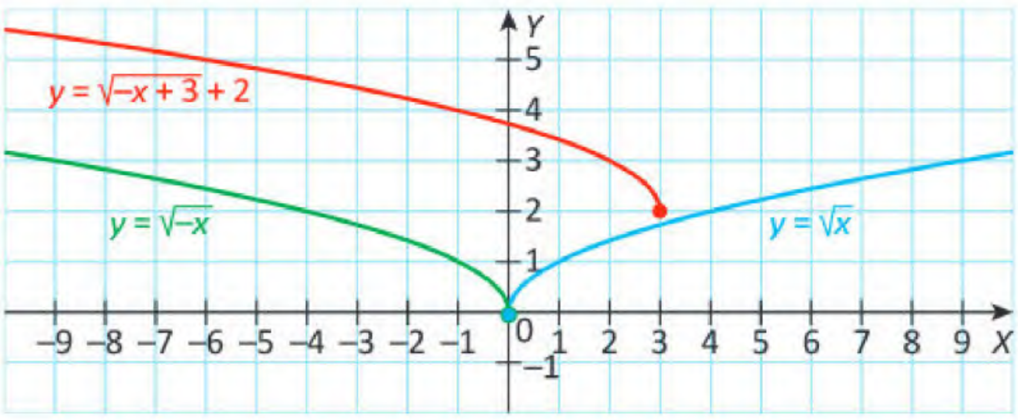
Szkicujemy wykres funkcji

$y = \sqrt{x}$

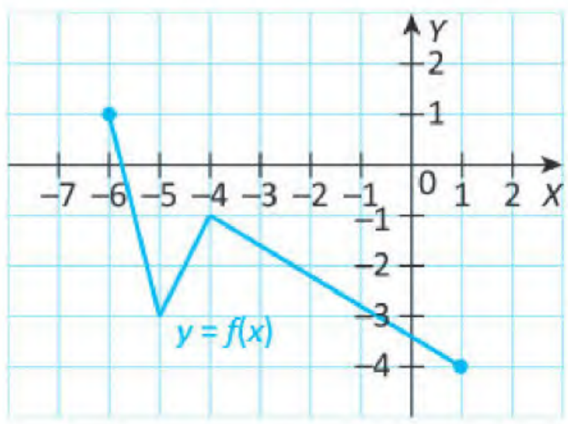
a następnie wykresy

$y = \sqrt{-x}$ symetria osiowa względem osi OY

$y = \sqrt{-(x-3)} + 2$ przesunięcie równoległe o wektor [3, 2]



Ćwiczenie 1. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Przerysuj go do zeszytu, a następnie naszkicuj – dwoma sposobami przedstawionymi w przykładzie 1. – wykres funkcji $y = f(-x-2) + 3$.



Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 2\left||x| - 3\right| - 2$.

I sposób

Zauważamy, że funkcja f jest parzysta, bowiem dziedziną tej funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R}$ oraz dla dowolnego argumentu x należącego do dziedziny spełniony jest warunek:

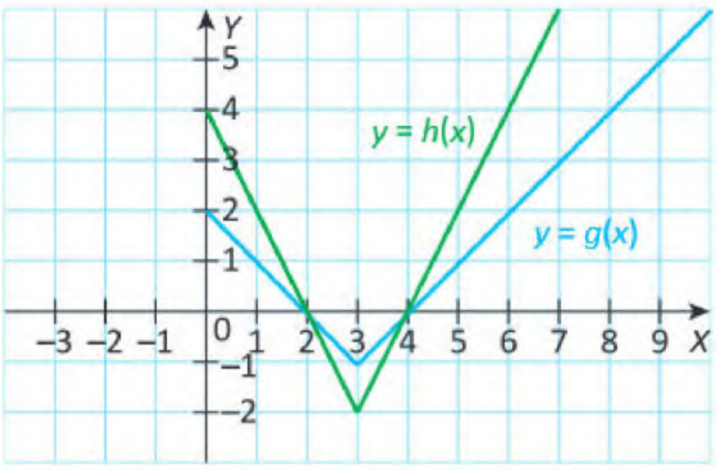
$f(x) = f(-x)$

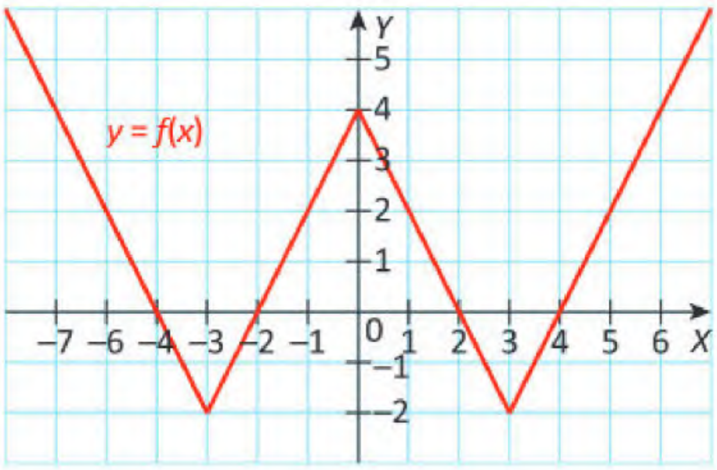
Zapewne pamiętasz, że wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY.

Możemy więc w pierwszej kolejności naszkicować wykres tej funkcji w przedziale $\langle 0, +\infty)$; pozostałą część wykresu otrzymamy poprzez przekształcenie już naszkicowanej części przez symetrię względem osi OY.

W przedziale $\langle 0, +\infty)$ funkcja f przyjmuje dla poszczególnych argumentów wartości, które można obliczyć ze wzoru $y = 2|x-3| - 2$. Po wyłączeniu liczby 2 poza nawias otrzymujemy:

$y = 2(|x-3| - 1)$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty)$





1) Szkicujemy najpierw wykres funkcji $g(x) = |x-3| - 1$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty)$.

2) Następnie, korzystając z powinowactwa prostokątnego, szkicujemy wykres funkcji
$h(x) = 2g(x)$, czyli
$h(x) = 2(|x-3| - 1)$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty)$.

3) Wykres funkcji h przekształcamy w symetrii względem osi OY. Powstały obraz wraz z wykresem funkcji h tworzy wykres funkcji f.

<u>II sposób</u>

Korzystamy z wykresu funkcji $y = |x|$. Kolejno szkicujemy wykresy funkcji:

1) $g(x) = |x| - 3$ — translacja wykresu funkcji $y = |x|$ o wektor $[0, -3]$
2) $h(x) = ||x| - 3|$ — $h(x) = |g(x)|$
3) $k(x) = 2||x| - 3|$ — powinowactwo prostokątne o osi OX
4) $f(x) = 2||x| - 3| - 2$ — translacja wykresu funkcji k o wektor $[0, -2]$

Wykonaj odpowiednie rysunki i porównaj wykresy funkcji f otrzymane dwiema metodami.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Wykres funkcji $f(x) = x^2$:
   a) najpierw przesuń równolegle o wektor $[3, 1]$; następnie otrzymany wykres przekształć przez symetrię osiową względem osi OX,
   b) najpierw przekształć przez symetrię osiową względem osi OX; następnie otrzymany wykres przesuń równolegle o wektor $[3, 1]$,
   c) najpierw przesuń równolegle o wektor $[3, 1]$; następnie otrzymany wykres przekształć przez symetrię osiową względem osi OY.

d) najpierw przekształć przez symetrię osiową względem osi OY; następnie otrzymany wykres przesuń równolegle o wektor $[3, 1]$.

Podaj wzór otrzymanej funkcji.

2. Wykres funkcji $f(x) = |x|$:
   a) przekształć przez symetrię osiową względem osi OX, a następnie otrzymany wykres przesuń równolegle o wektor $[-4, 3]$,
   b) przesuń równolegle o wektor $[-4, 3]$, a następnie otrzymany wykres przekształć przez symetrię osiową względem osi OX.

   Podaj wzór otrzymanej funkcji.

3. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$:
   a) przekształć przez symetrię osiową względem osi OY, a następnie otrzymany wykres przesuń równolegle o wektor $[5, 0]$,
   b) przesuń równolegle o wektor $[5, 0]$, a następnie otrzymany wykres przekształć przez symetrię osiową względem osi OY.

   Podaj wzór otrzymanej funkcji.

4. Naszkicuj wykres funkcji:

   a) $y = \frac{-3}{x+3} - 1$ b) $y = -(x-2)^3 + 1$ c) $y = \sqrt{2-x} - 4$.

5. Na podstawie wykresu funkcji:
   a) $y = (x-4)^2 - 1$ naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |(x-4)^2 - 1|$
   b) $y = x^2 - 4$ naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |x^2 - 4|$, a następnie wykres funkcji $h(x) = |x^2 - 4| - 1$
   c) $y = (x+1)^2$ naszkicuj wykres funkcji $k(x) = (|x| + 1)^2$.

6. Naszkicuj wykres funkcji:

   a) $y = \left|\sqrt{x+1} - 2\right|$ b) $y = \sqrt{|x|+4} - 5$ c) $y = -\sqrt{|x|} + 3$.

7. Naszkicuj wykres funkcji:

   a) $y = \frac{2}{|x-1|} - 4$ b) $y = \left|\frac{1}{x} - 3\right| - 6$ c) $y = \left|\frac{1}{-x+3}\right| + 1$.

8. Naszkicuj wykresy funkcji:
   a) $g(x) = ||x-1| - 2|$ b) $g(x) = |-|x| + 4| + 2$
   c) $g(x) = |5 - |x|| + 2$ d) $g(x) = 4 - ||x+2| - 3|$.

9. Naszkicuj wykres funkcji:

   a) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ b) $y = (2x+2)^2$ c) $y = -\sqrt{2x+4}$

   d) $y = -2\sqrt{|x|-1}$ e) $y = \frac{1}{3}(|x| - 3)^2$ f) $y = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|^3$.

Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności

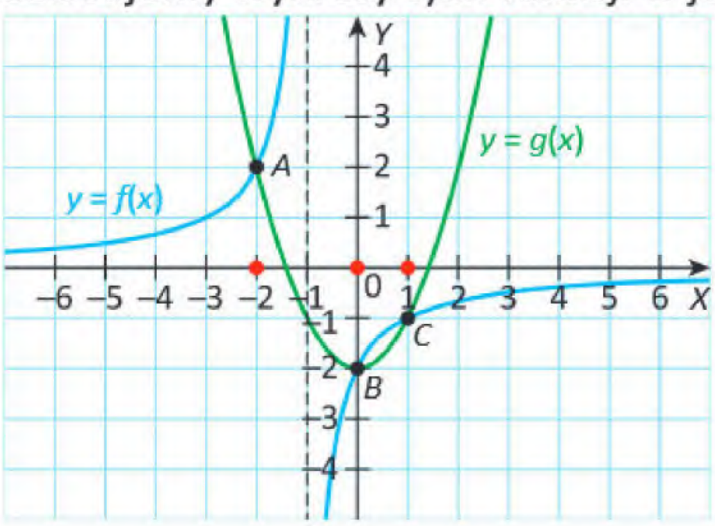
Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $\frac{-2}{x+1} = x^2 - 2$, korzystając z odpowiednich wykresów funkcji.

Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-1\}$.

Rozważmy dwie funkcje $f(x) = \frac{-2}{x+1}$ oraz $g(x) = x^2 - 2$. Rozwiązaniami równania są liczby należące do zbioru $\boldsymbol{R} - \{-1\}$, dla których funkcje f oraz g przyjmują tę samą wartość.

Szkicujemy wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych.



Wykres funkcji f powstaje po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y = \frac{-2}{x}$ o wektor $[-1, 0]$. Wykres funkcji g powstaje po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y = x^2$ o wektor $[0, -2]$.

Odczytujemy punkty wspólne obu wykresów:

$A(-2, 2), \quad B(0, -2), \quad C(1, -1).$

Pierwsze współrzędne tych punktów są rozwiązaniami naszego równania.
Poprawność odczytu sprawdzamy, wykonując następujące obliczenia:

- $x = -2$, wtedy $\quad L = \frac{-2}{-2+1} = \frac{-2}{-1} = 2; \quad P = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2; \quad L = P.$
- $x = 0$, wtedy $\quad L = \frac{-2}{0+1} = \frac{-2}{1} = -2; \quad P = 0^2 - 2 = 0 - 2 = -2; \quad L = P.$
- $x = 1$, wtedy $\quad L = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1; \quad P = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1; \quad L = P.$

Rozwiązaniami równania są trzy liczby: −2, 0, 1.

Ćwiczenie 1. Na podstawie wykresów funkcji f oraz g z przykładu 1. rozwiąż równania:

a) $\frac{-2}{x+1} = 1$ b) $x^2 - 2 = -1$ c) $\frac{-2}{x+1} = -x - 2$

UWAGA: Rozwiązywanie równań i nierówności z wykorzystaniem wykresów funkcji wymaga szczególnej staranności przy szkicowaniu wykresów. Na ogół zastosowanie opisanej metody rozwiązywania równań i nierówności prowadzić będzie do wyznaczenia rozwiązań przybliżonych – niezależnie od stopnia dokładności wykonania wykresów.

Przykład 2.

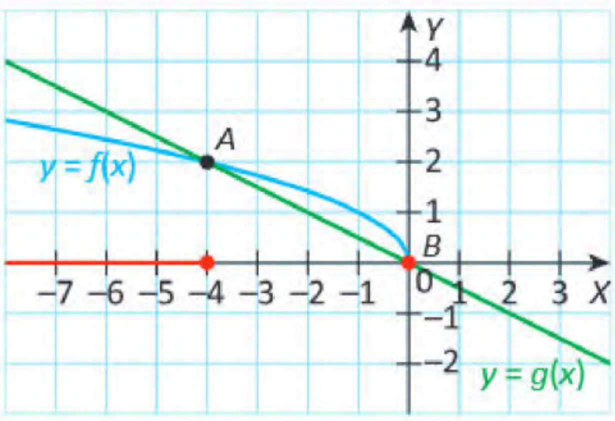
Rozwiążemy nierówność: $\sqrt{-x} \leqslant \frac{-1}{2}x$, korzystając z odpowiednich wykresów funkcji.

Dziedziną nierówności jest przedział $(-\infty, 0\rangle$. Rozważamy dwie funkcje:

$$f(x) = \sqrt{-x} \text{ oraz } g(x) = \frac{-1}{2}x.$$

Rozwiązaniami nierówności są liczby należące do przedziału $(-\infty, 0\rangle$, dla których funkcja f przyjmuje mniejsze wartości niż funkcja g, oraz te liczby, dla których funkcje f i g przyjmują tę samą wartość.

Wykres funkcji f powstaje po przekształceniu wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$ przez symetrię osiową względem osi OY. Wykresem funkcji g jest prosta.



Wykresy funkcji f i g mają dwa punkty wspólne:

$A(-4, 2)$ i $B(0, 0)$.

Zatem:

$$\sqrt{-x} = \frac{-1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad (x = -4 \text{ lub } x = 0)$$

Sprawdź poprawność odczytu.

Zauważ teraz, że wykres funkcji f znajduje się poniżej wykresu funkcji g tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -4)$. Wówczas $\sqrt{-x} < \frac{-1}{2}x$. Zapisujemy:

$$\sqrt{-x} < \frac{-1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -4).$$

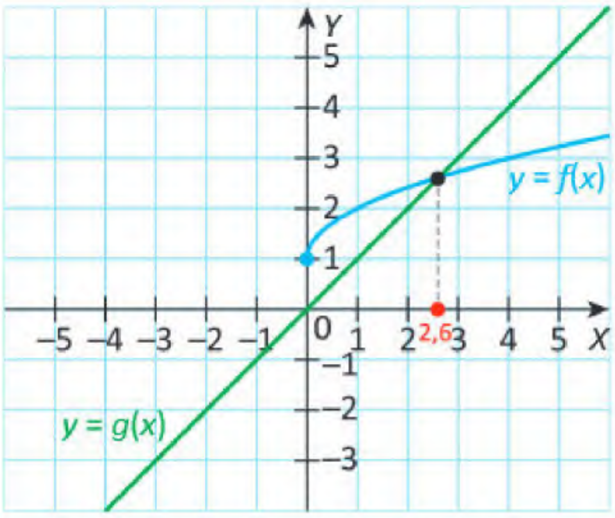
Ostatecznie, nierówność $\sqrt{-x} \leqslant \frac{-1}{2}x$ jest spełniona przez wszystkie liczby należące do zbioru $(-\infty, -4\rangle \cup \{0\}$.

Ćwiczenie 2. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $\sqrt{-x} > \frac{-1}{2}x$.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{x}+1=x$, korzystając z odpowiednich wykresów funkcji.

Dziedziną równania jest przedział $\langle 0, +\infty)$.
Rozważamy funkcje: $f(x)=\sqrt{x}+1$ i $g(x)=x$.



Z rysunku odczytujemy, że wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie, którego pierwsza współrzędna jest równa ok. 2,6.

Sprawdzamy poprawność odczytu rozwiązania:

$L=\sqrt{2,6}+1\approx 2,61 \qquad P=2,6 \qquad L\approx P$

Przybliżonym rozwiązaniem równania $\sqrt{x}+1=x$ jest liczba 2,6.

Dokładnym rozwiązaniem równania $\sqrt{x}+1=x$ jest liczba $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Możemy je otrzymać, posługując się metodą algebraiczną, którą omawiamy na str. 136.

Rozwiązanie równania lub nierówności z wykorzystaniem wykresów funkcji nazywamy **rozwiązaniem graficznym**.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż dane równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji. Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny równania.

   a) $\frac{1}{x}=x^2$ b) $|x|=-x^2+2$ c) $|x+4|=\frac{-x}{3}$

   d) $x^3+1=|x+1|$ e) $\sqrt{-x}=-x^3$ f) $\frac{2}{x-3}+2=x-2.$

2. Rozwiąż daną nierówność, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji. Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny nierówności.

   a) $\sqrt{-x}\leqslant 2$ b) $\frac{1}{x+4}<1$ c) $(x+1)^2>1-x$

   d) $-x\geqslant x^3-2$ e) $\frac{4}{x}-2\leqslant 2x$ f) $2-x\geqslant-\sqrt{x}.$

3. Dane są funkcje $f(x)=\frac{-3}{x}$ oraz $g(x)=|x|$. Szkicując wykresy odpowiednich funkcji, rozwiąż nierówność: $f(x-3)<g(x)+1$.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1.

Test

1. Wektor przeciwny do wektora $[-3, 1]$ ma współrzędne:

A. $[1, -3]$ B. $[-1, 3]$ C. $[3, -1]$ D. $\left[\frac{1}{3}, -1\right]$

2. Jeśli $A(7, 6)$ i $\overrightarrow{AB} = [2, 3]$, to punkt B ma współrzędne:

A. $(5, 3)$ B. $(9, 9)$ C. $(-5, -3)$ D. $(-9, -9)$

3. Wektor $[15, -8]$ ma długość:

A. 7 B. 13 C. 17 D. 23

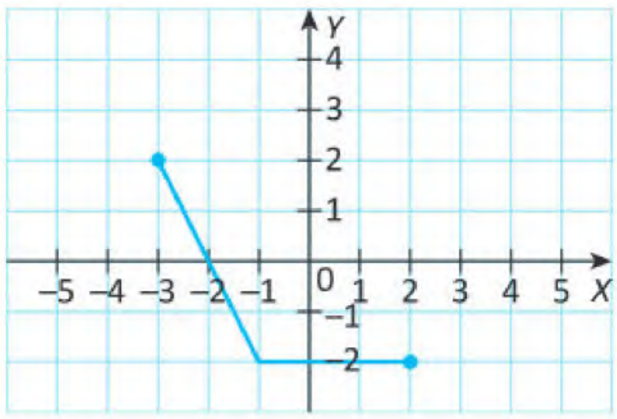
4. Środek odcinka o końcach: $A(-3, 4)$ i $B(1, 8)$ ma współrzędne:

A. $(-1, 6)$ B. $(-2, 6)$ C. $(-2, 2)$ D. $(-1, 2)$

5. Dane są trzy punkty: $A(-5, 0)$, $B(1, -3)$, $C(3, -4)$. Wówczas:

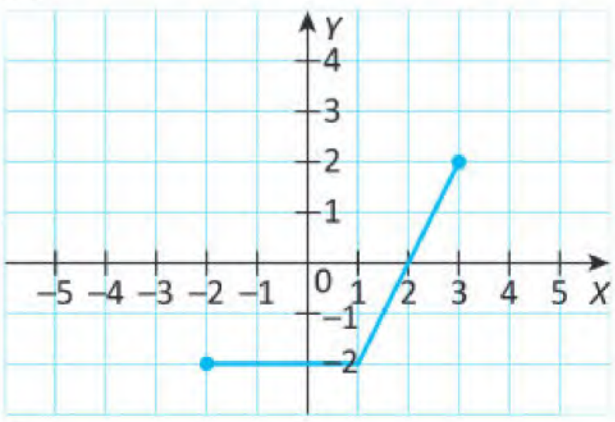
A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ B. $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$ C. $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CB}$ D. $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

6. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f.

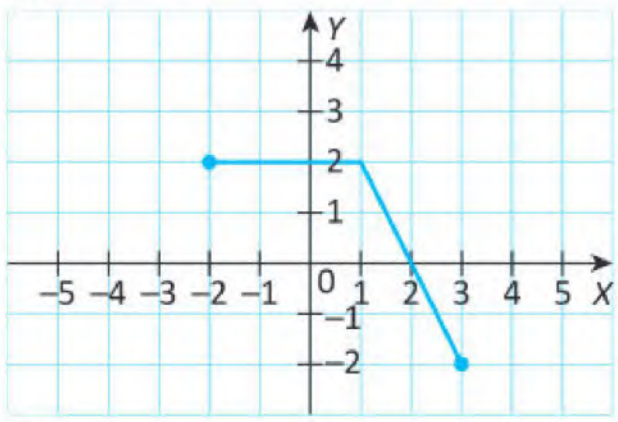


Wykres funkcji $y = -f(-x)$ znajduje się na rysunku:

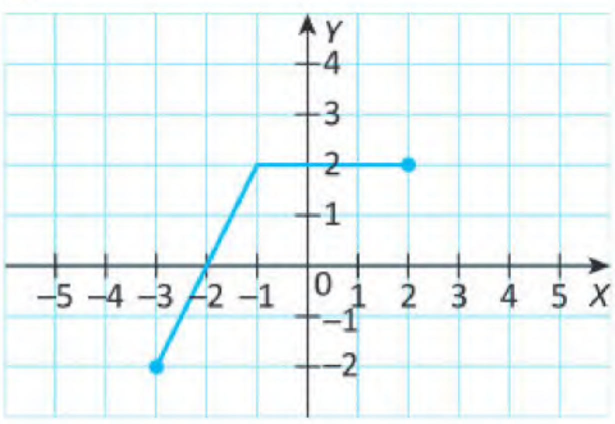
A.



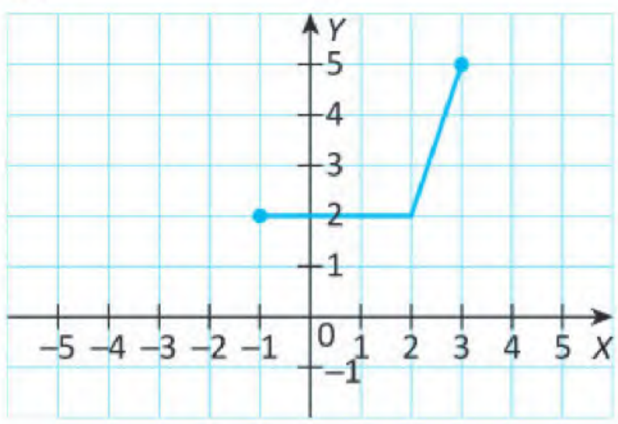
B.



C.



D.



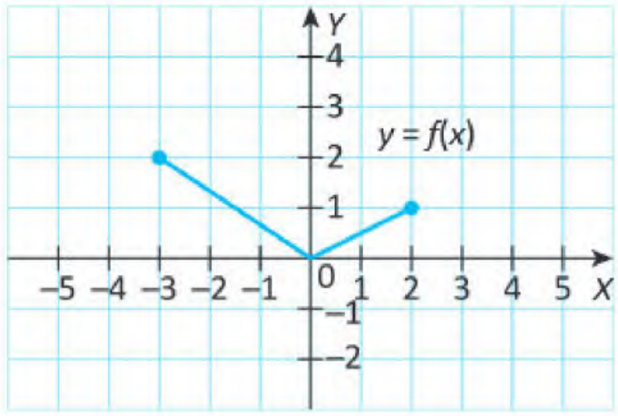
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

7. Wykres funkcji $f(x) = |x+4| - 5$ powstaje po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y = |x|$ o wektor:
A. $[-4, -5]$ B. $[4, -5]$ C. $[-4, 5]$ D. $[4, 5]$

8. Wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 2$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OX i otrzymano wykres funkcji g. Zatem:
A. $g(x) = x^2 + 2$ B. $g(x) = -x^2 - 2$ C. $g(x) = -x^2 + 2$ D. $g(x) = x^2 - 2$

9. Po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w dół otrzymujemy wykres funkcji:
A. $y = f(x+3)$ B. $y = f(x-3)$ C. $y = f(x) - 3$ D. $y = f(x) + 3$

10. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Dziedziną funkcji $y = f(x-2)$ jest przedział:
A. $\langle -5, 0\rangle$ B. $\langle -1, 4\rangle$
C. $\langle -3, 2\rangle$ D. $\langle -2, 0\rangle$



11. Wykres funkcji $y = \dfrac{3}{x-4}$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY i otrzymano wykres funkcji g. Wówczas:
A. $g(x) = \dfrac{-3}{x+4}$ B. $g(x) = \dfrac{-3}{x-4}$ C. $g(x) = \dfrac{3}{x+4}$ D. $g(x) = \dfrac{3}{x-4}$

12. Po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 3x$ o wektor $[-1, 2]$ otrzymujemy wykres funkcji:
A. $y = x^2 + 3x + 2$ B. $y = x^2 - x$ C. $y = x^2 - 3x + 3$ D. $y = x^2 - x + 2$

13. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -4, 5\rangle$. Wskaż dziedzinę funkcji $y = f(x+3)$.
A. $D = \langle -1, 8\rangle$ B. $D = \langle -8, 1\rangle$ C. $D = \langle -2, 7\rangle$ D. $D = \langle -7, 2\rangle$

14. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -8, 2\rangle$. Najmniejsza wartość funkcji $y = -f(x) + 1$ jest równa:
A. -7 B. -3 C. -1 D. 9

15. Funkcję f opisuje tabelka obok. Niech $g(x) = f(-x+1)$. Nieprawdą jest, że:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7

A. $g(1) = 4$ B. $g(-2) = 7$ C. $g(4) = 1$ D. $g(-1) = 4$.

Zadania otwarte

16. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = -|x+1| + 4$:
a) podaj współrzędne punktu przecięcia się wykresu z osią OY,
b) odczytaj miejsca zerowe funkcji f,
c) wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

17. Wykres funkcji $y = g(x)$ powstaje po przekształceniu wykresu funkcji $f(x) = \frac{-2}{x+3}$ przez symetrię osiową względem osi OY.
   a) Naszkicuj wykresy funkcji f i g w jednym układzie współrzędnych.
   b) Podaj wzór funkcji g oraz jej dziedzinę.
   c) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości większe od -1?

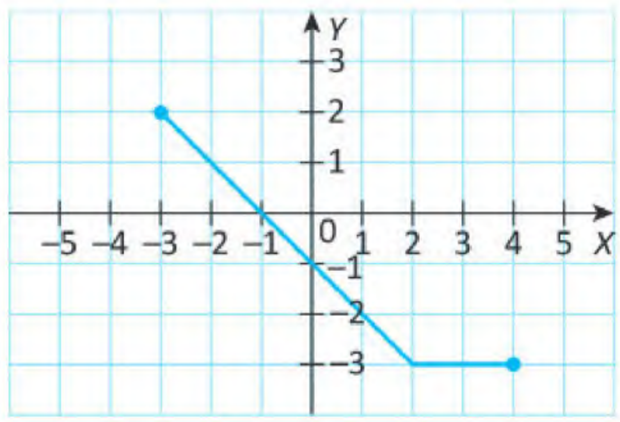
18. Wykres funkcji $y = g(x)$ powstaje po przekształceniu wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 2$ przez symetrię osiową względem osi OX.
   a) Naszkicuj wykresy funkcji f i g w jednym układzie współrzędnych.
   b) Podaj wzór funkcji g.
   c) Na podstawie wykresu funkcji g rozwiąż równanie $g(x) = 1$.

19. Wykres funkcji $y = g(x)$ powstaje po przekształceniu wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3+x}$ przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$.
   a) Naszkicuj wykresy funkcji f i g w jednym układzie współrzędnych.
   b) Podaj wzór funkcji g oraz jej dziedzinę.
   c) Rozwiąż nierówność $g(x) < 2x$.

20. Rozwiąż dane równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.
   a) $x^3 = (x-2)^2$ b) $\sqrt{-x} = |x| - 2$.

21. Rozwiąż daną nierówność, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.
   a) $\frac{1}{x+1} > x + 1$ b) $\sqrt{x+4} \leqslant \frac{x}{2} + 2$

22. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji:
   a) $y = -f(-x)$,
   b) $y = f(-x) + 3$,
   c) $y = -f(x-4) + 1$.



23. Tabela obok opisuje funkcję f. Wykonaj tabelę, opisującą wykres funkcji:
   a) $y = -f(x) + 1$,
   b) $y = f(x+8)$,
   c) $y = f(-x) + 5$.

x	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	5	4	3	2	1

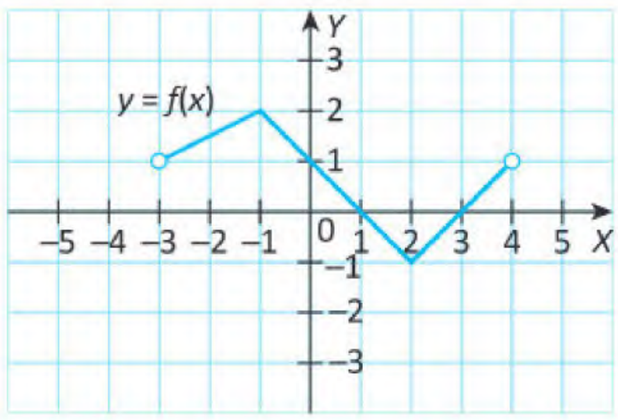
24. Funkcja f jest rosnąca, a do jej wykresu należą punkty: $(-5, 0)$ oraz $(7, 13)$. Podaj:
   a) wartość funkcji $g(x) = f(x+4) + 8$ dla argumentu 3,
   b) miejsce zerowe funkcji $h(x) = f(x-6)$,
   c) argument, dla którego funkcja $k(x) = f(x+2) - 1$ przyjmuje wartość 12.

25. Dane są punkty: $A(-2, 5)$, $B(3, 4)$, $C(-6, 8)$. Wyznacz taki punkt D, aby $-2 \cdot \overrightarrow{AC} + 3 \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$.

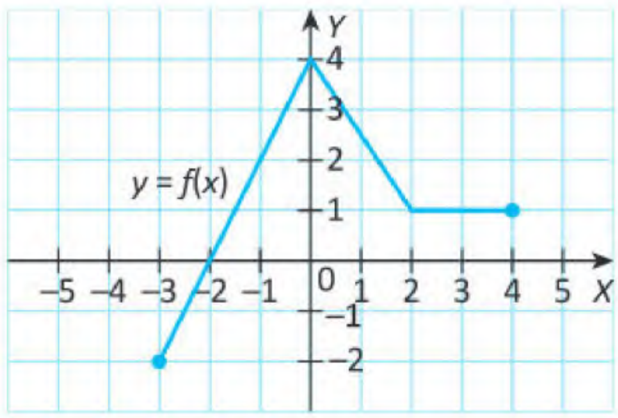
26. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$, a następnie:
   a) wykaż, że funkcja f jest różnowartościowa,
   b) oblicz miejsce zerowe funkcji f,
   c) naszkicuj wykres funkcji f,
   d) podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

27. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \dfrac{2}{|x+3|} - 1$, a następnie:
   a) naszkicuj wykres tej funkcji,
   b) odczytaj przedziały monotoniczności funkcji f,
   c) podaj miejsca zerowe funkcji f,
   d) wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

28. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji:
   a) $y = |f(1-x)|$,
   b) $y = -|f(-x)|$,
   c) $y = -2f(x) + 1$.



29. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji:
   a) $y = f(|x| + 2)$,
   b) $y = f(|x-3|)$,
   c) $y = f\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)$.



30. Rozwiąż dane równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\sqrt{|x|} = \dfrac{1}{2}|x|$ b) $||x-2|-2| = -x$.

31. Rozwiąż daną nierówność, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\sqrt{|x|+2} \geqslant \dfrac{2}{x-1}$ b) $\sqrt{2x+4} \leqslant \dfrac{1}{2}(x+2)^2$.

32. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-8, 2\rangle$, a zbiorem wartości przedział $(-\infty, 5\rangle$. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji:

a) $y = -1 + f(x-4)$ b) $y = -f(-x) + 2$

2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną i z parametrem

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Przypomnijmy pojęcie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Definicja 1.

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej x nazywamy:

- liczbę x, jeśli x jest liczbą nieujemną,
- liczbę przeciwną do x, jeśli x jest liczbą ujemną.

Zapis symboliczny:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ jeśli } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ jeśli } x < 0 \end{cases}$$

Na przykład:

$$\left|-1\frac{2}{3}\right| = 1\frac{2}{3}, \qquad |0| = 0,$$

$$\left|\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}, \qquad |1-\pi| = -(1-\pi) = \pi - 1$$

Z definicji wartości bezwzględnej wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x:

a) $|x| \geqslant 0$ – wartość bezwzględna jest liczbą nieujemną,

b) $|x| = |-x|$ – wartości bezwzględne danej liczby i liczby do niej przeciwnej są równe.

Przykład 1.

Obliczymy wartość wyrażenia: $\left|\left|\sqrt[3]{8} - (0{,}25)^{-2} + \log_2 16\right| - 5^3\right|$.

Otrzymujemy:

$$\left|\left|\sqrt[3]{8} - (0{,}25)^{-2} + \log_2 16\right| - 5^3\right| = \left|\left|2 - 16 + 4\right| - 125\right| =$$

$$= \left|\left|-10\right| - 125\right| = |10 - 125| = |-115| = 115.$$

Wartość wyrażenia wynosi 115.

Ćwiczenie 1. Wykaż, że wartość wyrażenia:
$(2\sqrt{3}-1)\cdot|1-2\sqrt{3}|-(2-\sqrt{3})\cdot|2-\sqrt{3}|$ jest równa 6.

Przykład 2.

Udowodnimy, że jeśli a jest liczbą ujemną, to wartość wyrażenia

$$2|3-2a|-3|a-5|-|a|$$

jest stała, czyli nie zależy od liczby a.

Ustalamy znaki wyrażeń znajdujących się pod symbolem wartości bezwzględnej:

- $3-2a>0$, bo iloczyn liczby -2 i liczby ujemnej a jest liczbą dodatnią oraz suma liczb dodatnich 3 i $(-2a)$ jest dodatnia. Zatem
  $|3-2a|=3-2a$ – z definicji wartości bezwzględnej
- $a<0$, stąd $a-5<0$. Zatem
  $|a-5|=-(a-5)=-a+5$ oraz $|a|=-a$ – z definicji wartości bezwzględnej

Mamy:

$$2|3-2a|-3|a-5|-|a|=2(3-2a)-3(-a+5)-(-a)=$$
$$=6-4a+3a-15+a=-9$$

Dla dowolnej liczby ujemnej a wartość danego wyrażenia jest stała i wynosi -9.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz:

   a) $\left|-1\frac{1}{3}\right|$ b) $|0|$ c) $|4{,}8|$

   d) $|-3{,}8+4{,}5|$ e) $|11-15+2{,}6|$ f) $\left|-3\frac{3}{4}+2\cdot\left|5-6\frac{1}{2}\right|\right|$.

2. Uzasadnij, że wartość wyrażenia jest liczbą całkowitą, jeśli:

   a) $|-3{,}6-1{,}3|+|-15{,}3+19{,}4|$ b) $\left|0{,}125+\frac{3}{4}\right|-\left|3{,}5+7\frac{3}{8}\right|$

   c) $\left|-3\frac{1}{8}+1{,}25\right|\cdot|4{,}8-8|$ d) $\dfrac{\left|-2\frac{1}{6}-1\frac{2}{3}\right|-\left|9-\frac{1}{6}\right|}{|1{,}7-1{,}95|}$.

3. Oblicz wartość wyrażenia:

   a) $\left|16^{\frac{3}{4}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right|-\left|\sqrt[3]{-27}+(0{,}36)^{\frac{1}{2}}\right|$

   b) $\left|\left|\log_5\frac{1}{25}-\sqrt[4]{81}\right|-\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right|\cdot\left|\log_{\frac{1}{3}}9-125^{\frac{2}{3}}\right|$

c) $8\cdot\left|-3{,}125:\log_2 32\right|-\left|-\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{216}+\log_{\frac{2}{5}}6\frac{1}{4}\cdot\left|1-64^{\frac{2}{3}}\right|\right|$

d) $\left|\log_{\frac{1}{4}}\left|-8{,}4-7\frac{3}{5}\right|-\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+5\log_2\frac{1}{8}-64^{\frac{1}{6}}\right|\right|$.

4. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-2\right|$

b) $2\left|-3-\sqrt{5}\right|-\left|4-2\sqrt{5}\right|$

c) $2|3-\pi|-|2\pi-5|$

d) $3\left|\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right|-\left|6\sqrt{2}-3\sqrt{7}\right|$

e) $4-2\left|\sqrt{18}-3\sqrt{3}\right|+\left|4-3\sqrt{2}\right|$

f) $\sqrt{150}-\left|2\sqrt{3}-\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}\right|-7\left|\sqrt{6}-2\right|$.

5. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\left|\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right|\cdot\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|$

b) $\left|2\sqrt{6}-3\sqrt{3}\right|\cdot\left|5\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right|$

c) $\left|\left(\sqrt{2}-3\right)\left(3\sqrt{2}-4\right)\right|-13\sqrt{2}$

d) $31\sqrt{2}+\left|\left(5\sqrt{2}-8\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)\right|$.

6. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{\left|\sqrt{18}-3\right|}{\left|1-\sqrt{2}\right|}-2\left|5-3\sqrt{2}\right|$

b) $\frac{\left|2-\sqrt{3}\right|\cdot\left|\sqrt{3}-2\right|}{\left|2\sqrt{3}-5\right|}$

c) $\left|\frac{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\right|-\frac{\left|3\sqrt{3}-5\right|}{2}$

d) $\frac{\left|\left(3-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}-3\right)\right|}{\left|\sqrt{6}-2\right|\cdot\left|2+\sqrt{6}\right|}+\frac{1}{2}\left|6\sqrt{6}-11\right|$.

7. Oblicz wartość wyrażenia dla podanej obok wartości zmiennej:

a) $\left|3-\left|5-\left|a-6\right|\right|\right|$ $\quad a=3{,}2$

b) $2b\cdot|b+2|$ $\quad b=-1+2\sqrt{2}$

c) $\left|\left|c-5\right|+c\cdot\left|1+2c\right|\right|-c$ $\quad c=-\log_3\left(3\sqrt{3}\right)$

d) $3-2\cdot\left|\left|8-0{,}5d-6\right|-\left|d+1\right|\cdot(d-1)\right|$ $\quad d=\sqrt{5^2+12^2}$.

8. Poniżej dane jest wyrażenie ze zmienną x oraz przedział liczbowy, do którego ta zmienna należy. Uzasadnij, że wartość tego wyrażenia jest stała.

a) $|x-3|-|2x+1|+3x$ $\quad x\in(1,2)$

b) $|x-7|-2|x|+|4-x|$ $\quad x\in(-\infty,-3)$

c) $3|x-1|-5|3+x|+|2x|$ $\quad x\in\langle 1,+\infty)$

d) $5x+\left|5-2|x+3|+3|1-x|\right|$ $\quad x\in\langle -2,0\rangle$

9. Zapisz wyrażenie, nie używając symbolu wartości bezwzględnej. Podaj to wyrażenie w najprostszej postaci.

a) $|a-2|\cdot|a+2|-3|a-1|$ $\quad$ jeśli $a\in\langle 0,1\rangle$

b) $|a+3|\cdot|a-2|-|a-3|\cdot|2-a|$ $\quad$ jeśli $a\in\langle 3,+\infty)$

c) $1-a\cdot|5-a|-|4-a|\cdot|a-2|$ $\quad$ jeśli $a\in(-\infty,2\rangle$

d) $|-2+3a|\cdot|a-5|\cdot\left(|a|+5\right)$ $\quad$ jeśli $a\in(-\infty,0\rangle$

Odległość między liczbami na osi liczbowej. Geometryczna interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej

Każda liczba rzeczywista ma swoje miejsce na osi liczbowej i odwrotnie: każdy punkt na osi liczbowej odpowiada pewnej liczbie rzeczywistej. Mówiąc o odległości między liczbami na osi liczbowej, mamy na myśli odległość między punktami, których współrzędnymi są te liczby.

Ćwiczenie 1. Oblicz odległość na osi liczbowej między liczbami -3 i -1. Jaka liczba na osi liczbowej jest równoodległa od tych liczb?

Jeśli dane są dwie liczby a, b na osi liczbowej takie, że $a \leqslant b$, to odległość między tymi liczbami jest równa $b - a$.

Twierdzenie 1.
Środek odcinka wyznaczonego przez dwa punkty o współrzędnych a i b na osi liczbowej jest punktem, którego współrzędna jest równa średniej arytmetycznej liczb a i b, czyli $\frac{a+b}{2}$.

Liczba $\frac{a+b}{2}$, gdzie $a \neq b$, jest równoodległa od liczb a i b.

Umieśćmy na osi liczbowej dwie liczby przeciwne do siebie, np. liczby -7 i 7. Wartość bezwzględna tych liczb jest taka sama:

$$|-7| = |7| = 7$$

Odległość liczby -7 od liczby 0 jest równa odległości liczby 7 od liczby 0 i jest równa 7.

Liczba x i liczba do niej przeciwna $(-x)$ są położone na osi OX symetrycznie względem liczby 0, zatem znajdują się w tej samej odległości od 0.

Twierdzenie 2.
Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x jest równa odległości tej liczby od zera na osi liczbowej.

Przykład 1.

Opiszemy odległość między liczbami –4 i 6, używając symbolu wartości bezwzględnej.

Odległość między liczbami –4 i 6 jest równa 10.

Zauważamy, że

$10 = |6 - (-4)|$ oraz $10 = |-4 - 6|$.

Twierdzenie 3.

Odległość na osi liczbowej między dwiema liczbami a i b jest równa $|a - b|$.

UWAGA: $|a - b| = |b - a|$, bo liczby $a - b$ i $b - a$ są przeciwne.

Przykład 2.

Zapiszemy symbolicznie, używając znaku wartości bezwzględnej, następujące zdania:

a) Odległość pomiędzy liczbami –6 i a na osi liczbowej jest równa 5.
b) Odległość liczby a od liczby –6 na osi liczbowej jest nie większa od 1.

Odległość między liczbami 6 oraz a możemy zapisać symbolicznie na dwa sposoby:
$|a - (-6)|$ albo $|-6 - a|$.

Otrzymujemy:

Ad a) $|a + 6| = 5$ albo $|-6 - a| = 5$

Ad b) $|a + 6| \leqslant 1$ albo $|-6 - a| \leqslant 1$.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Oblicz odległość na osi liczbowej między danymi liczbami.
   a) $-19{,}3$ i $-20{,}7$
   b) 8 i $-14\frac{2}{3}$
   c) $16{,}25$ i $108\frac{3}{4}$
   d) $-19 - \sqrt{12}$ i $34 - 2\sqrt{3}$
2. Wyznacz na osi liczbowej liczbę równoodległą od liczb a i b, jeśli:
   a) $a = 12{,}8$ i $b = 15{,}2$
   b) $a = 3 - 2\sqrt{6}$ i $b = 2 + 3\sqrt{6}$
   c) $a = \sqrt{20} - 3$ i $b = 7 - 2\sqrt{45}$
   d) $a = \log 2$ i $b = \log 5$
3. Używając symbolu wartości bezwzględnej, zapisz poniższe zdania:
   a) Odległość liczby a od liczby 10 jest równa 1.
   b) Odległość liczby b od liczby 0 jest równa 8.
   c) Odległość liczby c od liczby (-3) jest większa od 4.
   d) Odległość liczby d od liczby 7 jest nie mniejsza od 1.

Proste równania z wartością bezwzględną

W tym temacie poznasz sposoby rozwiązywania równań typu $|x-a|=b$ z niewiadomą x.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $|x-6|=4$, wykorzystując geometryczną interpretację wartości bezwzględnej na osi liczbowej.

Wyrażenie $|x-6|$ oznacza odległość szukanej liczby x od liczby 6. Zaznaczamy liczbę 6 na osi liczbowej i znajdujemy wszystkie takie liczby x, których odległość od liczby 6 jest równa 4.

Szukane liczby to 2 i 10 (sprawdź, podstawiając je do równania w miejsce x). Zatem:

$$|x-6|=4 \Leftrightarrow (x=2 \ \vee \ x=10).$$

Ćwiczenie 1. Postępując podobnie, wyznacz rozwiązania równania $|x-(-6)|=4$.

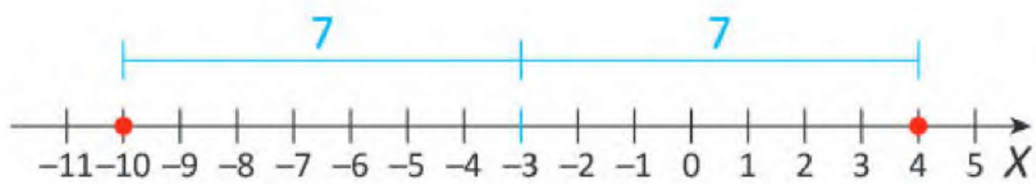
Przykład 2.

Napiszemy równanie z wartością bezwzględną typu $|x-a|=b$, którego zbiorem rozwiązań jest zbiór: a) $\{-5, 5\}$ b) $\{-10, 4\}$

Ad a) Liczby -5 i 5 są położone w odległości 5 od liczby 0 na osi liczbowej. Szukane równanie przyjmuje postać $|x-0|=5$, czyli $|x|=5$.

Ad b) Liczby -10 oraz 4 nie leżą symetrycznie względem liczby 0 na osi liczbowej. Wyznaczamy zatem liczbę równoodległą od tych liczb, stosując twierdzenie 1. ze str. 59.

$$\frac{-10+4}{2}=-3$$



Zauważamy, że liczby -10 i 4 leżą na osi liczbowej w odległości 7 od liczby -3.
Zatem szukane równanie to $|x-(-3)|=7$, czyli $|x+3|=7$.

Przykład 3.

Rozwiążemy równania:

a) $|x-8|=0$ b) $|x+2|=-1$.

Ad a) Równanie $|x-8|=0$ ma jedno rozwiązanie, bo istnieje tylko jedna liczba rzeczywista, której odległość od liczby 8 jest równa zeru: 8. Stąd $x=8$.

Ad b) Równanie $|x+2|=-1$ jest sprzeczne, bo odległość nie może być liczbą ujemną.

Twierdzenie 1.

Jeśli a jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią i w jest dowolnym wyrażeniem, to
$$|w|=a \Leftrightarrow (w=a \vee w=-a).$$

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $|-x+2|=4$, korzystając z twierdzenia 1.

Mamy: $|-x+2|=4$
$$-x+2=4 \quad \vee \quad -x+2=-4$$
$$-x=2 \quad \vee \quad -x=-6$$
$$x=-2 \quad \vee \quad x=6$$
Rozwiązaniami równania $|-x+2|=4$ są liczby -2 oraz 6.

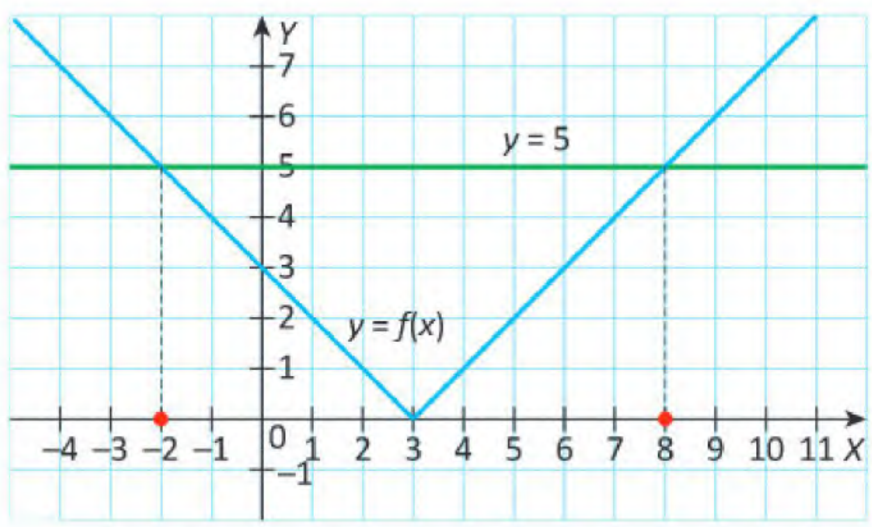
Ćwiczenie 2. Zastanów się, czy poprawne byłoby zastosowanie powyższej metody w przypadku równania sprzecznego $|x+2|=-1$.

Kolejną metodą rozwiązania równania jest skorzystanie z wykresu odpowiedniej funkcji.

Przykład 5.

Rozwiążemy graficznie równanie $|x-3|=5$.

Szkicujemy wykres funkcji $f(x)=|x-3|$ i odczytujemy wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 5. Są to liczby -2 oraz 8.



Sprawdzamy, czy liczby -2 i 8 są rozwiązaniami danego równania:
1) Jeśli $x=-2$, to $L=|-2-3|=|-5|=5=P$.
2) Jeśli $x=8$, to $L=|8-3|=|5|=5=P$.

Rozwiązaniami równania $|x-3|=5$ są liczby: -2 oraz 8.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż równanie $|x+2|=3$ na trzy sposoby:
   a) na podstawie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej,
   b) korzystając z twierdzenia 1,
   c) szkicując wykres odpowiedniej funkcji w układzie współrzędnych.
2. Rozwiąż dane równanie, wykorzystując geometryczną interpretację wartości bezwzględnej na osi liczbowej.
   a) $|x|=1$ b) $|x+4|=9$ c) $|-8+x|=5$
   d) $|5-x|=2$ e) $|-x-1|=4$ f) $12-2|x-4|=|-x+4|-6$
3. Napisz równanie z niewiadomą x, typu $|x-a|=b$, jeśli dany jest jego zbiór rozwiązań:
   a) $\{3, 11\}$ b) $\{-21, -3\}$ c) $\{-74, 16\}$
   d) $\{1-\sqrt{3}, \sqrt{3}-1\}$ e) $\{5-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}\}$ f) $\{-193\}$.
4. Rozwiąż dane równanie, stosując twierdzenie 1.
   a) $|x|=3$ b) $|x-1|=5$ c) $|-4-x|=110$
   d) $|x+26|=21$ e) $|2x-10|=28$ f) $1-|-34+x|=-56$
5. Rozwiąż dane równanie, stosując twierdzenie 1.
   a) $3|x|=1{,}5$ b) $-2|x-1|=-6\sqrt{2}$ c) $|-25+x|-80=0$
   d) $|2x+6|-6=0$ e) $4-3|-x+1|=2$ f) $|-4(x+3)|=2{,}8$
6. Rozwiąż graficznie równanie:
   a) $|x+3|=-1$ b) $|1-x|=4$ c) $|4+x|=1$
   d) $|-x-2|=0$ e) $|-x+5|=3$ f) $|-x-6|=3$
7. Podaj przykład równania z wartością bezwzględną:
   a) które ma dwa rozwiązania będące liczbami przeciwnymi,
   b) które ma dwa rozwiązania będące liczbami przeciwnych znaków,
   c) które ma dwa rozwiązania ujemne,
   d) którego jedynym rozwiązaniem jest dodatnia liczba wymierna.
8. Rozwiąż równanie:
   a) $3|5-x|-8+|-x+5|=2|x-5|+6$
   b) $7-|x+9|+3|-x-9|=-28+5|9+x|$
   c) $2(3-|x+2|)=5|-2-x|+8-4|2+x|$
   d) $3(|-x-1|-5)-2(|x+1|-4)=0$.
9. Rozwiąż równanie:
   a) $\dfrac{3-|x+1|}{4}=\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{2+|-x-5|}{3}=\dfrac{7}{8}$ c) $\dfrac{|-3+x|-5}{\sqrt{2}-1}=0$
   d) $\dfrac{2|-x+1|-7}{3}=\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{5|-x-2|-3}{6}=1\dfrac{3}{4}$ f) $\dfrac{3|x-1|+7}{3}=1{,}25$.

Proste nierówności z wartością bezwzględną

Ćwiczenie 1. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz za pomocą przedziałów zbiory A, B, C, D jeśli:
A – zbiór liczb rzeczywistych, których odległość od 0 jest nie większa od 1,
B – zbiór liczb rzeczywistych, których odległość od 1 jest mniejsza od 3,
C – zbiór liczb rzeczywistych, których odległość od –2 jest nie mniejsza niż 1,
D – zbiór liczb rzeczywistych, których odległość od –4 jest większa od 5.

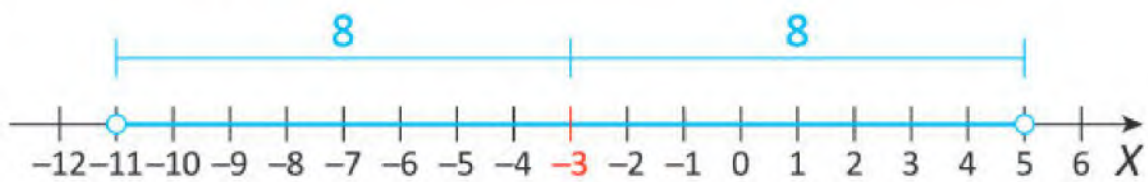
W tym temacie zajmiemy się nierównościami typu: $|x-a|<b$, $|x-a|>b$, $|x-a|\leqslant b$ oraz $|x-a|\geqslant b$, gdzie x oznacza niewiadomą, zaś a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówności:

a) $|x+3|<8$ b) $|x-5|\geqslant 2$.

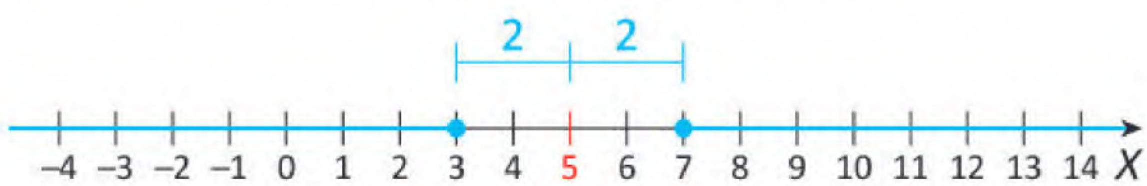
Ad a) Nierówność $|x+3|<8$ możemy zapisać w postaci $|x-(-3)|<8$. Rozwiązać tę nierówność, to znaleźć na osi liczbowej wszystkie takie liczby x, których odległość od liczby –3 jest mniejsza od 8.



$$|x+3|<8 \Leftrightarrow x\in(-11, 5)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-11, 5)$.

Ad b) Rozwiązując nierówność $|x-5|\geqslant 2$, szukamy na osi liczbowej takich liczb, których odległość od liczby 5 jest równa 2 lub jest większa od 2.



$$|x-5|\geqslant 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty, 3\rangle\cup\langle 7, +\infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów: $(-\infty, 3\rangle\cup\langle 7, +\infty)$.

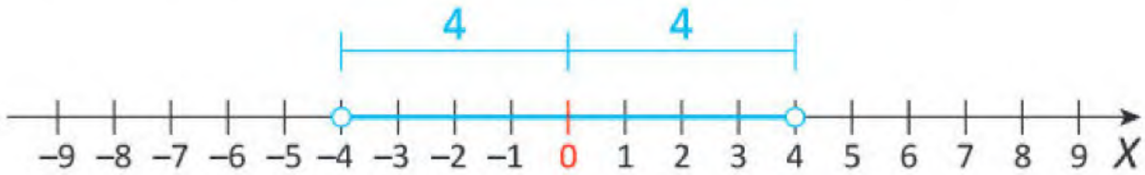
Ćwiczenie 2. Rozwiąż nierówności: a) $|x|>5$ b) $|x-4|\leqslant 3$ korzystając z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej.

Przykład 2.

Napiszemy nierówności z wartością bezwzględną typu: $|x-a|>b$ lub $|x-a|<b$, jeśli znamy ich zbiory rozwiązań:

a) $(-4, 4)$ b) $(-\infty, -8) \cup (-2, +\infty)$.

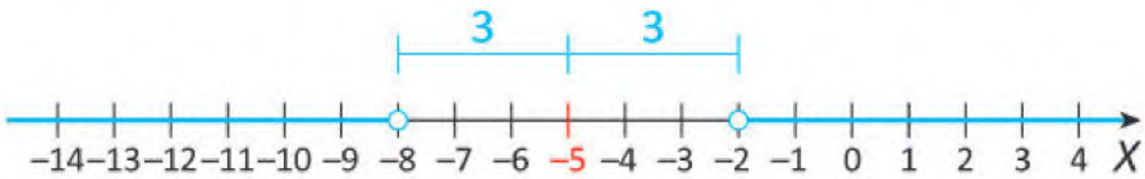
Ad a) Na osi liczbowej zaznaczamy przedział liczbowy $(-4, 4)$ i wyznaczamy punkt, będący środkiem odcinka o końcach -4 i 4. Jest to punkt zero.



W przedziale $(-4, 4)$ znajdują się wszystkie te liczby rzeczywiste, których odległość od 0 jest mniejsza od 4, dlatego szukana nierówność przyjmuje postać:

$|x|<4$.

Ad b) Na osi liczbowej zaznaczamy zbiór $(-\infty, -8) \cup (-2, +\infty)$ i wyznaczamy punkt, będący środkiem odcinka o końcach -8 i -2. Tym punktem jest -5.



W zbiorze $(-\infty, -8) \cup (-2, +\infty)$ znajdują się wszystkie te liczby rzeczywiste, których odległość od liczby -5 jest większa od 3. Otrzymujemy nierówność

$|x-(-5)|>3$, czyli $|x+5|>3$.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówności:

a) $|x+4|<-1$ b) $|2-x|>-3$ c) $|x+6| \leqslant 0$ d) $|x-2|>0$.

Ad a) Odległość jest liczbą nieujemną, więc wartość wyrażenia $|x+4|$ nie może być mniejsza od -1. Nierówność $|x+4|<-1$ jest sprzeczna, a jej zbiór rozwiązań to zbiór pusty.

Ad b) Lewa strona nierówności jest zawsze liczbą nieujemną, bo $|2-x| \geqslant 0$. Zatem nierówność $|2-x|>-3$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.
Zbiorem rozwiązań nierówności $|2-x|>-3$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Ad c) Rozwiązując nierówność $|x+6| \leqslant 0$, szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od liczby -6 jest mniejsza od zera lub jest równa zeru. Odległość nie może być liczbą ujemną. Zatem rozwiązaniem danej nierówności jest tylko ta liczba, której odległość od -6 jest równa 0, czyli liczba -6.

Ad d) Nierówność $|x-2|>0$ spełnia każda liczba rzeczywista różna od 2.
Zbiorem rozwiązań nierówności $|x-2|>0$ jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{2\}$.

Ćwiczenie 3. Podaj zbiór rozwiązań nierówności: a) $|x+5| \geqslant 0$ b) $|7-x| \leqslant 0$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli a jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, w – dowolnym wyrażeniem, to:

a) $|w| < a \Leftrightarrow (w > -a \wedge w < a) \Leftrightarrow -a < w < a \Leftrightarrow w \in (-a, a)$,

b) $|w| \leqslant a \Leftrightarrow (w \geqslant -a \wedge w \leqslant a) \Leftrightarrow -a \leqslant w \leqslant a \Leftrightarrow w \in \langle -a, a \rangle$,

c) $|w| > a \Leftrightarrow (w < -a \vee w > a) \Leftrightarrow w \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$,

d) $|w| \geqslant a \Leftrightarrow (w \leqslant -a \vee w \geqslant a) \Leftrightarrow w \in (-\infty, -a\rangle \cup \langle a, +\infty)$.

Przykład 4.

Rozwiążemy dane nierówności, stosując twierdzenie 1.

a) $|x+3| < 4$ b) $|x-5| \geqslant 7$.

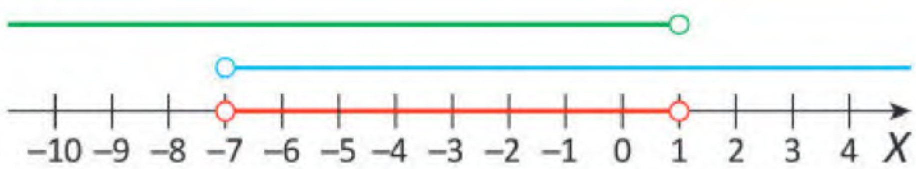
Ad a) Nierówność $|x+3| < 4$ jest równoważna koniunkcji nierówności:

$x+3 > -4 \wedge x+3 < 4$ – na podstawie twierdzenia 1a)

czyli

$x > -7 \wedge x < 1$

Zbiorem rozwiązań koniunkcji dwóch nierówności jest część wspólna zbiorów rozwiązań tych nierówności.



Zbiorem rozwiązań nierówności $|x+3| < 4$ jest przedział liczbowy $(-7, 1)$.

Ad b) Nierówność $|x-5| \geqslant 7$ zapisujemy w postaci alternatywy nierówności:

$x-5 \leqslant -7 \vee x-5 \geqslant 7$ – z twierdzenia 1d)

czyli

$x \leqslant -2 \vee x \geqslant 12$

Zbiorem rozwiązań alternatywy dwóch nierówności jest suma zbiorów rozwiązań tych nierówności, czyli zbiór $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 12, +\infty)$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x-5| \geqslant 7$ jest zbiór $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 12, +\infty)$.

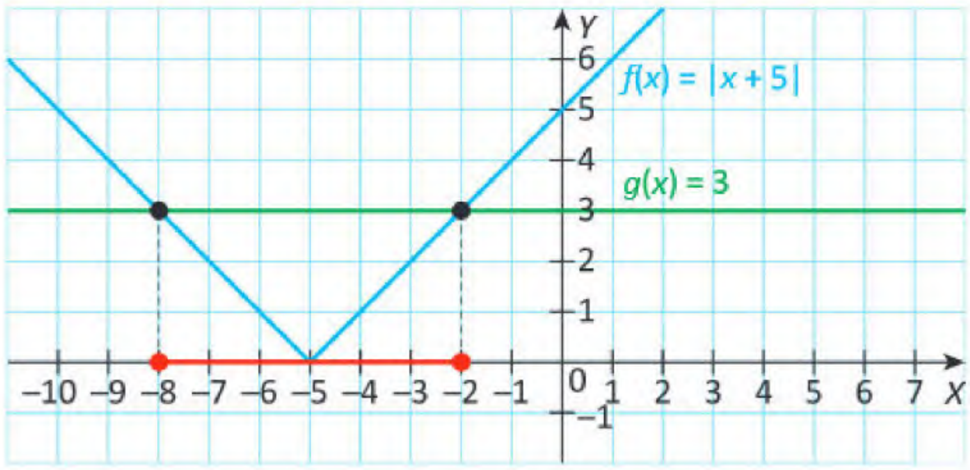
Zauważ, że do rozwiązania nierówności typu: $|x-10| > -1$, $|x+5| < -7$ czy $|x+2| \leqslant 0$ nie stosujemy twierdzenia 1., bo wtedy liczba a nie jest liczbą dodatnią. Tego typu nierówności omówiliśmy w przykładzie 3.

W następnym przykładzie wykorzystamy jeszcze jeden sposób rozwiązywania prostych nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 5.

Rozwiążemy graficznie nierówność $|x+5| \leqslant 3$.

Szkicujemy wykresy funkcji: $f(x) = |x + 5|$ i $g(x) = 3$. Odczytujemy współrzędne punktów przecięcia tych wykresów: $(-8, 3)$ oraz $(-2, 3)$.



Wykonujemy sprawdzenie:

$$f(-8) = |-8+5| = |-3| = 3, \quad g(-8) = 3, \text{ zatem } f(-8) = g(-8)$$

podobnie, $\quad f(-2) = |-2+5| = |3| = 3, \quad g(-2) = 3$, więc $f(-2) = g(-2)$.

Następnie z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant g(x)$. Mamy:

$$f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in \langle -8, -2 \rangle$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x+5| \leqslant 3$ jest przedział $\langle -8, -2 \rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż nierówność $|x-1| > 4$ na trzy sposoby:
   a) na podstawie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej,
   b) stosując twierdzenie 1,
   c) szkicując w układzie współrzędnych wykresy odpowiednich funkcji.
2. Na podstawie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej na osi liczbowej rozwiąż nierówność:
   a) $|x| < 1$ b) $|x-8| \leqslant 5$ c) $|1-x| \geqslant 6$
   d) $|x+5| > 0$ e) $|x+1| \geqslant 7$ f) $|-8-x| \leqslant 0$
   g) $2|5-x| - 3 > 0$ h) $-|x+9| > -1$ i) $5 - 3|-1-x| \leqslant 0$.
3. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:
   a) $|x| \leqslant 0$ b) $|x| < -2$ c) $1 - |x| \leqslant 4$
   d) $|x-3| > 0$ e) $|-6+x| > -3$ f) $2 + |4+x| \leqslant 2$.
4. Zapisz nierówność z wartością bezwzględną, znając jej zbiór rozwiązań.
   a) $\left(-3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}\right)$ b) $\langle 0, 4 \rangle$ c) $(-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$
   d) $(-4, 12)$ e) $\boldsymbol{R}$ f) $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 12, +\infty)$
   g) $\boldsymbol{R} - \{5\}$ h) $\{-4\}$ i) $\left(-3-\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}\right)$

5. Rozwiąż daną nierówność, stosując twierdzenie 1.
   a) $|x+11|<29$ b) $|x-17|>3$ c) $|35-x|\leqslant 15$
   d) $|3x-2|\geqslant 4$ e) $|5x+1|<6$ f) $|-2x-8|>1$
6. Rozwiąż nierówność, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji:
   a) $|x-7|<2$ b) $|-2+x|\geqslant 5$ c) $|-3-x|>1$.
7. Rozwiąż nierówność:
   a) $1-4|x-2|>-2$ b) $1+2|x+1|<0$ c) $5-2|x+3|\geqslant 5$
   d) $|2x|-8\leqslant 4\sqrt{2}$ e) $|-x+4|-6>-7$ f) $0{,}5|12x-7|-2{,}5>0$.
8. Rozwiąż nierówność:
   a) $2|x-2|-3|-x+2|>7-4|-x+2|$
   b) $5(|-x-4|-2|4+x|)-2|x+4|\geqslant -7$
   c) $3(2-|3+x|)-5(|-x-3|+4)\geqslant 2$
   d) $5|x+8|-3(4-2|-8-x|)\leqslant -12$.
9. Rozwiąż nierówność:
   a) $\dfrac{|3-x|}{2}+1>|x-3|$ b) $3-\dfrac{|x+6|}{4}\leq\dfrac{|-6-x|}{8}$
   c) $\dfrac{|x+2|}{5}-\dfrac{1}{15}<\dfrac{1}{3}|-x-2|$ d) $\dfrac{|5-x|}{4}+1\dfrac{1}{3}\geq\dfrac{|-x+5|+4}{3}$.
10. Rozwiąż nierówność:
    a) $3(|\sqrt{3}-x|-2)\leqslant 8+2|x-\sqrt{3}|$
    b) $5|x+2\sqrt{2}|-4|\sqrt{8}+x|\geqslant 3|-x-2\sqrt{2}|$
    c) $\sqrt{5}(|x+1|-2|-x-1|)>-2$
    d) $15+2\sqrt{5}|x+3|\leqslant 2\sqrt{20}|-3-x|$.
11. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze, które spełniają jednocześnie poniższe warunki:
    a) $5-3(x-2)\leqslant 8$ i $|x-1|\leqslant 1$
    b) $2|x-5|+9<4|5-x|$ i $\dfrac{1}{3}|x+2|+6\geqslant\dfrac{4|-x-2|}{3}-9$.
12. Rozwiąż nierówność podwójną:
    a) $1<|x+2|\leqslant 3$ b) $3\leqslant 3-|x-4|\leqslant 5$ c) $3-|x+5|\leqslant 2|-x-5|+1<6$.
13. Dane są zbiory:
    A – zbiór liczb parzystych spełniających nierówność $3>2|x+4|-9$
    B – zbiór liczb pierwszych spełniających nierówność $3|2-x|\leqslant|x-2|+8$
    C – zbiór liczb nieujemnych spełniających nierówność
    $4|-1-x|+2>5|x+1|-3$.
    Wyznacz zbiory: a) $A\cup B$, b) $A\cap C$, c) $B-C$, d) $B\cap C$, e) $C-A$.

Własności wartości bezwzględnej

Uzupełnimy Twoje wiadomości dotyczące własności wartości bezwzględnej. Podamy je w postaci twierdzeń. Niektóre z tych własności udowodnimy.

Twierdzenie 1.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x:

a) $\sqrt{x^2} = |x|$ b) $|x|^2 = x^2$ c) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

Dowód:

Ad a) Pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej jest liczbą nieujemną, zatem:

$\sqrt{x^2} = \begin{cases} -x, \text{ jeśli } x < 0 \\ x, \text{ jeśli } x \geqslant 0 \end{cases}$, czyli $\sqrt{x^2} = |x|$, co kończy dowód.

Ad c) Należy wykazać, że prawdziwe są nierówności:

I. $x \leqslant |x|$ i II. $x \geqslant -|x|$

I. Jeśli $x \geqslant 0$, to z definicji wartości bezwzględnej wynika, że $|x| = x$. Zatem nierówność

$x \leqslant |x|$ jest prawdziwa.

Jeśli $x < 0$, to nierówność $x \leqslant |x|$ jest oczywista, bo wtedy $x < 0 \leqslant |x|$.

II. Nierówność $x \geqslant -|x|$ jest równoważna nierówności $|x| \geqslant -x$. Wiemy, że

$|x| = |-x|$ oraz

$|-x| \geqslant -x$ – z punktu I.

Otrzymujemy: $|x| = |-x| \geqslant -x$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Wykaż, korzystając z definicji wartości bezwzględnej, że $|x|^2 = x^2$.

Przykład 1.

Wykażemy, że jeśli $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, +\infty \right)$, to $\sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 + x + 0{,}25}} = x + 1$.

Korzystamy dwukrotnie z twierdzenia 1a). Mamy:

$$\sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 + x + 0{,}25}} = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{(x+0{,}5)^2}} = \sqrt{x^2 + 2|x+0{,}5|} =$$

ze wzoru na kwadrat sumy; z zał. $0{,}5 + x \geqslant 0$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x + 1$$

z zał. $x + 1 > 0$

Twierdzenie 2.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y:

a) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

b) $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$, jeśli $y \neq 0$

c) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$

d) $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \lor x = -y)$

e) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

f) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$.

Dowód:

Ad a) Rozważymy cztery przypadki ze względu na znaki liczb x i y.

- Niech $x < 0$ i $y < 0$. Wtedy $|x| = -x$, $|y| = -y$, $x \cdot y > 0$ oraz $|x \cdot y| = x \cdot y$. Zatem
  $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y = |x \cdot y|$.
- Niech $x \geqslant 0$ i $y < 0$. Wtedy $|x| = x$, $|y| = -y$, $x \cdot y \leqslant 0$ oraz $|x \cdot y| = -x \cdot y$. Zatem
  $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -x \cdot y = |x \cdot y|$.
- Jeśli $x < 0$ i $y \geqslant 0$, to dowód jest analogiczny jak w drugim przypadku.
- Niech $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$. Wtedy $|x| = x$, $|y| = y$, $x \cdot y \geqslant 0$ oraz $|x \cdot y| = x \cdot y$. Zatem
  $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$, co kończy dowód.

Ad b) W dowodzie twierdzenia 2b) skorzystamy z udowodnionego twierdzenia 2a).

Ponieważ $y \neq 0$, więc wyrażenie $|x|$ możemy zapisać w postaci: $|x| = \left|\frac{x}{y} \cdot y\right|$. Zatem

$$\left|\frac{x}{y} \cdot y\right| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|, \text{ czyli } |x| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|.$$

Po podzieleniu obu stron ostatniej równości przez $|y|$ otrzymujemy

$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|,$$ co kończy dowód.

Ad e) Jeśli $x = y = 0$, to mamy nierówność prawdziwą: $|0 + 0| \leqslant |0| + |0|$.
Niech co najmniej jedna z liczb x, y będzie różna od 0. Na podstawie twierdzenia 1c), wiemy, że prawdziwe są nierówności:

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{oraz} \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Po dodaniu tych nierówności stronami otrzymujemy:

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

jeśli $a > 0$, to $-a \leqslant w \leqslant a \Leftrightarrow |w| \leqslant a$ (tw. 1b, str. 66)

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

co kończy dowód.

Ad f) Korzystamy z udowodnionej nierówności z punktu e):

$|x - y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |-y|$, stąd

$|x - y| \leqslant |x| + |y|$, co kończy dowód.

Przykład 2.

Doprowadzimy do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $2|x-1|\cdot|2-2x|,\ x\in \boldsymbol{R}$ b) $\dfrac{2x^2-12x+18}{|2x-6|},\ x\neq 3.$

Ad a) $2|x-1|\cdot|2-2x| \underset{\text{twierdzenie 2a)}}{=} |2x-2|\cdot|2x-2| = |2x-2|^2 \underset{\text{twierdzenie 1b)}}{=} (2x-2)^2 = 4x^2-8x+4.$

Ad b) Jeśli $x\neq 3$, to:

$$\frac{2x^2-12x+18}{|2x-6|}=\frac{2\left(x^2-6x+9\right)}{|2(x-3)|}\underset{\text{twierdzenie 2a)}}{=}\frac{2(x-3)^2}{2|x-3|}\underset{\text{twierdzenie 1b)}}{=}\frac{|x-3|^2}{|x-3|}=|x-3|$$

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $|3x-2|=|3x-4|$.

I sposób:

Korzystamy z twierdzenia 2c)

$(3x-2)^2=(3x-4)^2$

$9x^2-12x+4=9x^2-24x+16$

$12x=12$

$x=1$

Rozwiązaniem równania jest liczba 1.

II sposób:

Korzystamy z twierdzenia 2d)

$|3x-2|=|3x-4|$

$3x-2=3x-4 \vee 3x-2=-3x+4$

$-2=-4$ $\qquad 6x=6$

sprzeczność $\qquad x=1$

Ćwiczenie 2. Korzystając z własności wartości bezwzględnej wykaż, że liczba x, równoodległa od liczb a i b na osi liczbowej, gdzie $a\neq b$, jest równa $\dfrac{a+b}{2}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $\sqrt{9x^2}+|-2x|-|5x|$ b) $\sqrt{(x+2)^2}-|-3x-6|-|-2-x|$

c) $4\sqrt{x^2-10x+25}+|-3x+15|$ d) $\sqrt{4-8x+4x^2}-|-4(x-1)|+|x|$

2. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $|3-x|-2|x-3|$ b) $3(2|-x-2|+5|x+2|)$

c) $4|3x-12|-2|20-5x|$ d) $|-3-6x|-2|8x+4|$

3. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $\dfrac{2}{|3x-9|}\cdot|3-x|,\ x\neq 3$ b) $\left|\dfrac{-5x-10}{14}\right|\cdot\left|\dfrac{-7}{x+2}\right|,\ x\neq -2$

c) $\dfrac{(5x-6)^2}{3|12-10x|}$, $x \neq 1{,}2$

d) $\dfrac{(-2x-3)^2}{2\sqrt{4x^2+12x+9}}$, $x \neq -1\frac{1}{2}$

4. Skróć ułamki:

a) $\dfrac{|6-3x|}{(x-2)^2}$, $x \neq 2$

b) $\dfrac{|x-4|^2}{x^2-8x+16}$, $x \neq 4$

c) $\dfrac{6(x+1)^2}{|3x+3|}$, $x \neq -1$

d) $\dfrac{|3x|-5\sqrt{x^2}}{2|x|}$, $x \neq 0$.

5. Rozwiąż dane równanie, doprowadzając je najpierw do najprostszej postaci.

a) $|-2x+6| = 10$

b) $|3x+1| - |6x+2| = 0$

c) $|4x-8| + |x-2| = 5$

d) $|10-2x| - 4 = |x-5|$

e) $\sqrt{4x^2-12x+9} = 3$

f) $\sqrt{100x^2+40x+4} = 0$

6. Rozwiąż dane równanie, korzystając z odpowiedniej własności wartości bezwzględnej.

a) $|-3x-5| = |3x+1|$

b) $|4x+6| = 2|2x-9|$

c) $3|x| = |4-x|$

d) $5|1-x| = |7+x|$

e) $2|x| - 4|x+1| = 0$

f) $6|3x-2| - 2|x-1| = 0$

D 7. Wykaż, że jeśli $x \in \boldsymbol{R} - \{1\}$, to $\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}}{|3x-3|} = \dfrac{2}{3}$.

D 8. Wykaż, że jeśli $x \in (-\infty, 6)$, to $\dfrac{\left|\frac{2}{3}x-4\right|-2\sqrt{x^2-12x+36}}{0{,}5x-3} = \dfrac{8}{3}$.

D 9. Wykaż, że jeśli $x \geqslant 2$, to $\sqrt{x^2-4\sqrt{x^2-2x+1}} = x-2$.

D 10. Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych x i y takich, że $x \leqslant 1{,}5y$ prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{4x^2+9y^2+12xy} + \sqrt{4x^2+9y^2-12xy} = 6y.$$

D 11. Wykaż, że dla dowolnych liczb niedodatnich x i y prawdziwa jest równość:

$$3\sqrt{9x^2+30xy+25y^2} + 9x + 15y = 0.$$

D 12. Wykaż, że jeśli $x^2 + 16y^2 = 16xy$ oraz $x > 4y > 0$, to $\dfrac{x+4y}{x-4y} = \sqrt{3}$.

D 13. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność: $|x-y| \leqslant |x-z| + |y-z|$.

Równania z wartością bezwzględną

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $\left||x-3|-1\right|=5$.

I sposób – Rozwiązujemy równanie algebraicznie.
Otrzymujemy:

$\left||x-3|-1\right|=5$ $\quad |w|=a \Leftrightarrow (w=a \vee w=-a)$, jeśli $a>0$

$|x-3|-1=-5 \quad \vee \quad |x-3|-1=5$

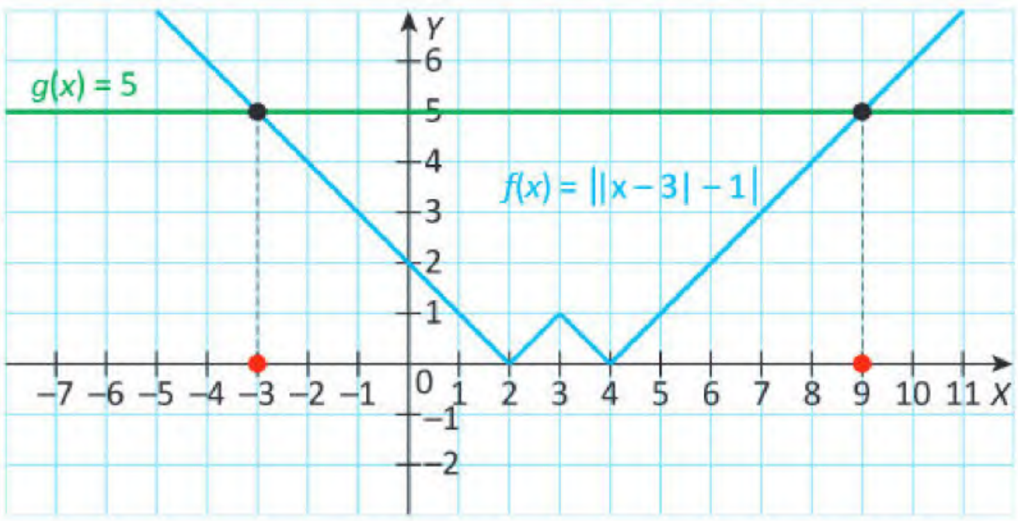
$|x-3|=-4 \quad \vee \quad |x-3|=6$

równanie sprzeczne $\quad (x-3=-6 \quad \vee \quad x-3=6)$

$(x=-3 \quad \vee \quad x=9)$

Równanie $\left||x-3|-1\right|=5$ ma dwa rozwiązania: -3 oraz 9.

II sposób – Rozwiązujemy równanie graficznie.
Szkicujemy wykresy funkcji $f(x)=\left||x-3|-1\right|$ oraz $g(x)=5$ we wspólnym układzie współrzędnych.



Z rysunku odczytujemy, że funkcje f i g przyjmują tę samą wartość dla dwóch argumentów:

-3 oraz 9 (sprawdź!).

Równanie $\left||x-3|-1\right|=5$ ma dwa rozwiązania: -3 i 9.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż algebraicznie równania:

a) $\left||x|-2\right|=1$ b) $\left||x|+2\right|=1$

Ile rozwiązań ma każde z tych równań?

Przykład 2.

Rozwiążemy algebraicznie równanie $|x-4|=-1{,}5x+5$.

Wyrażenie po lewej stronie równania przyjmuje tylko wartości nieujemne. Wyrażenie po prawej stronie dla pewnych liczb rzeczywistych przyjmuje wartość dodatnią, lub równą 0, a dla innych – ujemną. W takiej sytuacji korzystamy z definicji wartości bezwzględnej:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, \text{ jeśli } x \geqslant 4 \\ -x+4, \text{ jeśli } x < 4 \end{cases}$$

Otrzymujemy alternatywę dwóch przypadków:

I. $x \in (-\infty, 4)$ $\qquad \vee \qquad$ **II.** $x \in \langle 4, +\infty)$

$-x + 4 = -1{,}5x + 5$ $\qquad\qquad$ $x - 4 = -1{,}5x + 5$

Rozwiązujemy każde równanie i uwzględniamy przedział, w którym to równanie jest określone. Mamy:

I. $0{,}5x = 1$

$x = 2$

$2 \in (-\infty, 4)$

II. $2{,}5x = 9 \quad /: 2{,}5$

$x = 3{,}6$

$3{,}6 \notin \langle 4, +\infty)$

Rozwiązaniem równania $|x-4| = -1{,}5x + 5$ jest tylko liczba 2.

Ćwiczenie 2. Upewnij się, wykonując sprawdzenie, że liczba 2 spełnia równanie z przykładu 2., a liczba 3,6 nie spełnia tego równania.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż algebraicznie równanie $|x+5| = \frac{1}{3}x + 7$.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $|x-3| = 3 - x$.

Zauważamy, że liczba $(3 - x)$ jest przeciwna do liczby $(x - 3)$. Z definicji wartości bezwzględnej wynika, że wartość bezwzględna liczby jest równa liczbie przeciwnej tylko wtedy, gdy liczba pod znakiem wartości bezwzględnej jest ujemna lub równa 0. Zatem każda liczba spełniająca nierówność $x - 3 \leqslant 0$ jest rozwiązaniem danego równania, stąd $x \leqslant 3$.

Rozwiązaniami równania $|x-3| = 3 - x$ są wszystkie liczby rzeczywiste należące do przedziału $(-\infty, 3\rangle$.

Ćwiczenie 4. Rozwiąż równanie $|x-3| = 3 - x$

a) metodą z przykładu 2. $\qquad$ b) graficznie.

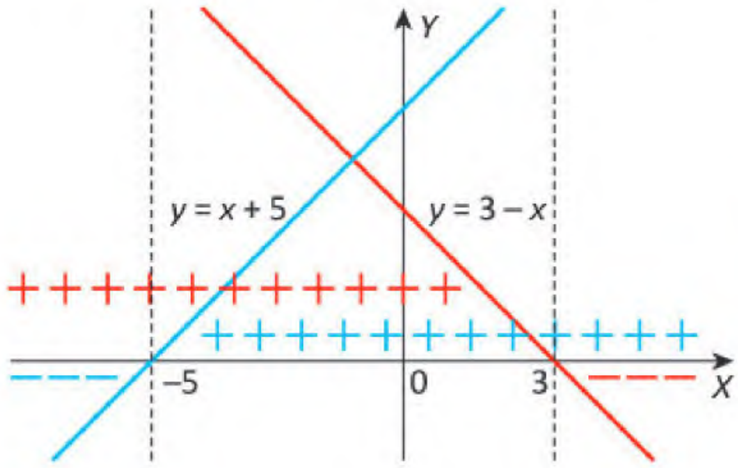
Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $|3-x| - |x+5| = -2x - 2$.

W równaniu $|3-x| - |x+5| = -2x - 2$ występują dwa wyrażenia pod znakiem wartości bezwzględnej: $3 - x$ oraz $x + 5$. Liczby 3 i –5, dla których wyrażenia $3 - x$ oraz $x + 5$ przyjmują wartość 0, dzielą oś liczbową na trzy rozłączne przedziały:

$(-\infty, -5)$, $\langle -5, 3)$ oraz $\langle 3, +\infty)$.

W każdym z tych przedziałów wyrażenia $3 - x$ oraz $x + 5$ przyjmują wartości o stałym znaku: wartości niedodatnie albo nieujemne. Aby określić, jaki to znak, można posłużyć się szkicem wykresów funkcji liniowych $y = 3 - x$ oraz $y = x + 5$ albo siatką znaków (tabela z prawej strony).



	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$

Otrzymujemy alternatywę trzech przypadków:

I. Jeśli $x \in (-\infty, -5)$, to $|3 - x| = 3 - x$ oraz $|x + 5| = -x - 5$. Wówczas:

$3 - x - (-x - 5) = -2x - 2$, stąd

$3 - x + x + 5 = -2x - 2$

$2x = -10$

$x = -5$

$\mathbf{-5 \notin (-\infty, -5)}$

II. Jeśli $x \in \langle -5, 3)$, to $|3 - x| = 3 - x$ i $|x + 5| = x + 5$. Zatem:

$3 - x - (x + 5) = -2x - 2$

$3 - x - x - 5 = -2x - 2$

$0 = 0$

$\mathbf{x \in \langle -5, 3)}$ Każda liczba z przedziału $\langle -5, 3)$ jest rozwiązaniem równania.

III. Jeśli $x \in \langle 3, +\infty)$, to $|3 - x| = -3 + x$ i $|x + 5| = x + 5$. Mamy:

$-3 + x - (x + 5) = -2x - 2$

$-3 + x - x - 5 = -2x - 2$

$2x = 6$

$x = 3$

$\mathbf{3 \in \langle 3, +\infty)}$ Liczba 3 jest rozwiązaniem równania.

Na koniec sumujemy zbiory rozwiązań otrzymane w poszczególnych przypadkach:

$x \in \langle -5, 3) \cup \{3\} \Leftrightarrow x \in \langle -5, 3\rangle$

Zbiorem rozwiązań równania $|3 - x| - |x + 5| = -2x - 2$ jest przedział $\langle -5, 3\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie równanie:
   a) $||x + 2| - 3| = 2$ b) $||x - 1| + 4| = 5$
   c) $||x - 4| - 3| = 2$ d) $|3 - |x - 1|| = 0$
   e) $||x + 1| - 2| = 2$ f) $|5 - |x - 2|| = 1$.

2. Rozwiąż algebraicznie równanie:
   a) $|x+4| = 4 - x$
   b) $5 - 3|x-2| = x$
   c) $3(|x-1|+1) = -2x$
   d) $15 + 2|x-5| = 3x - |x-5|$.
3. Rozwiąż graficznie równanie:
   a) $|2x| = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$
   b) $|x+3| + x = -3$
   c) $3(2 - |x+3|) = x + 9$
   d) $3|x-2| - 1 = -x - 4$.
4. Rozwiąż równanie:
   a) $|x-9| = 9 - x$
   b) $2|3+x| = -2x - 6$
   c) $\sqrt{x^2+10x+25} = x+5$
   d) $(1-x)^2 = \left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)^2$
   e) $3 - x = \sqrt{9-6x+x^2}$
   f) $\sqrt{x^2+8x+16} + 4 = -x$.
5. Rozwiąż algebraicznie równanie:
   a) $|x+1| + |x-4| = 5$
   b) $|2x| - |x+4| = 8$
   c) $|3+x| - |3-x| = 1$
   d) $|1-x| + |x+7| = 4$.
6. Rozwiąż algebraicznie równanie:
   a) $|x+2| - 3|x+1| = x - 1$
   b) $2|x+3| - |x-4| + 2x = 0$
   c) $|2x-5| + 3x = |x+2| - 4$
   d) $x - 2|x| = 4 - 3|x+3|$.
7. Rozwiąż graficznie równanie:
   a) $|5-x| = 4 - \left|\frac{x}{2}\right|$
   b) $|x| - 2 = 4 - 2|x-3|$
   c) $|x-1| - |x+3| = 4$
   d) $2|1-x| + |2x-6| = 4$.
8. Rozwiąż równanie:
   a) $\left|\sqrt{4x^2+20x+25} - 1\right| = 4$
   b) $\left|2\sqrt{x^2-2x+1} - 3\right| = 5$
   c) $\left|6 - \sqrt{4x^2-16x+16}\right| = 2$
   d) $\left|-2 - \sqrt{100+100x+25x^2}\right| = 2$.
9. Rozwiąż równanie:
   a) $2\sqrt{16-8x+x^2} - |x+1| = 2x + 3$
   b) $|-10x-15| = \sqrt{4x^2+12x+9} + 8$
   c) $4 - |2x-7| = x + \sqrt{x^2+2x+1}$.
10. Rozwiąż równanie:
   a) $2|x| = -|3x|$
   b) $4\sqrt{x^2} = -2|x-1|$
   c) $|x-6| \cdot |x+1| = 0$
   d) $|x^2| + 1 = |(x-3)^2|$
   e) $|x+1| + |x-1| = 0$
   f) $|x+2| - 2|x-2| = 0$.

Nierówności z wartością bezwzględną

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówności:

a) $\left|2|x-2|-5\right|>3$ b) $\left|5-|2x+3|\right|\leqslant 4$.

Ad a) <u>I sposób</u> – Rozwiązujemy nierówność algebraicznie.

$$\left|2|x-2|-5\right|>3 \qquad |w|>a \Leftrightarrow (w<-a \vee w>a),\ \text{jeśli } a>0$$

$$2|x-2|-5<-3 \quad \vee \quad 2|x-2|-5>3$$

$$2|x-2|<2 \ /:2 \quad \vee \quad 2|x-2|>8 \ /:2$$

$$|x-2|<1 \quad \vee \quad |x-2|>4$$

$$|w|<a \Leftrightarrow (w>-a \wedge w<a) \qquad |w|>a \Leftrightarrow (w<-a \vee w>a),\ \ \text{jeśli } a>0$$

$$(x-2>-1 \ \wedge \ x-2<1) \quad \vee \quad (x-2<-4 \ \vee \ x-2>4) \qquad \text{stąd}$$

$$(x>1 \ \wedge \ x<3) \quad \vee \quad (x<-2 \ \vee \ x>6),\ \text{czyli}$$

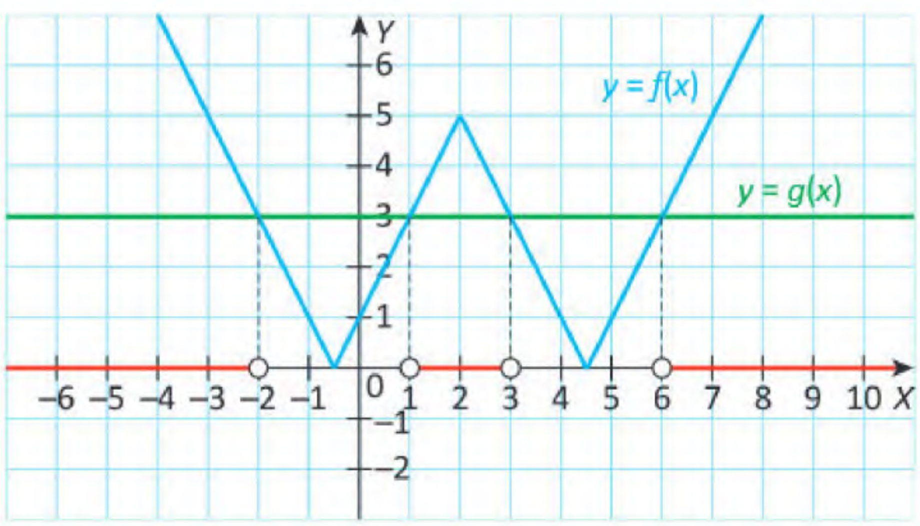
$$x\in(1,3) \quad \vee \quad x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$$

Wyznaczamy sumę otrzymanych zbiorów rozwiązań i otrzymujemy:

$$x\in(-\infty,-2)\cup(1,3)\cup(6,+\infty).$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\left|2|x-2|-5\right|>3$ jest zbiór $(-\infty,-2)\cup(1,3)\cup(6,+\infty)$.

<u>II sposób</u> – Rozwiązujemy nierówność graficznie.
Szkicujemy wykresy funkcji $f(x)=\left|2|x-2|-5\right|$, $g(x)=3$ we wspólnym układzie współrzędnych i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $f(x)>g(x)$.



$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,3)\cup(6,+\infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\left|2|x-2|-5\right|>3$ jest zbiór $(-\infty,-2)\cup(1,3)\cup(6,+\infty)$.

Ad b) Rozwiązujemy nierówność algebraicznie

$$\left|5-|2x+3|\right|\leqslant 4 \qquad |w|\leqslant a \Leftrightarrow (w\geqslant -a \wedge w\leqslant a),\ \text{jeśli } a>0$$

$$5-|2x+3|\geqslant -4 \quad \wedge \quad 5-|2x+3|\leqslant 4$$

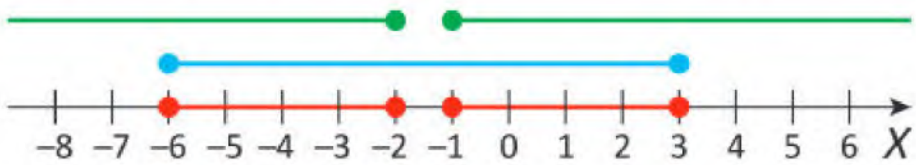
$$-|2x+3|\geqslant -9 \ \ /\cdot(-1) \quad \wedge \quad -|2x+3|\leqslant -1 \ \ /\cdot(-1)$$

$$|2x+3|\leqslant 9 \quad \wedge \quad |2x+3|\geqslant 1$$

$|w| \leqslant a \Leftrightarrow (w \geqslant -a \wedge w \leqslant a)$ $\qquad$ $|w| \geqslant a \Leftrightarrow (w \leqslant -a \vee w \geqslant a)$, jeśli $a > 0$

$$\begin{array}{lcl} (2x+3 \geqslant -9 \ \wedge \ 2x+3 \leqslant 9) & \wedge & (2x+3 \leqslant -1 \ \vee \ 2x+3 \geqslant 1) \\ (2x \geqslant -12 \ \wedge \ 2x \leqslant 6) & \wedge & (2x \leqslant -4 \ \vee \ 2x \geqslant -2) \\ (x \geqslant -6 \ \wedge \ x \leqslant 3) & \wedge & (x \leqslant -2 \ \vee \ x \geqslant -1) \\ x \in \langle -6, 3 \rangle & \wedge & x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle -1, +\infty). \end{array}$$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych zbiorów rozwiązań:



$$x \in \langle -6, -2 \rangle \cup \langle -1, 3 \rangle$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\big|5 - |2x+3|\big| \leqslant 4$ jest zbiór $\langle -6, -2 \rangle \cup \langle -1, 3 \rangle$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż graficznie nierówność z przykładu 1 b).

Przykład 2.

Rozwiążemy algebraicznie nierówność $x - 2|x-1| > -5$.

Ze względu na znak wyrażenia $x - 1$ znajdującego się pod symbolem wartości bezwzględnej rozważamy alternatywę dwóch przypadków:

$$\begin{array}{lcl} \textbf{I.}\ x \in (-\infty, 1) & \vee & \textbf{II.}\ x \in \langle 1, +\infty) \\ \quad x - 2(-x+1) > -5 & & \quad x - 2(x-1) > -5 \end{array}$$

Rozwiązujemy każdą nierówność, uwzględniając przedział, w którym ta nierówność jest określona. Otrzymujemy:

$$\begin{array}{ll} \textbf{I.}\ x + 2x - 2 > -5 & \textbf{II.}\ x - 2x + 2 > -5 \\ \quad 3x > -3 & \quad -x > -7 \\ \quad x > -1 & \quad x < 7 \end{array}$$

$[x \in (-\infty, 1) \wedge x > -1] \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in (-1, 1)}$ $\qquad$ $[x \in \langle 1, +\infty) \wedge x < 7] \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in \langle 1, 7)}$

Na koniec sumujemy zbiory rozwiązań otrzymane w obu przypadkach:

$[x \in (-1, 1) \ \vee \ x \in \langle 1, 7)] \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x \in (-1, 7)}$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $x - 2|x-1| > -5$ jest przedział $(-1, 7)$.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż algebraicznie nierówność $|x+1| - 2x \geqslant 0$.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż nierówności pamiętając, że $|w| \geqslant 0$, gdzie $w \in \boldsymbol{R}$.

a) $|x| + |4 - x| \geqslant 0$ $\qquad$ b) $|x| + |4 - x| < -1$

Przykład 3.

Rozwiążemy algebraicznie nierówność $|x-3|-2x<11-2|x+1|$.
Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych. Liczby 3 i -1 dzielą oś liczbową na trzy rozłączne przedziały:

$$(-\infty, -1),\ \langle -1, 3),\ \langle 3, +\infty).$$

Znaki wyrażeń $x-3$ oraz $x+1$ w tych przedziałach przedstawia poniższa siatka znaków.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

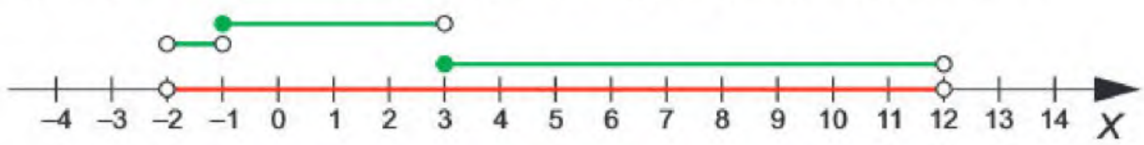
Otrzymujemy alternatywę trzech przypadków.

I. Jeśli $x \in (-\infty, -1)$, to rozwiązujemy nierówność:
$-(x-3)-2x<11-2(-x-1)$, stąd
$-3x+3<13+2x$
$-5x<10$
$x>-2$
$[x \in (-\infty, -1) \wedge x>-2] \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in (-2, -1)}$

II. Jeśli $x \in \langle -1, 3)$, to mamy nierówność:
$-(x-3)-2x<11-2(x+1)$, stąd
$-3x+3<-2x+9$
$-x<6$
$x>-6$
$[x \in \langle -1, 3) \wedge x>-6] \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in \langle -1, 3)}$

III. Jeśli $x \in \langle 3, +\infty)$, to:
$x-3-2x<11-2(x+1)$
$-x-3<9-2x$
$x<12$
$[x \in \langle 3, +\infty) \wedge x<12] \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in \langle 3, 12)}$

Na koniec sumujemy zbiory rozwiązań poszczególnych przypadków:



$x \in (-2, -1) \cup \langle -1, 3) \cup \langle 3, 12) \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in (-2, 12)}$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x-3|-2x<11-2|x+1|$ jest przedział $(-2, 12)$.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Rozwiąż algebraicznie nierówność:
   a) $||x-3|-2|<4$ b) $||x+5|-7| \leqslant 1$
   c) $|3-|x+5||>7$ d) $|4+|x-3|| \geqslant 1$
   e) $|-|2x+1|+4| \leqslant 8$ f) $||3-2x|-3| \leqslant 2$
   g) $|5-\sqrt{16x^2+24x+9}| \geqslant 2$ h) $|2\sqrt{x^2-8x+16}-6| \leqslant 4$
   i) $2|3-5\sqrt{x^2-4x+4}|>9$ j) $|3-\sqrt{x^2+10x+25}|<-8$.
2. Rozwiąż graficznie nierówność:
   a) $||x-3|+2| \geqslant 4$ b) $|3-|x+6|| \leqslant 2$
   c) $||x+5|-1|<1$ d) $||2x-4|-4|>2$
   e) $|3\sqrt{x^2-6x+9}+4|<10$ f) $|2+\sqrt{9x^2+12x+4}|<1$
   g) $|-2-\sqrt{x^2-2x+1}|>2$ h) $|1-2\sqrt{4x^2+8x+4}| \geqslant 3$.
3. Rozwiąż nierówność podwójną:
   a) $2 \leqslant ||x+3|-2|<5$ b) $1<|5-|x-4|| \leqslant 2$
   c) $1<|2|x-1|-3|<7$ d) $4<|3-|2x+5||<11$.
4. Rozwiąż nierówność:
   a) $2|x+8| \geqslant 1-4x$ b) $3x-|5x-1|<8$
   c) $|x-2|-3x>-6$ d) $3+2x \leqslant \sqrt{x^2+4x+4}$.
5. Rozwiąż nierówność:
   a) $|4x+8|-x<31-3|x+3|$ b) $|2x+3|-|4x-3|>0$
   c) $2|x+3|-3|x+1| \leqslant |3x+9|$ d) $|-4-x|+|x-2| \leqslant 2x$.
6. Rozwiąż nierówność:
   a) $|x+1|+1 \geqslant 2x-|x-2|$ b) $|2+x|<|2x|-\sqrt{x^2+4x+4}$
   c) $|-x-3|+\sqrt{x^2+10x+25}>1$ d) $2\sqrt{x^2-4x+4}-3|x+1| \geqslant -4$
   e) $|x+2| \leqslant x+2-\sqrt{x^2-6x+9}$ f) $2|x+3|-|x+4| \leqslant 5-|x+1|$.
7. Rozwiąż nierówność podwójną:
   a) $|2x-1| \leqslant 3 \leqslant x+|x-1|$ b) $\sqrt{x^2-2x+1}<2x \leqslant |x+3|$
   c) $|x-3|-3x \leqslant x+1<|2x|$ d) $2|x-1|+|x+2| \leqslant 6 \leqslant |x-4|-x$.
8. **D** Wykaż, że nierówność $|x+1|<|x-1|+3$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Równania liniowe z parametrem

Przypomnijmy wiadomości o równaniach liniowych, które omawialiśmy w klasie pierwszej.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równania: a) $3x-6=0$ b) $2(x-1)=2x$
c) $4-2x=-2(x-2)$.

Powyższe równania są przykładami równań liniowych.

Definicja 1.

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie, które można przekształcić równoważnie do postaci $ax+b=0$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Dziedziną równania liniowego jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$.

Równanie liniowe $ax+b=0$:

1) ma tylko jedno rozwiązanie $\frac{-b}{a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq 0$. W takim wypadku równanie $ax+b=0$ nazywamy **równaniem stopnia pierwszego** z jedną niewiadomą.
2) jest równaniem tożsamościowym, a jego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$ i $b=0$.
3) jest sprzeczne, a jego zbiór rozwiązań jest zbiorem pustym wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$ i $b \neq 0$.

Przykład 1.

Dane jest równanie liniowe z niewiadomą x i z parametrem k, $k \in \boldsymbol{R}$:

$$(k-2)x-4+k=0.$$

Wyznaczymy wszystkie wartości k, dla których to równanie ma tylko jedno rozwiązanie. Następnie wyznaczymy to rozwiązanie.

Zauważamy, że dane równanie ma postać $ax+b=0$, gdzie $a=k-2$ oraz $b=-4+k$. Równanie to ma jedno rozwiązanie tylko wtedy, gdy

$$k-2 \neq 0, \text{ czyli } k \neq 2.$$

Rozwiązujemy to równanie:

$$(k-2)x-4+k=0$$
$$(k-2)x=4-k \quad / :(k-2), \text{ bo } k \neq 2$$
$$x=\frac{4-k}{k-2}$$

Jeśli $k \in \boldsymbol{R} - \{2\}$, to rozważane równanie ma tylko jedno rozwiązanie. Tym rozwiązaniem jest liczba $\frac{4-k}{k-2}$.

Ćwiczenie 2. Sprawdź, że nie istnieje wartość parametru k, dla której równanie z przykładu 1. miałoby nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 2.

Przeprowadzimy dyskusję istnienia i liczby rozwiązań równania z niewiadomą x

$$m^2x - m = x + 1,$$

w zależności od wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$.

Dane równanie przekształcamy równoważnie:

$$m^2x - m = x + 1$$
$$m^2x - x = m + 1$$
$$\left(\boldsymbol{m^2 - 1}\right) \cdot x = m + 1$$

I. Niech $\boldsymbol{m^2 - 1 \neq 0}$, czyli $\boldsymbol{m \neq 1}$ i $\boldsymbol{m \neq -1}$. Wówczas po podzieleniu stronami ostatniego równania przez $m^2 - 1$ otrzymamy jedyne rozwiązanie tego równania:

$$x = \frac{m+1}{m^2-1}, \quad \text{czyli} \quad x = \frac{m+1}{(m-1)(m+1)} \quad \text{więc} \quad x = \frac{1}{m-1}.$$

Rozpatrujemy pozostałe przypadki:

II. Jeśli $\boldsymbol{m = 1}$, to ostatnie równanie przyjmuje postać:

$(1 - 1)x = 1 + 1$, czyli

$0x = 2$ – jest to równanie sprzeczne.

III. Jeśli $\boldsymbol{m = -1}$, to równanie przyjmuje postać:

$(1 - 1)x = -1 + 1$, czyli

$0x = 0$ – jest to równanie tożsamościowe.

Rozpatrzyliśmy wszystkie wartości parametru m. Podsumujmy:

Jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, to równanie $m^2x - m = x + 1$ ma jedno rozwiązanie: $\frac{1}{m-1}$; jeśli $m = -1$, to każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem tego równania; jeśli $m = 1$, to równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 3.

Zbadamy istnienie i liczbę rozwiązań równania $(k - 2)x = 5 - p$ z niewiadomą x, w zależności od wartości parametrów k i p, gdzie $k \in \boldsymbol{R}$, $p \in \boldsymbol{R}$.

$$(k - 2)x = 5 - p$$

I. Jeśli $k - 2 \neq 0$, czyli $k \neq 2$, to równanie ma jedno rozwiązanie dla każdej liczby rzeczywistej p:

$$x = \frac{5-p}{k-2}.$$

II. Jeśli $k = 2$, to dane równanie przyjmuje postać:

$0x = 5 - p.$

Wówczas:

– Jeśli $p = 5$, to otrzymujemy $0x = 0$ – równanie jest tożsamościowe.
– Jeśli $p \neq 5$, to lewa strona równania ma wartość 0, a prawa jest różna od 0 – równanie jest sprzeczne.

Jeśli $k \in \boldsymbol{R} - \{2\}$ i $p \in \boldsymbol{R}$, to dane równanie ma jedno rozwiązanie, równe $\frac{5-p}{k-2}$; jeśli $k = 2$ i $p = 5$, to każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem danego równania; jeśli $k = 2$ i $p \in \boldsymbol{R} - \{5\}$, to równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 4.

Dane jest równanie $|x + 3| = 5 - m$ z niewiadomą x i parametrem m.

a) Podamy wzór i naszkicujemy wykres funkcji f, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.

b) Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania ujemne.

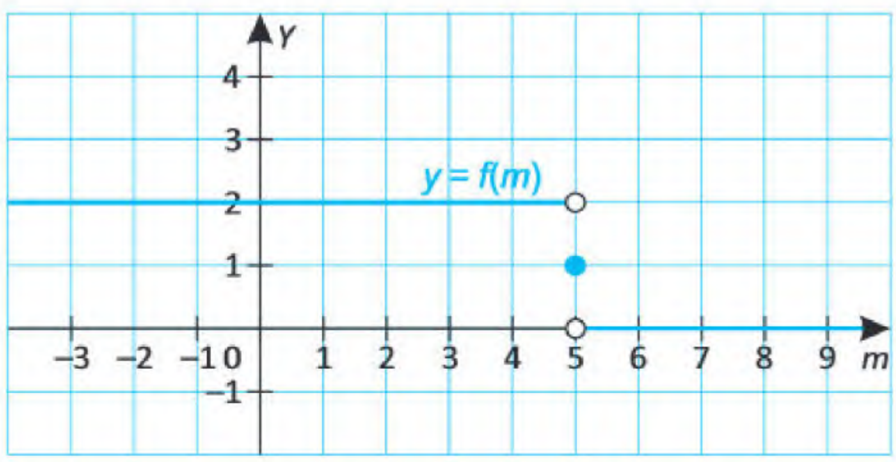
Ad a) Z własności wartości bezwzględnej wynika, że dane równanie:

- ma **dwa** rozwiązania, jeśli $5 - m > 0$, czyli wtedy, gdy $m < 5$. Zatem każdej liczbie m należącej do przedziału $(-\infty, 5)$ funkcja f przyporządkowuje liczbę **2**.
- ma **jedno** rozwiązanie, jeśli $5 - m = 0$, czyli gdy $m = 5$. W takim razie funkcja f liczbie 5 przyporządkowuje liczbę **1**.
- **nie ma** rozwiązań, jeśli $5 - m < 0$, czyli gdy $m > 5$. Wówczas funkcja f każdej liczbie należącej do przedziału $(5, +\infty)$ przyporządkowuje wartość **0**.

Poniżej znajduje się wzór funkcji f oraz jej wykres.

$$f(m) = \begin{cases} 2, \text{ jeśli } m \in (-\infty, 5) \\ 1, \text{ jeśli } m = 5 \\ 0, \text{ jeśli } m \in (5, +\infty) \end{cases}$$

Zauważ, że funkcja f jest określona dla każdej liczby rzeczywistej m.



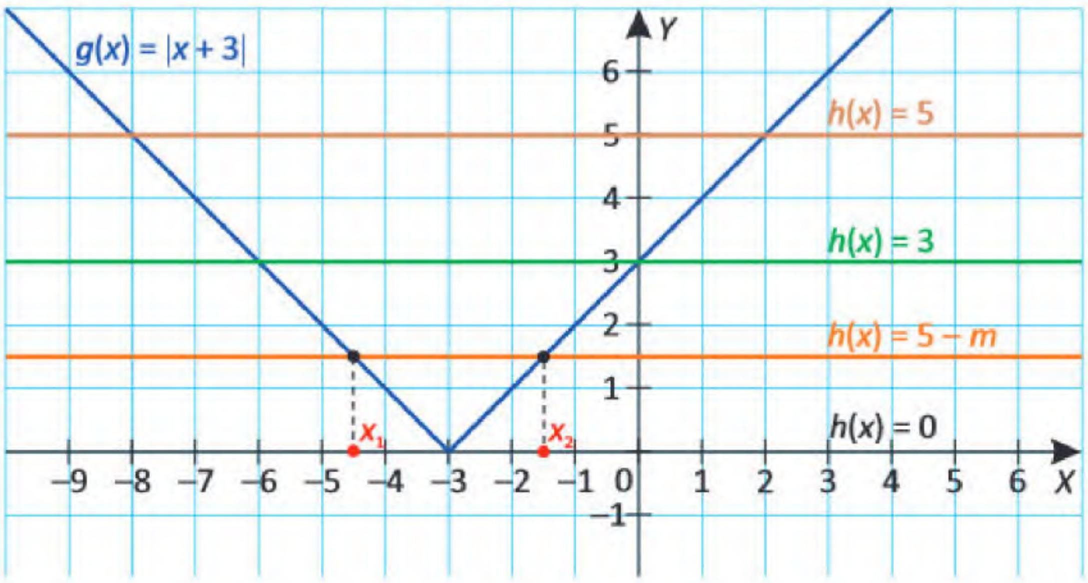
Ad b) Równanie $|x + 3| = 5 - m$ z niewiadomą x, $x \in \boldsymbol{R}$ i parametrem m, $m \in \boldsymbol{R}$, ma dwa różne rozwiązania ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy wykresy funkcji

$g(x) = |x + 3|$ oraz $h(x) = 5 - m$

przecinają się w dwóch punktach, których odcięte x_1 i x_2 są liczbami ujemnymi.

Szkicujemy wykresy funkcji g i h. Funkcja $h(x) = 5 - m$ dla ustalonej wartości m jest funkcją stałą. Jej wykres jest prostą, równoległą do osi OX, przechodzącą przez punkt $(0, 5 - m)$.

Wykres funkcji h zmienia swoje położenie w zależności od wartości parametru m.



Zauważ, że wykresy funkcji g i h przecinają się w dwóch punktach o odciętych ujemnych tylko wtedy, gdy $h(x) \in (0, 3)$, czyli wtedy, gdy $0 < 5 - m < 3$.
Rozwiązujemy otrzymaną nierówność podwójną:

$$0 < 5 - m \quad \wedge \quad 5 - m < 3, \quad \text{stąd}$$
$$m < 5 \quad \wedge \quad m > 2, \quad \text{czyli}$$
$$m \in (2, 5)$$

Równanie $|x + 3| = 5 - m$ ma dwa rozwiązania ujemne tylko wtedy, gdy $m \in (2, 5)$.

Ćwiczenie 3. Odczytaj z powyższego rysunku, dla jakich wartości parametru m równanie $|x + 3| = 5 - m$ ma dwa rozwiązania, z których jedno jest liczbą dodatnią, a drugie – liczbą ujemną.

Sprawdź, czy rozumiesz.
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie liniowe z niewiadomą x ma jedno rozwiązanie. Wyznacz to rozwiązanie.
   a) $3x - m = 0$ b) $mx - m - 1 = 0$
   c) $(m + 1)x = m + 1$ d) $|m - 1|x = 4$
   e) $m^2x + 9 = x$ f) $x - m + 2 = |m - 2|x$.
2. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których równanie liniowe z niewiadomą x jest tożsamościowe, jeśli taka wartość parametru istnieje.
   a) $3kx - 6k = 0$ b) $(1 - 2k)x + 1 = 2k$
   c) $|k - 1|x = \dfrac{k^2}{2}$ d) $(k^2 + 4)x = 4k(1 - x) + k + 10$.

3. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których równanie liniowe z niewiadomą x jest sprzeczne, jeśli taka wartość istnieje.
   a) $px + 3p = 20 - 4x$
   b) $4p^2x - 3 = 2p + 9x$
   c) $p^2x = 4px$
   d) $p + 2 = (|p - 1| - 3)x$.

4. Dane jest równanie z niewiadomą x i z parametrem. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru. W przypadku istnienia rozwiązania – wyznacz je.
   a) $(m^2 + 4)x - m + 2 = 0$
   b) $b^2x = 81x$
   c) $9a(ax + 1) = 5(5x + 3)$
   d) $4kx(k - 1) = 1 - x - 4k^2$.

5. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla których równanie liniowe z niewiadomą x ma co najmniej jedno rozwiązanie.
   a) $(|a| - 4)x = 3a + 6$
   b) $a^2(x + 1) = a(a + 2x) - 1$
   c) $1 + a + |a|x = x$
   d) $|a + 2|x - 7 = a + 5x$.

6. Dane jest równanie z niewiadomą x. Przedyskutuj liczbę rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametrów.
   a) $(a + 3)x - b + 4 = 0$
   b) $a^2x - 9 = 4x - b^2$
   c) $3ax - 2p = x + 6$
   d) $(a - 1)x = (2a - 1)x + b^2 - 9$.

7. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których równanie:
   a) $|x - 4| = k + 2$ ma dwa rozwiązania dodatnie
   b) $|1 - 3x| = 8 - 2k$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków
   c) $|2x - 4| - x = k$ ma dwa rozwiązania dodatnie
   d) $x - 3|x + 2| = \frac{1 - 5k}{3}$ ma dwa rozwiązania ujemne.

8. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla których równanie:
   a) $|x - 4| = 2a$ ma tylko rozwiązania dodatnie
   b) $|2x + 5| = a + 4$ ma tylko rozwiązania ujemne
   c) $|3 + x| = -3a$ ma tylko rozwiązania niedodatnie
   d) $|6 - 2x| = 1 - a$ ma tylko rozwiązania nieujemne.

9. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań równania w zależności od wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji f, która dowolnej liczbie rzeczywistej a przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.
   a) $|x + 2| + 2|x - 1| = a$
   b) $||x + 3| - 4| = |a - 2| - 5$

Nierówności liniowe z parametrem

Przypomnijmy pojęcie nierówności liniowej.

Definicja 1.

Nierównością liniową z jedną niewiadomą x nazywamy nierówność przyjmującą postać: $ax+b>0$ lub $ax+b<0$ lub $ax+b\geqslant 0$ lub $ax+b\leqslant 0$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Jeśli $a\neq 0$, to każdą z nierówności liniowych wymienionych w definicji 1. nazywamy **nierównością pierwszego stopnia** z jedną niewiadomą.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż nierówności:

a) $-3x+6>0$ b) $2x-8\leqslant 2(3+x)$ c) $-x+4>5-x$.

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których zbiór rozwiązań nierówności liniowej $2x+5m\geqslant 3$:

a) jest przedziałem $\langle 4, +\infty)$ b) zawiera się w przedziale $(4, +\infty)$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$2x\geqslant 3-5m$$

$$x\geqslant \frac{3-5m}{2}$$

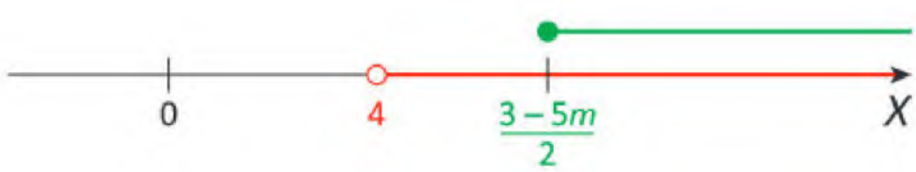
Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left\langle \frac{3-5m}{2}, +\infty\right)$.

Ad a) Zbiór rozwiązań danej nierówności jest przedziałem $\langle 4, +\infty)$ tylko wtedy, gdy

$\frac{3-5m}{2}=4$, czyli

$m=-1$.

Ad b) Zaznaczamy przedziały $(4, +\infty)$ i $\left\langle \frac{3-5m}{2}, +\infty\right)$ na osi liczbowej.



Zauważamy, że $\left\langle \frac{3-5m}{2}, +\infty \right) \subset (4, +\infty)$, jeżeli jest spełniona nierówność:

$\frac{3-5m}{2} > 4,$ czyli

$-5m > 8-3,$ stąd

$m < -1.$

Zbiór rozwiązań nierówności liniowej $2x + 5m \geqslant 3$ zawiera się w przedziale $(4, +\infty)$ tylko wtedy, gdy $m \in (-\infty, -1)$.

Ćwiczenie 2. Dany jest wzór funkcji liniowej f. Na podstawie wykresu tej funkcji podaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne. Czy funkcja f jest rosnąca, malejąca czy stała?

a) $f(x) = -x + 3$ b) $f(x) = 2x$ c) $f(x) = -4$

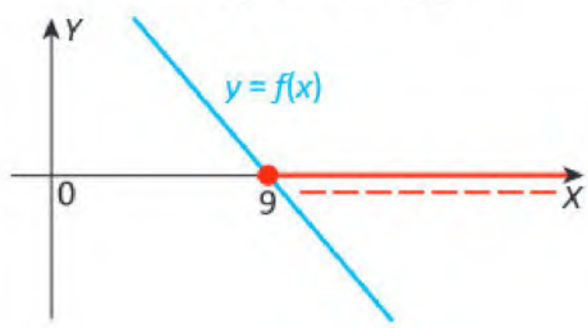
Przykład 2.

Wyznaczymy wartość parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla której zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $px + 3p^2 \leqslant 0$ jest przedział $\langle 9, +\infty)$.

Tym razem współczynnik przy niewiadomej x zależy od parametru p.

Rozpatrujemy funkcję liniową $f(x) = px + 3p^2$. Funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie w przedziale $\langle 9, +\infty)$ tylko wtedy, gdy współczynnik kierunkowy p jest ujemny i jednocześnie miejscem zerowym funkcji f jest liczba 9 (zobacz rysunek obok).

Szkic wykresu funkcji f



Otrzymujemy:

$$
\begin{array}{lll}
p < 0 & \wedge & f(9) = 0 \\
p < 0 & \wedge & 9p + 3p^2 = 0 \\
 & & p^2 + 3p = 0 \\
 & & p(p+3) = 0 \\
p < 0 & \wedge & (p = 0 \vee p = -3). \text{ Zatem} \\
p = -3. & &
\end{array}
$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $px + 3p^2 \leqslant 0$ jest przedział $\langle 9, +\infty)$ tylko wtedy, gdy $p = -3$.

Ćwiczenie 3. Dla jakiej wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, zbiorem rozwiązań nierówności z przykładu 2. jest przedział $(-\infty, -1\rangle$?

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(4-k^2)\,x+k+1<0$ jest zbiór pusty.

Rozważamy funkcję liniową $g(x)=(4-k^2)x+k+1$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $(4-k^2)x+k+1<0$ jest zbiór pusty wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja liniowa $g(x)=(4-k^2)x+k+1$ nie przyjmuje wartości ujemnych. To znaczy, że

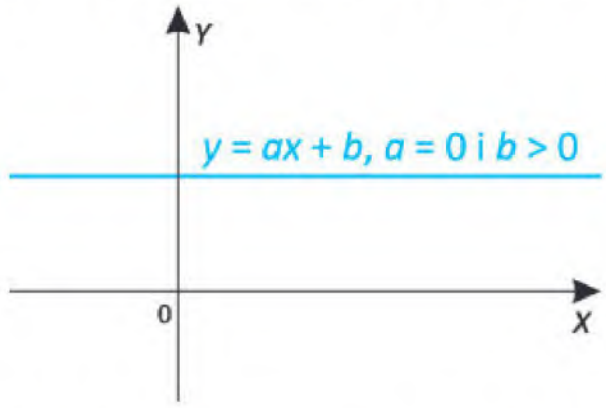
$g(x) \geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Funkcja liniowa g jest stała, a jej jedyną wartością jest liczba nieujemna. Mamy:

$4-k^2=0 \ \wedge \ k+1 \geqslant 0$

$k \in \{-2, 2\} \ \wedge \ k \geqslant -1,$ stąd

$k=2.$



Zbiór rozwiązań danej nierówności $(4-k^2)x+k+1<0$ jest zbiorem pustym tylko wtedy, gdy $k=2$.

Ćwiczenie 4. Czy istnieje wartość parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla której zbiór rozwiązań nierówności $(a+1)x+a>1$ jest zbiorem pustym?

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji

$g(x)=\sqrt{(|m+2|-3)x+m}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Zauważ, że $D_g=\boldsymbol{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(|m+2|-3)x+m \geqslant 0$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Rozpatrujemy funkcję liniową $f(x)=(|m+2|-3)x+m$. Ma ona wartości nieujemne dla każdej liczby rzeczywistej x, tylko wtedy, gdy jest funkcją stałą, przyjmującą wartość nieujemną. Otrzymujemy:

$|m+2|-3=0 \quad \wedge \quad m \geqslant 0$ Jeśli $f(x)=ax+b$, to $a=0 \wedge b \geqslant 0$.

$|m+2|=3 \quad \wedge \quad m \geqslant 0$

$m \in \{-5, 1\} \quad \wedge \quad m \geqslant 0$

Zatem $m=1$.

Dziedziną funkcji $g(x)=\sqrt{(|m+2|-3)x+m}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$ tylko wtedy, gdy $m=1$.

Ćwiczenie 5. Czy istnieje wartość parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla której zbiorem rozwiązań nierówności $|p+4|x+2p>0$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$?

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których:
   a) zbiór rozwiązań nierówności $3x < 12 - 8m$ jest przedziałem $(-\infty, 10)$,
   b) zbiór rozwiązań nierówności $-2x + 4m - 7 > 0$ jest przedziałem $(-\infty, -4)$.

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiór rozwiązań danej nierówności jest przedziałem $\langle 0, +\infty)$.
   a) $(p-1)x + 3 - p \geqslant 0$
   b) $(p+1)x - 2p^2 + 8 \leqslant 0$

3. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności:
   a) $2(x-1) > -3a$ zawiera się w przedziale $(7, +\infty)$,
   b) $10x \leqslant a - 4$ zawiera się w przedziale $(-\infty, 1)$,
   c) $2(a-1) - 4x \geqslant a + x$ zawiera się w przedziale $(-\infty, 3\rangle$,
   d) $4a - x < 2(1-a)$ zawiera się w przedziale $\langle -2, +\infty)$.

4. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności:
   a) $3m + 2x > 4(x - 2m)$ jest przedziałem $(-\infty, 5 + 3m)$,
   b) $\frac{x-m}{3} > \frac{m+4-2x}{2}$ jest przedziałem $(2 + m, +\infty)$,
   c) $\frac{x}{2} \geqslant \frac{2}{3} + \frac{m}{3}$ zawiera się w przedziale $(2m - 6, +\infty)$,
   d) $0{,}5x \geqslant \frac{m-2}{10}$ zawiera się w przedziale $\left\langle \frac{3-m}{2}, +\infty \right)$.

5. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiorem rozwiązań nierówności:
   a) $(p-3)x + 8p > 0$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$,
   b) $(|p| - 6)x + 3p - 6 \leqslant 0$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$,
   c) $(|p-1| + 3)x - 2p + 8 > 0$ jest zbiór pusty,
   d) $(4p^2 - 81)x + 3p - 9 \leqslant 0$ jest zbiór pusty.

6. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których dziedziną funkcji:
   a) $f(x) = \sqrt{-5x + m + 1}$ jest przedział $(-\infty, -1\rangle$,
   b) $f(x) = \sqrt{(m^2 - 1)x + m + 3}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$,
   c) $f(x) = \sqrt{(|m+2| - 3)x - 10 - m}$ jest przedział $\langle 2, +\infty)$,
   d) $f(x) = \sqrt{2 - m + (|1-m| - 2)x}$ jest przedział $(-\infty, -1\rangle$.

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem

Przypomnijmy: układem równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y nazywamy koniunkcję takich równań i zapisujemy:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \text{gdzie } a_1{}^2+b_1{}^2>0 \text{ i } a_2{}^2+b_2{}^2>0.$$

UWAGA: Nierówność $a^2 + b^2 > 0$ oznacza, że liczby a oraz b nie są jednocześnie równe zero.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż algebraicznie dane układy równań.

a) $\begin{cases} 2x-4y=6 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-4y=6 \\ 2y-x=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x+y=4 \\ 4x-2y=1 \end{cases}$

Teraz poznasz kolejną algebraiczną metodę rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi – zwaną metodą wyznacznikową.

Wróćmy do naszego układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

$$(*) \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}, \text{ gdzie } a_1{}^2+b_1{}^2>0 \text{ i } a_2{}^2+b_2{}^2>0$$

i wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$W=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1$$

$$W_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1\cdot b_2-c_2\cdot b_1 \qquad W_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot c_2-a_2\cdot c_1$$

Liczbę W nazywamy **wyznacznikiem głównym** danego układu równań, liczbę W_x – wyznacznikiem niewiadomej x, a liczbę W_y – wyznacznikiem niewiadomej y.

Pokażemy, że wyznaczniki W, W_x, W_y jednoznacznie pozwalają stwierdzić, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.
W tym celu wyznaczamy x, stosując metodę przeciwnych współczynników. Mnożymy pierwsze równanie układu $(*)$ przez b_2, a drugie równanie układu przez $(-b_1)$. Następnie dodajemy stronami otrzymane w ten sposób równania:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-c_2b_1 \end{cases} \\ \hline a_1b_2x-a_2b_1x=c_1b_2-c_2b_1 \end{array}$$

Otrzymujemy równanie

$$(a_1b_2 - a_2b_1) \cdot x = c_1b_2 - c_2b_1$$

które możemy zapisać krócej za pomocą wyznaczników:

$$W \cdot x = W_x.$$

Aby wyznaczyć y, pomnóż pierwsze równanie danego układu przez $(-a_2)$, zaś drugie równanie – przez a_1. Po dodaniu stronami otrzymanych w ten sposób równań otrzymasz równanie:

$$(a_1b_2 - a_2b_1) \cdot y = a_1c_2 - a_2c_1, \text{ czyli}$$

$$W \cdot y = W_y.$$

Otrzymaliśmy koniunkcję:

$$W \cdot x = W_x \quad \text{i} \quad W \cdot y = W_y.$$

Jeśli założymy, że $W \neq 0$ i do układu równań $(*)$ w miejsce x wstawimy liczbę $\frac{W_x}{W}$, a w miejsce y wstawimy liczbę $\frac{W_y}{W}$, to okaże się, że para liczb $\left(\frac{W_x}{W}, \frac{W_y}{W}\right)$ jest rozwiązaniem tego układu równań. Układ równań $(*)$ jest wtedy układem oznaczonym.
Można wykazać, że jeśli $W = W_x = W_y = 0$, to układ równań $(*)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, czyli jest układem nieoznaczonym.
Można też udowodnić, że jeśli $W = 0$ i co najmniej jeden z wyznaczników W_x, W_y jest różny od zera, to układ równań $(*)$ nie ma rozwiązań, czyli jest układem sprzecznym.

UWAGA: Powyższe rozważania były prowadzone przy założeniu, że wszystkie współczynniki a_1, b_1, a_2, b_2 są różne od zera. Łatwo sprawdzić bezpośrednio, że wszystkie wnioski są prawdziwe również w przypadku, gdy jeden ze współczynników a_1, b_1 lub jeden ze współczynników a_2, b_2 jest równy zeru.

Twierdzenie 1.

Dany jest układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \text{gdzie } a_1^2 + b_1^2 > 0 \text{ i } a_2^2 + b_2^2 > 0$$

którego wyznaczniki mają postać:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Wówczas układ ten:

1) ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $W \neq 0$, które ma postać:

(x, y), gdzie $x = \frac{W_x}{W}$ i $y = \frac{W_y}{W}$,

2) ma nieskończenie wiele rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $W = W_x = W_y = 0$,
3) nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $W = 0 \wedge (W_x \neq 0 \vee W_y \neq 0)$.

Przykład 1.

Stosując wyznaczniki, rozwiążemy układy równań:

a) $\begin{cases} 3x+7y=5 \\ 4x+5y=-6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+2y=0 \\ \dfrac{1}{6}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y=0 \end{cases}$

Ad a) Obliczamy wyznaczniki układu:

$$W=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-4\cdot 7=15-28=-13, \qquad W\neq 0.$$

$$W_x=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}=5\cdot 5-(-6)\cdot 7=67 \qquad W_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=3\cdot(-6)-4\cdot 5=-38$$

Na podstawie twierdzenia 1.1 otrzymujemy:

$$\begin{cases} x=\dfrac{67}{-13} \\ y=\dfrac{-38}{-13} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x=-5\dfrac{2}{13} \\ y=2\dfrac{12}{13} \end{cases}$$

Ad b)

$$W=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ \dfrac{1}{6} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

$$W_x=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix}=0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-0\cdot 2=0-0=0 \qquad W_y=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \dfrac{1}{6} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Na podstawie twierdzenia 1.2 wnioskujemy, że układ równań jest nieoznaczony. Wyznaczamy z pierwszego równania niewiadomą y, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$ i stwierdzamy, że rozwiązaniami układu są pary liczb mające postać $\left(x, \dfrac{\sqrt{3}}{6}x\right)$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż metodą wyznacznikową układ równań $\begin{cases} 0{,}75x-0{,}4y=1 \\ 15x-8y=12 \end{cases}$.

Przykład 2.

Przeprowadzimy dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=-1 \end{cases}$

ze względu na wartość parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie to najłatwiej rozwiązać, stosując metodę wyznacznikową.
Obliczamy wyznaczniki:

$$W=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1 \qquad W_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix}=m+1 \qquad W_y=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-m-1$$

1) Najpierw wyznaczamy te wartości parametru m, dla których rozważany układ równań jest oznaczony. Zgodnie z twierdzeniem 1.1 ma być spełniony warunek: $W \neq 0$. Mamy zatem:
   $W \neq 0 \Leftrightarrow m^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (m \neq 1 \wedge m \neq -1)$

Jeśli $m \in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$, to układ jest oznaczony i spełnia go para liczb (x, y), gdzie:

$$\begin{cases} x=\dfrac{m+1}{m^2-1} \\ y=\dfrac{-m-1}{m^2-1} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{m-1} \\ y=\dfrac{1}{1-m} \end{cases}$$

Pozostają do zbadania dwa przypadki: $m=1$ oraz $m=-1$.

2) Jeśli $m=1$, to otrzymujemy: $W=0$, $W_x=2$, $W_y=-2$. Zatem rozważany układ jest sprzeczny.
3) Jeśli $m=-1$, to mamy: $W=0$, $W_x=0$, $W_y=0$. Wnioskujemy więc, że dany układ jest nieoznaczony.

Aby wyznaczyć jego rozwiązanie wstawiamy -1 w miejsce m do układu wyjściowego i otrzymujemy $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$.

Rozwiązaniami układu są wszystkie pary liczb mające postać $(x, x+1)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.
Podsumujmy:

1) Jeśli $m \in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$, to układ równań spełnia tylko jedna para liczb $\begin{cases} x=\dfrac{1}{m-1} \\ y=\dfrac{1}{1-m} \end{cases}$.
2) Jeśli $m=1$, to układ równań nie ma rozwiązań.
3) Jeśli $m=-1$, to układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań mających postać $(x, x+1)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Ćwiczenie 3. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań $\begin{cases} (p-2)x-y=-p \\ x+py=1 \end{cases}$ ze względu na wartość parametru p, gdzie $p \in \boldsymbol{R}$.

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których wykresy funkcji liniowych

$$f(x) = 4 - \frac{k}{2}x \text{ i } g(x) = -2x + k$$

przecinają się w jednym punkcie $P(x, y)$ takim, że $|y + x| \geqslant 3$.

Najpierw obliczymy współrzędne punktu, w którym przecinają się wykresy funkcji f i g. W tym celu rozwiążemy układ równań utworzony przez równania prostych będących wykresami tych funkcji. Mamy:

$$\begin{cases} y = 4 - \frac{k}{2}x \\ y = -2x + k \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}k \cdot x + y = 4 \\ 2x + y = k \end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}k & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}k - 2 = \frac{1}{2}(k - 4), \qquad W_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 4 - k = -(k - 4),$$

$$W_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}k & 4 \\ 2 & k \end{vmatrix} = \frac{1}{2}k^2 - 8 = \frac{1}{2}(k^2 - 16) = \frac{1}{2}(k - 4)(k + 4)$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie tylko wtedy, gdy $W \neq 0$, czyli $k \neq 4$. Wówczas rozwiązaniem układu jest para liczb (x, y), gdzie:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-(k-4)}{\frac{1}{2}(k-4)} \\ y = \dfrac{\frac{1}{2}(k-4)(k+4)}{\frac{1}{2}(k-4)} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = k + 4 \end{cases}$$

Jeśli $k \in \mathbf{R} - \{4\}$, to wykresy funkcji f i g przecinają się w jednym punkcie $P(-2, k + 4)$. Wyznaczamy teraz wartości k, dla których współrzędne punktu P spełniają warunek:

$|y + x| \geqslant 3$

$|k + 2| \geqslant 3 \wedge k \in \mathbf{R} - \{4\}$, stąd $k \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 1, +\infty) \wedge k \in \mathbf{R} - \{4\}$

$k \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Wykresy funkcji $f(x) = 4 - \frac{k}{2}x$ i $g(x) = -2x + k$ przecinają się w takim punkcie $P(x, y)$, że $|x + y| \geqslant 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Rozwiąż układ równań, stosując wyznaczniki:

a) $\begin{cases} x-4y=3 \\ 2x+y=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=8 \\ x=-2y+1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+7y=5 \\ 4x-5y=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x+10y=11 \\ \dfrac{3x-7}{4}=y \end{cases}$ e) $\begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)x+\left(\sqrt{3}-2\right)y=\sqrt{3}+2 \\ \left(\sqrt{3}+2\right)x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=\sqrt{2}-1 \end{cases}$

2. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań z parametrem m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

a) $\begin{cases} 3x-y=m \\ mx-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x-my=2 \\ x+my=2m \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+4y=1 \\ x+my=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx+y=3 \\ 2mx-my=6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x-my=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} mx+2y=-1 \\ 8x+my=m+6 \end{cases}$

D 3. Wykaż, że jeśli $p \in \boldsymbol{R} - \{-3\}$ i para (x, y) jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} (p+6)x+9y=1 \\ 3x-3py=1 \end{cases}$, to $\dfrac{x}{3y}+1=0$.

4. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x+3y=2k+5 \\ 3x+4y=k-1 \end{cases}$ jest taka para liczb (x, y), że $1 < x+y \leqslant 3$.

5. Dla jakich wartości parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, wykresy funkcji liniowych $y=\frac{1}{3}x+\frac{a-2}{6}$ oraz $y=\frac{3}{7}x+\frac{2a+9}{7}$ przecinają się w punkcie $P(x, y)$, który należy do IV ćwiartki układu współrzędnych i nie należy do żadnej osi tego układu?

6. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, wykresy funkcji liniowych $y=1{,}5x-2m+4$ oraz $y=1{,}25x-m$ przecinają się w punkcie $B(x, y)$, który należy do wykresu funkcji $h(x)=-x+8$?

7. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których wykresy funkcji liniowych $f(x)=-2x+p+1$ oraz $g(x)=x-p+2$ przecinają się w takim punkcie $B(x, y)$, że jego współrzędne spełniają równanie $|x|+|y|=p$.

D 8. Wykaż, że dla każdej rzeczywistej wartości parametru m wykresy funkcji liniowych $f(x)=2x-m+6$ oraz $g(x)=-x+2m+3$ przecinają się w punkcie $C(x, y)$, którego współrzędne spełniają nierówność $|x-1|-|5-y| \leqslant 1$.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2.

Test

1. Liczba $|-8+2|-|10-1|$ jest równa:
   A. -3 B. 3 C. -15 D. 15

2. Wartość iloczynu $\left|3-2\sqrt{2}\right| \cdot \left|-3-2\sqrt{2}\right|$ jest równa:
   A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

3. Jeśli $x \in (-1, 7)$, to wyrażenie $2|x+1|-|7-x|$ można zapisać w postaci:
   A. $-x-9$ B. $3x-5$ C. $x+9$ D. $-3x+5$

4. Wiadomo, że liczby a i b są ujemne oraz $a<b$. Wobec tego wyrażenie $|b-a| \cdot |a+b|$ jest równe:
   A. b^2-a^2 B. $a^2+2ab+b^2$ C. a^2-b^2 D. $a^2-2ab+b^2$

5. Liczbą równoodległą od liczb $\sqrt{27}-4$ i $6-\sqrt{75}$ na osi liczbowej jest liczba:
   A. $8\sqrt{3}-10$ B. $10-8\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}-1$ D. $1-\sqrt{3}$

6. Jeśli $m \in (-\infty, 2)$, to odległość na osi liczbowej między liczbami $4m-7$ i $3-m$ jest równa:
   A. $5m-10$ B. $-5(m-2)$ C. $3m-10$ D. $-5m-4$

7. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|2x-3|=|x|+5$.
   A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

8. Równanie $|-x-1|=-3$:
   A. jest równoważne równaniu $|x+1|=3$
   B. ma dwa rozwiązania ujemne
   C. ma jedno rozwiązanie
   D. jest sprzeczne

9. Suma rozwiązań równania $|5-x|=7$ jest liczbą:
   A. ujemną B. złożoną C. nieparzystą D. pierwszą

10. Wskaż równanie, którego rozwiązaniami są liczby -4 oraz 2.
    A. $|x-4|=2$ B. $|x-2|=4$ C. $|x+1|=3$ D. $|x-1|=3$

11. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba $2\sqrt{6}$.
    A. $|x-4| \leqslant 1$ B. $|x-5|>2$ C. $|x+1| \geqslant 7$ D. $|x+3|<2$

12. Wskaż rysunek, na którym zaznaczony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|-x+2|>1$.

A. 

B. 

C. 

D. 

13. Wskaż nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział liczbowy $(-6, 4)$.
A. $|x+1|<5$ B. $|x+5|<1$ C. $|x-1|<5$ D. $|x-5|<1$

14. Zbiór rozwiązań nierówności $|-x-6| \leqslant 0$ jest:
A. pusty
B. przedziałem liczbowym
C. sumą dwóch rozłącznych przedziałów liczbowych
D. zbiorem jednoelementowym

Zadania otwarte

15. Rozwiąż równanie:

a) $\dfrac{|x-\sqrt{3}|}{2}=1\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{|2-x|}{5}=\dfrac{|x-2|}{3}$ c) $\dfrac{|3+x|}{4}-\dfrac{|-x-3|}{2}=\dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{5|x+2|+3}{4}=2$ e) $6|x-7|-2|7-x|=2|-x+7|+8$

16. Wyznacz liczbę k, wiedząc, że jednym z rozwiązań równania $|k+1-x|=4$ jest liczba -8. Dla wyznaczonej liczby k podaj pozostałe rozwiązania tego równania.

17. Rozwiąż nierówność:

a) $3|-x-5|-|x+5| \leqslant 4|5+x|-6$

b) $\dfrac{|x-0{,}2|}{3}-\dfrac{1}{6} \geq \dfrac{\left|\frac{1}{5}-x\right|}{4}-1$

c) $3|x+3\sqrt{2}|-8|\sqrt{18}+x| > |-x-3\sqrt{2}|-12$

d) $2|8-x|-\sqrt{3} \geqslant 3|x-8|-\sqrt{108}$.

18. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ oraz $A \cup B$, wiedząc, że A jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $2|x-1|-4 \leqslant 0$, B jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x+2|>3$.

D 19. Wykaż, że iloczyn liczb spełniających nierówność podwójną $9 \leqslant 2|x-3|+5 \leqslant |3-x|+7$ jest liczbą podzielną przez 5.

D 20. Wykaż, że dla każdej liczby c należącej do przedziału $\langle 1, +\infty)$ wartość wyrażenia $2|c|-|-5-c|-|1-c|+8$ jest stała.

D 21. Wykaż, że jeśli a jest liczbą rzeczywistą ujemną, zaś b – liczbą rzeczywistą dodatnią, to prawdziwa jest zależność: $2a^2+|b-2a|\cdot|-b+a|+|ab|=(b-2a)^2$.

D 22. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych ujemnych a i b, gdzie $a>b$, prawdziwa jest zależność $(a-2)^2+|3a+b-12|-|a-b|=(a-4)^2$.

23. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $|5-2|x-3||=7$ b) $5\cdot\sqrt{x^2-6x+9}=5$ c) $2|x+2|-3|2+x|=5$.

24. Rozwiąż algebraicznie nierówność:
a) $\left||x+5|-2\right| \leqslant 2$ b) $\left||3-5x|-1\right| > 8$ c) $5-2|x-3| < 2x-|x+5|$.

25. Rozwiąż graficznie równanie:
a) $|x+2|-1=3-|x-2|$ b) $\left||6-x|-2\right|=2$ c) $\left|2x-|x+1|\right|=-0{,}6x+3{,}8$.

26. Rozwiąż graficznie nierówność:
a) $\left||x+5|-1\right| \geqslant 1$ b) $|x-1|-2|x+3| \leqslant -\frac{5}{7}x-5$ c) $\left||x-2|-x\right| > 2$.

27. Dane jest równanie liniowe z niewiadomą x. Przedyskutuj liczbę rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$.
a) $(k+1)x=k^2-1$ b) $(5-k)x-k=5$ c) $k^2(x-2)=8(2x+k)$.

28. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których:
a) rozwiązaniem równania $m^2x+2=4x+m$ jest każda liczba rzeczywista,
b) zbiór rozwiązań równania $(m^2-9)x+m-3=0$ jest pusty.

29. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności:
a) $\frac{3x+7}{2} \geq 5-p$ jest przedziałem $\langle 2, +\infty)$,
b) $px+p^2-12p < 0$ jest przedziałem $(-\infty, 10)$.

30. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności $\frac{2x-1}{4} > \frac{k-1}{8}$ zawiera się w przedziale $\left\langle \frac{2-k}{2}, +\infty \right)$.

31. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$ tak, aby zbiorem rozwiązań nierówności:
a) $(|a-1|-5)x+a+3<0$ był zbiór $\boldsymbol{R}$ b) $(a^2+1)x<2a(x-1)$ był zbiór pusty.

32. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie:
a) $|2x+3|=m+2$ ma dwa rozwiązania ujemne,
b) $|x-3|+|x+5|=m+1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

33. Naszkicuj wykres funkcji $y=g(m)$, która każdej wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania:
a) $2|x+1|-m=|2-x|$ b) $\left|3-|x-4|\right|=2+m$.

34. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań $\begin{cases} ax+4y=4 \\ x+ay=2 \end{cases}$, ze względu na wartość parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$.

35. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których wykresy funkcji liniowych $f(x) = \frac{1}{2}x-\frac{k+5}{2}$ oraz $g(x) = -0{,}4x+\frac{1-7k}{5}$ przecinają się w takim punkcie $P(x, y)$, że jego współrzędne spełniają nierówność $|x| < |y|$.

3. Funkcja kwadratowa

Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej z klasy 1.

Powtórzymy i uzupełnimy Twoje wiadomości o funkcji kwadratowej.

Definicja 1.

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Liczby rzeczywiste a, b, c nazywamy współczynnikami funkcji kwadratowej. Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Wzór funkcji $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej**.

Przykład 1.

Wyznaczymy współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty: $A(0, 3)$, $B(-1, 6)$ i $C(1, 2)$.

Wiemy, że $f(0) = 3$, $f(-1) = 6$ oraz $f(1) = 2$. Obliczamy:

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, stąd $f(0) = c$, czyli $c = 3$

$6 = f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 = a - b + 3$, stąd $a - b = 3$

$2 = f(1) = a + b + 3$, stąd $a + b = -1$

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = -1 \end{cases}$ i otrzymujemy $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

Szukane współczynniki funkcji kwadratowej to: $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$.

Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, przecina oś OY w punkcie $(0, c)$.

Jeśli $b = c = 0$, to funkcja kwadratowa ma wzór $y = ax^2$.

Ćwiczenie 1. Naszkicuj wykresy funkcji: a) $y = \frac{1}{3}x^2$ b) $y = -2x^2$.

Na ich podstawie omów własności funkcji $y = ax^2$, gdy $a > 0$ oraz gdy $a < 0$.

Ćwiczenie 2. Wykres funkcji kwadratowej $y=-\frac{1}{2}x^2$ przesuń równolegle:

a) o wektor $[-1, 0]$, czyli o 1 jednostkę w lewo wzdłuż osi OX,
b) o wektor $[0, 3]$, czyli o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY,
c) o wektor $[-1, 3]$, czyli o 1 jednostkę w lewo wzdłuż osi OX, a następnie o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY.

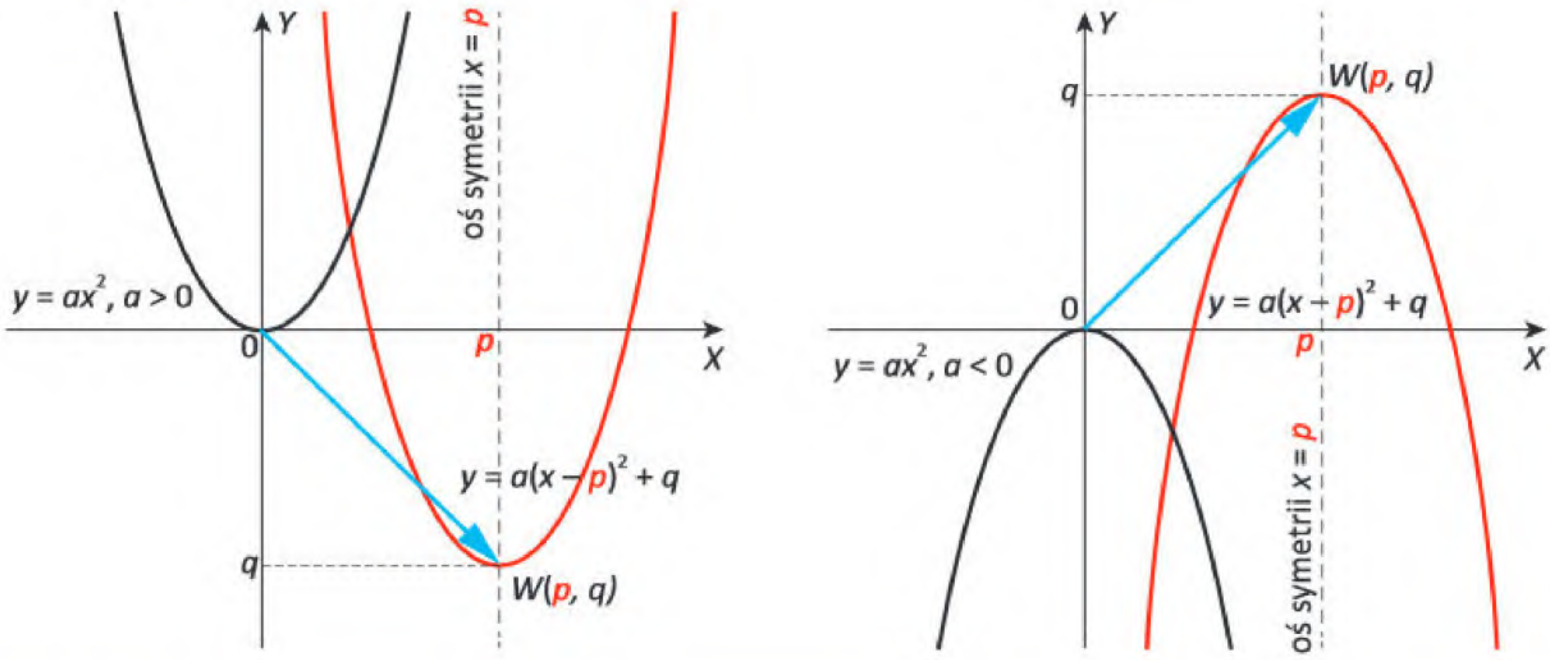
Podaj wzory funkcji, których wykresy otrzymasz.

Po przesunięciu równoległym wykresu funkcji kwadratowej $y=ax^2$, $a \neq 0$, o wektor $[p, q]$, otrzymujemy wykres funkcji $y=a(x-p)^2+q$.

Wzór funkcji $y=a(x-p)^2+q$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej**.

Wykresem funkcji $y=a(x-p)^2+q$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku $W(p, q)$, ramionami skierowana w górę wtedy, gdy $a > 0$, zaś w dół wtedy, gdy $a < 0$. Osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x=p$.

Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.

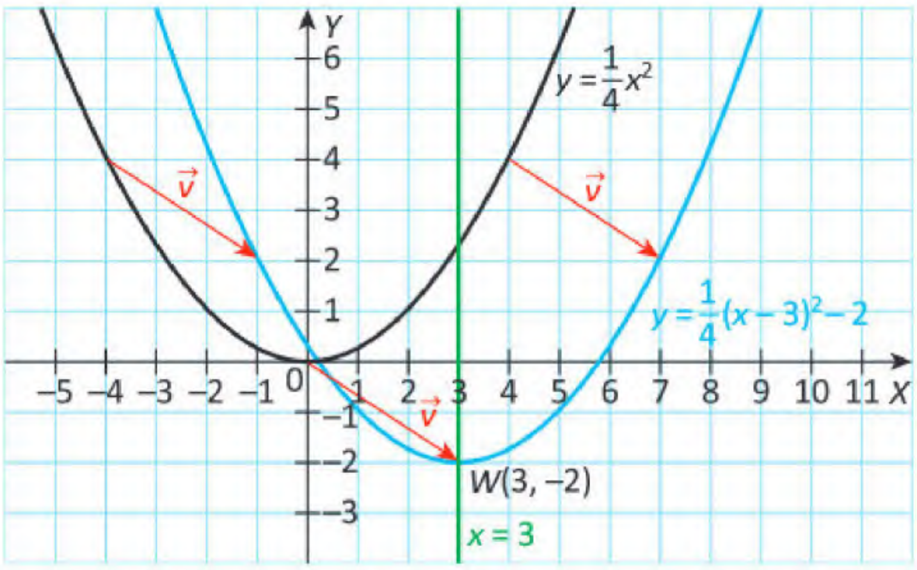


Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji kwadratowej $f(x)=\frac{1}{4}(x-3)^2-2$. Na podstawie tego wykresu podamy:

a) zbiór wartości funkcji f,
b) równanie osi symetrii wykresu tej funkcji,
c) maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.

Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 2$ otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji kwadratowej $y = \frac{1}{4}x^2$ o wektor $[3, -2]$, czyli o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi OX, a następnie o 2 jednostki w dół wzdłuż osi OY. Wierzchołkiem szukanej paraboli jest punkt $W(3, -2)$. Parabola zwrócona jest ramionami w górę, bo współczynnik przy x^2 jest dodatni.



a) Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -2, +\infty)$.
b) Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = 3$, zaznaczona na rysunku kolorem zielonym.
c) Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 3, +\infty)$.

Ćwiczenie 3. Na podstawie wykresu funkcji $y = -x^2$ naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -(x+2)^2 + 4$. Odczytaj z wykresu własności funkcji f.

Ćwiczenie 4. Podaj miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

a) $f(x) = (x-1)^2$ b) $g(x) = x^2 - 4$

Przykład 3.

Napiszemy wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc, że największą wartość, równą 4, funkcja przyjmuje dla argumentu -3, a do jej wykresu należy punkt $A(1, -6)$.

Funkcja kwadratowa przyjmuje wartość największą, zatem parabola będąca wykresem tej funkcji jest skierowana ramionami w dół. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $W(-3, 4)$, stąd $p = -3$ i $q = 4$. Wzór szukanej funkcji można zapisać w postaci kanonicznej:

$y = a(x+3)^2 + 4$, gdzie $a < 0$.

Współczynnik a obliczamy na podstawie informacji, że punkt $A(1, -6)$ należy do wykresu tej funkcji. Mamy:

$-6 = a \cdot (1+3)^2 + 4$ stąd

$a = -\frac{5}{8}$

Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej to $y = -\frac{5}{8}(x+3)^2 + 4$.

Przykład 4.

Wyznaczymy równanie osi symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej f, jeśli $f(-3)=f(5)=2$.

Funkcja f dla argumentów -3 i 5 przyjmuje tę samą wartość, równą 2. Punkty $(-3, 2)$ i $(5, 2)$ należą do wykresu funkcji f i są położone symetrycznie względem osi symetrii tej paraboli. Zatem możemy obliczyć pierwszą współrzędną p wierzchołka paraboli:

$$p=\frac{-3+5}{2}=1$$

Oś symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji f, ma równanie $x=1$.

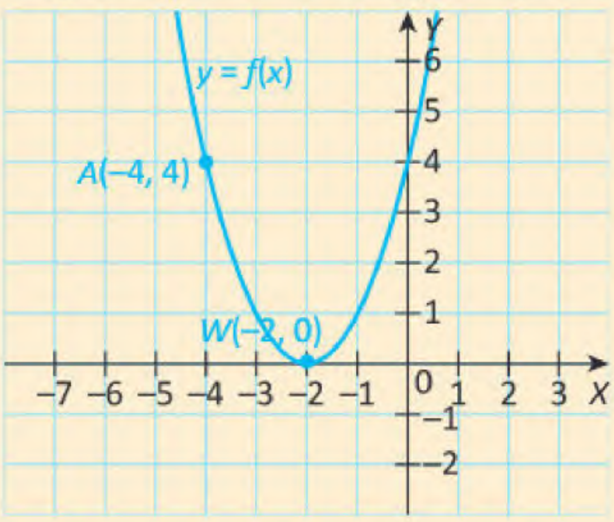
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

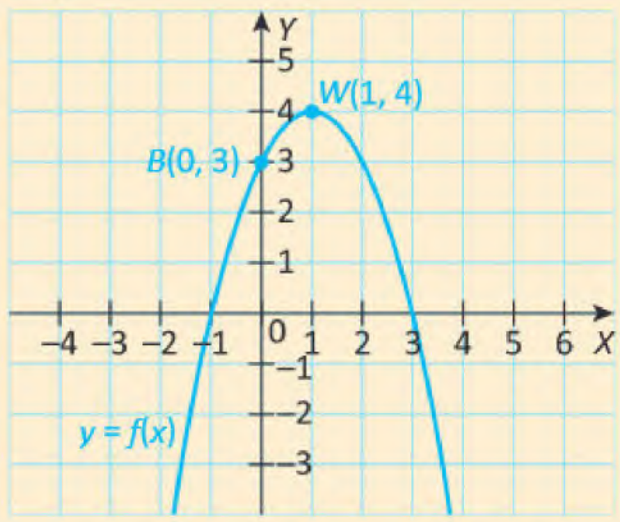
1. Zapisz podany wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej $f(x)=ax^2+bx+c$. Następnie wypisz współczynniki a, b, c.
   a) $f(x)=4-(3x-2)^2$
   b) $f(x)=-3+2x(1-x)$
   c) $f(x)=\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(\sqrt{2}x+1\right)$
   d) $f(x)=2(x-1)(x+3)$
   e) $f(x)=2x^2-8-2(x-4)$
   f) $f(x)=(2x-1)2x+2x$
2. Napisz wzór funkcji kwadratowej $y=ax^2$, gdzie $a\neq 0$, jeśli wiadomo, że do jej wykresu należy punkt:
   a) $A(4, -8)$
   b) $B\left(\sqrt{3}, 9\right)$
   c) $D\left(-\sqrt{2}, -4\right)$.
3. Wyznacz współczynniki b, c funkcji kwadratowej $f(x)=x^2+bx+c$, jeśli do wykresu tej funkcji należą punkty:
   a) $A(-3, 7)$, $B(2, 12)$
   b) $A(0, -9)$, $B(4, 3)$.
4. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, jeśli do wykresu tej funkcji należą punkty:
   a) $A(0, 5)$, $B(1, 3)$, $C(-2, -3)$
   b) $A(0, -11)$, $B(-2, -1)$, $C(2, -17)$.
5. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, której wykres otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji:
   a) $y=2x^2$ o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi OX,
   b) $y=-x^2$ o 5 jednostek w lewo wzdłuż osi OX,
   c) $y=\frac{1}{4}x^2$ o 2 jednostki w górę wzdłuż osi OY,
   d) $y=-\frac{1}{3}x^2$ o 7 jednostek w dół wzdłuż osi OY.
6. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, której wykres otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y=3x^2$ w następujący sposób:
   a) o 2 jednostki w lewo wzdłuż osi OX i 5 jednostek w dół wzdłuż osi OY,
   b) o 4 jednostki w prawo wzdłuż osi OX i 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY.

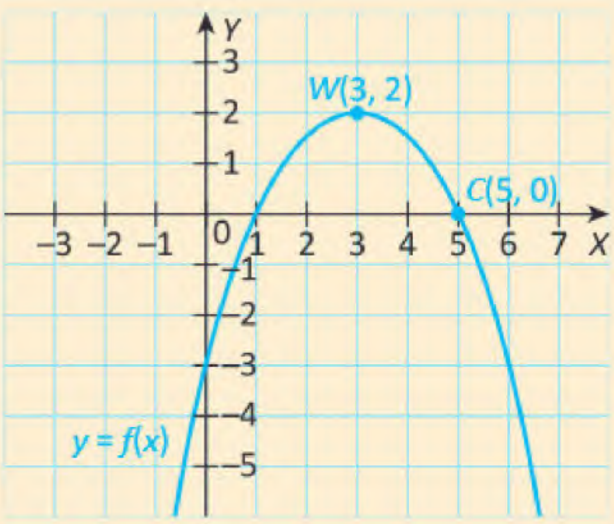
7. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f i współrzędne punktu przecięcia tej paraboli z osią OY. Naszkicuj wykres tej funkcji.
   a) $f(x) = -2(x-1)^2$ b) $f(x) = x^2 - 4$ c) $f(x) = (x-1)^2 + 2$
   d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$ f) $f(x) = -(x+1)^2 - 1$.

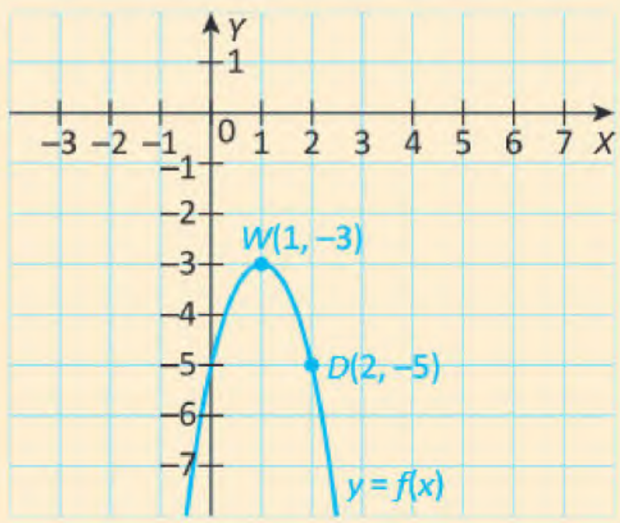
8. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Podaj zbiór wartości funkcji f, maksymalne przedziały monotoniczności tej funkcji i równanie osi symetrii jej wykresu.
   a) $f(x) = (x+2)^2 - 4$ b) $f(x) = -(x-1)^2 + 6$ c) $f(x) = 2(x+4)^2$
   d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-3)^2$ e) $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 1$ f) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2 - 4$.

9. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Korzystając z wyróżnionych danych, zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej, a następnie przekształć go do postaci ogólnej.

a)


b)


c)


d)


10. Wykres funkcji kwadratowej f jest symetryczny względem prostej $x + 2 = 0$ i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 7. Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 7.

11. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej, wiedząc, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle -5, +\infty)$ oraz $f(1) = f(3) = -2$.

Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

Znasz już wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej:

$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

oraz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej:

$y = a(x - p)^2 + q, \quad a \neq 0.$

Powstaje pytanie: jaka jest zależność między tymi wzorami?

Przykład 1.

Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = 2(x - 1)^2 + 5$. Wykonamy działania zapisane we wzorze funkcji:

$y = 2(x^2 - 2x + 1) + 5$

$y = 2x^2 - 4x + 7$

Otrzymaliśmy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

Wykonując działania zapisane we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, otrzymujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

Ćwiczenie 1. Podaj warunek, dla którego wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej jest jednocześnie wzorem tej funkcji w postaci ogólnej.

Przykład 2.

Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = 2x^2 - 12x + 19$. Przekształcimy go do postaci kanonicznej.

$y = \mathbf{2}(x^2 - 6x) + 19$ Grupujemy wyrazy zawierające zmienną x i wyłączamy współczynnik przy x^2 poza nawias.

$y = \mathbf{2}(x^2 - 6x + 9 - 9) + 19$ „Uzupełniamy" wyrażenie w nawiasie i stosujemy wzór $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

$y = \mathbf{2}[(x - 3)^2 - 9] + 19$

$y = \mathbf{2}(x - 3)^2 - \mathbf{2} \cdot 9 + 19$ Stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$y = 2(x - 3)^2 + 1$

Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = 2x^2 - 12x + 19$ sprowadziliśmy do postaci kanonicznej: $y = 2(x - 3)^2 + 1$.

Ćwiczenie 2. Wzór funkcji kwadratowej $y = -x^2 + 2x - 4$ doprowadź do postaci kanonicznej.

Jeśli $a \neq 0$, to związek między współczynnikami a, b, c we wzorze $y = ax^2 + bx + c$, a liczbami p, q we wzorze $y = a(x-p)^2 + q$, opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, można przekształcić do postaci kanonicznej $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a}.$$

Dowód: Przeprowadzamy rozumowanie analogiczne do rozważań z przykładu 2.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c, \quad a \neq 0$$

Grupujemy wyrazy ze zmienną x, następnie wyłączamy współczynnik a poza nawias.

$$y = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

Wyrażenie $x^2 + \frac{b}{a}x$ uzupełniamy tak, aby otrzymać „kwadrat sumy wyrażeń” zgodnie ze wzorem $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c$$

Stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

Wyraz c zapisujemy w postaci $\frac{4ac}{4a}$, następnie z dwóch ostatnich wyrazów wyłączamy -1 przed nawias.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a}\right)$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Wykonujemy odejmowanie ułamków w drugim nawiasie.

Porównujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

$y = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$

z otrzymanym wzorem. Otrzymujemy:

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a}$$

co kończy dowód.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej.

Liczba $b^2 - 4ac$ jest szczególna dla danej funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Nazywamy ją **wyróżnikiem** i oznaczamy grecką literą Δ (delta):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Podsumujmy:

1) Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$ można przedstawić w postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$, przy czym $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.
2) Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ można otrzymać po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\left[\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right]$.
3) Wierzchołek W paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ ma współrzędne (x_w, y_w), gdzie $x_w = \frac{-b}{2a}$ $\quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$.

Przykład 3.

Napiszemy wzór funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + 4(2 - x) - 3$ w postaci kanonicznej.

Wzór funkcji f doprowadzamy do postaci ogólnej:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 5.$$

$$a = -2 \qquad b = -4 \qquad c = 5$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f:

$$x_w = p = -\frac{b}{2a}, \qquad \text{czyli} \qquad p = \frac{4}{2\cdot(-2)} = -1$$

Wyznaczamy drugą współrzędną wierzchołka:

$$y_w = q = \frac{-\Delta}{4a}, \qquad \text{gdzie} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$y_w = \frac{-56}{4\cdot(-2)} = 7$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to $f(x) = -2(x + 1)^2 + 7$.

Ćwiczenie 3. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej $y = 1 - 5x + 10x^2$ w postaci kanonicznej.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Sprowadź ten wzór do postaci ogólnej.

   a) $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{4}(x+8)^2 - 12$ c) $f(x) = 3(x-2)^2 + 5$

2. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej. Sprowadź ten wzór do postaci kanonicznej w sposób przedstawiony w przykładzie 2.

   a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 8$ b) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ c) $f(x) = -2x^2 + 12x - 20$

3. Oblicz wyróżnik funkcji kwadratowej f, jeśli:

   a) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$ c) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 9$.

4. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f, stosując poznane wzory. Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

   a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$ b) $f(x) = 5x^2 + 8x$ c) $f(x) = 16x^2 - 8x + 1$

5. Oblicz współczynnik b we wzorze funkcji kwadratowej f, wiedząc, że prosta k jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f.

   a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx - 8,\ k\colon x = 3$ b) $f(x) = -x^2 + bx + 4,\ k\colon x = 1$

   c) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + bx - 3\sqrt{2},\ k\colon x = 4$

6. Dany jest wierzchołek W paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, i wyróżnik tej funkcji. Wyznacz współczynniki a, b, c.

   a) $W\left(-1\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}\right)$, $\Delta = 100$ b) $W(-2, -4)$, $\Delta = 8$ c) $W(3, -10)$, $\Delta = -26\frac{2}{3}$

7. Oblicz współczynnik a we wzorze funkcji kwadratowej f oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY, jeśli:
   a) $f(x) = a(x-3)^2 + 5$, $\Delta = 40$ b) $f(x) = a(x+1)^2 - 3$, $\Delta = 36$
   c) $f(x) = a(x+4)^2 + 6$, $\Delta = -3$.

8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f. Oblicz współrzędne punktu wspólnego paraboli będącej wykresem funkcji f z osią OY i punktu symetrycznego do niego względem osi symetrii paraboli. Naszkicuj wykres funkcji f.
   a) $f(x) = x^2 + 4x + 7$ b) $f(x) = -x^2 + x - 2$ c) $f(x) = 3x^2 - 9x$

   d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{4}$ e) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 2$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 5$

Miejsce zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

Przypomnijmy sposób wyznaczania miejsc zerowych funkcji kwadratowej, który omówiliśmy w klasie pierwszej.

Przykład 1.

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = (x+5)^2 - 1$.

Miejscami zerowymi są argumenty funkcji, dla których funkcja przyjmuje wartość 0, czyli są to liczby spełniające równanie:

$$f(x) = 0$$
$$(x+5)^2 - 1 = 0$$
$$(x+5)^2 = 1$$
$$x+5 = 1 \ \vee \ x+5 = -1$$
$$x = -4 \quad \vee \quad x = -6$$

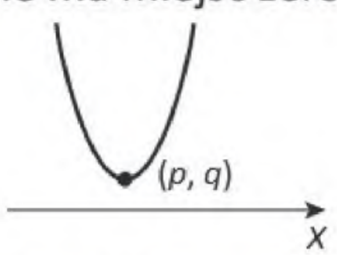
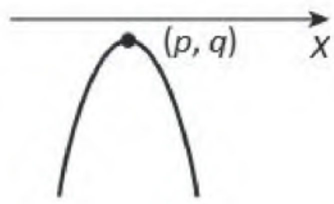
Funkcja $f(x) = (x+5)^2 - 1$ ma dwa miejsca zerowe: -4 i -6.

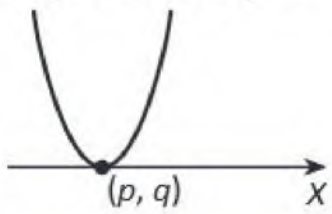
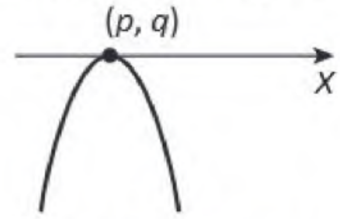
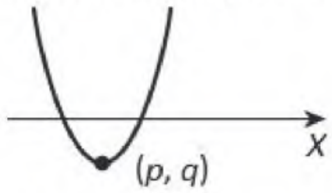
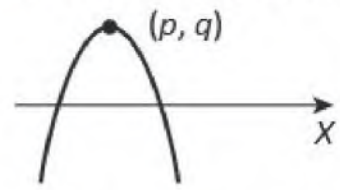
Ćwiczenie 1. Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = 2(x+3)^2 - 50$ b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Ćwiczenie 2. Napisz wzór przykładowej funkcji kwadratowej, która nie ma miejsc zerowych.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest równa liczbie punktów wspólnych wykresu tej funkcji i osi OX. Rozważmy różne położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX w dwóch sytuacjach: jeśli $a > 0$ (parabola zwrócona jest ramionami w górę) oraz jeśli $a < 0$ (parabola zwrócona jest ramionami w dół).

$a > 0$	$a < 0$
1) funkcja nie ma miejsc zerowych  $a > 0$ i $q > 0$, zatem $a \cdot q > 0$	1) funkcja nie ma miejsc zerowych  $a < 0$ i $q < 0$, zatem $a \cdot q > 0$

$a > 0$	$a < 0$
2) funkcja ma jedno miejsce zerowe  $a > 0$ i $q = 0$, zatem $a \cdot q = 0$	2) funkcja ma jedno miejsce zerowe  $a < 0$ i $q = 0$, zatem $a \cdot q = 0$
3) funkcja ma dwa miejsca zerowe  $a > 0$ i $q < 0$, zatem $a \cdot q < 0$	3) funkcja ma dwa miejsca zerowe  $a < 0$ i $q > 0$, zatem $a \cdot q < 0$

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej zależy od znaku iloczynu $a \cdot q$. Ponadto, druga współrzędna wierzchołka paraboli wyraża się wzorem

$$q = \frac{-\Delta}{4a}, \quad \text{zatem}$$

$$\Delta = -4aq.$$

Znak wyróżnika Δ zależy od znaku iloczynu $a \cdot q$. Mamy więc:

- $a \cdot q > 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$
- $a \cdot q = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$
- $a \cdot q < 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$

Nasze spostrzeżenia prowadzą do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.

Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac$:

- nie ma miejsc zerowych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma tylko jedno miejsce zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$,
- ma dwa miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

Wyznaczmy teraz wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, w zależności od współczynników a, b i c. W tym celu przedstawimy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynu dwóch wyrażeń algebraicznych, zawierających zmienną x. Wykorzystamy postać kanoniczną wzoru funkcji

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

- Rozpatrzmy przypadek, gdy $\Delta = 0$.
  Wówczas wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej jest następujący:
  (*) $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, gdzie $a \neq 0$.
  Stąd łatwo wyznaczymy miejsce zerowe:
  $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \quad \text{i} \quad a \neq 0$$
  $$x + \frac{b}{2a} = 0$$
  $x = \frac{-b}{2a}$, czyli miejscem zerowym jest liczba $\frac{-b}{2a}$.
- Rozpatrzmy przypadek, gdy $\Delta > 0$.
  Po wyłączeniu współczynnika a przed nawias mamy:
  $$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
  Wyrażenie $\frac{\Delta}{4a^2}$ możemy zapisać tak: $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ (bo $\Delta > 0$).
  Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i otrzymujemy:
  $$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
  Ostatecznie mamy:
  (**) $y = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$, gdzie $a \neq 0$.
  Przyrównujemy prawą stronę wzoru funkcji do zera i obliczamy miejsca zerowe:
  $$a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \quad \text{i} \quad a \neq 0$$
  $$x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \ \vee\ x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$
  $$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \ \vee\ x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
  czyli miejscami zerowymi są liczby
  $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- W przypadku, gdy $\Delta < 0$, funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Twierdzenie 2.

Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac$:

- ma tylko jedno miejsce zerowe, $\frac{-b}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$,
- ma dwa miejsca zerowe, $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$
- nie ma miejsc zerowych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$.

Przykład 2.

Dane są funkcje kwadratowe:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ b) $g(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$ c) $h(x) = -3x^2 + 2x - 1$

Wyznaczymy, o ile istnieją, miejsca zerowe tych funkcji.

Ad a) Obliczamy wyróżnik funkcji f:

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25, \qquad \Delta > 0$

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe. Stosujemy poznane wzory:

$\sqrt{\Delta} = 5$

$$x_1 = \frac{-3-5}{2 \cdot 2} = -2 \qquad x_2 = \frac{-3+5}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -2 i $\frac{1}{2}$.

Ad b) Obliczamy wyróżnik funkcji g:

$$\Delta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

Funkcja g ma jedno miejsce zerowe:

$$x_0 = \frac{-\frac{2}{3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{3}$$

Ad c) Obliczamy wyróżnik funkcji h:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = 4 - 12 = -8$

Wyróżnik jest ujemny, funkcja h nie ma miejsc zerowych.

UWAGA: Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych [zobacz (*) i (**), str. 110].

Wzór $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, jeśli $\Delta > 0$, a także wzór $y = a(x - x_0)^2$, jeśli $\Delta = 0$, nazywamy **wzorem funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej**.

Jeśli funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma miejsce zerowe, to jej wzór można przedstawić w postaci iloczynowej:
- $y = a(x - x_0)^2$ – jeśli funkcja ma tylko jedno miejsce zerowe
- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ – jeśli funkcja ma dwa miejsca zerowe.

Jeśli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to wzoru tej funkcji nie można przedstawić w postaci iloczynowej.

Ćwiczenie 3. Zapisz wzory funkcji f i g z przykładu 2. w postaci iloczynowej.

Ćwiczenie 4. Podaj przykład funkcji kwadratowej, której wzoru nie można zapisać w postaci iloczynowej.

Przykład 3.

Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej $f(x) = -2(x - 3)^2 + 8$. Przedstawimy wzór tej funkcji w postaci iloczynowej i wyznaczymy miejsca zerowe funkcji f.

Najpierw sprawdzimy, czy postać iloczynowa istnieje. Ze wzoru funkcji odczytujemy:

$a = -2$ oraz $q = 8$, zatem

$a \cdot q < 0$, czyli

$\Delta > 0$ (funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe).

Zadanie możemy wykonać na dwa sposoby:

I sposób – doprowadzamy wzór funkcji do postaci iloczynowej i na jego podstawie podajemy miejsca zerowe funkcji f.

Wyłączamy ze wzoru funkcji $f(x) = -2(x - 3)^2 + 8$ współczynnik -2 poza nawias i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$f(x) = -2[(x - 3)^2 - 4]$$
$$f(x) = -2[(x - 3)^2 - 2^2]$$
$$f(x) = -2(x - 3 - 2)(x - 3 + 2)$$
$$f(x) = -2(x - 5)(x - 1)$$

Ze wzoru odczytujemy miejsca zerowe funkcji f; są to liczby 1 oraz 5.

II sposób – obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej ze wzoru funkcji w postaci ogólnej; następnie zapisujemy postać iloczynową wzoru funkcji f.

Sprowadzamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$f(x) = -2(x^2 - 6x + 9) + 8$

$f(x) = -2x^2 + 12x - 10$

Obliczamy wartość wyróżnika: $\Delta = 64 \quad \sqrt{\Delta} = 8$

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji f:

$$x_1 = \frac{-12-8}{2\cdot(-2)} = 5 \qquad x_2 = \frac{-12+8}{2\cdot(-2)} = 1$$

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej:

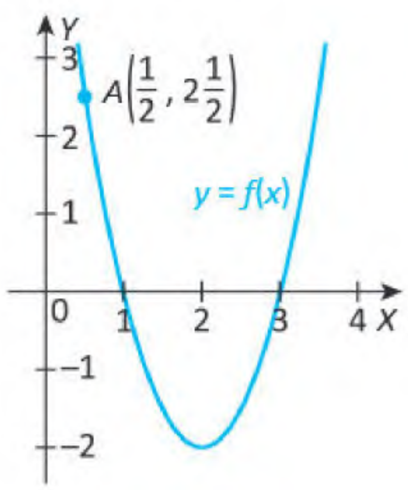
$f(x) = -2(x-5)(x-1)$

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe: 1 oraz 5.

Ćwiczenie 5. Doprowadź wzór funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 18$ do postaci iloczynowej dwoma sposobami.

Przykład 4.

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Korzystając z danych na rysunku, napiszemy wzór tej funkcji w postaci ogólnej.



Z wykresu odczytujemy dwa miejsca zerowe funkcji f:

1 oraz 3.

Ponadto, do wykresu funkcji f należy punkt

$A\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$.

Wygodnie jest zapisać wzór funkcji f w postaci iloczynowej – wówczas we wzorze pozostaje do obliczenia tylko współczynnik a.

$f(x) = a(x-1)(x-3)$, gdzie $a > 0$.

Do wykresu funkcji należy punkt $A\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$, zatem

$$2\frac{1}{2} = a\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 3\right), \text{ stąd } a = 2$$

Wzór funkcji f ma postać:

$f(x) = 2(x-1)(x-3)$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$2(x-1)(x-3) = 2(x^2 - 3x - x + 3) = 2x^2 - 8x + 6$

Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej jest następujący: $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oceń na podstawie wartości wyróżnika, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:
   a) $y = 2x^2 + 3x - 1$ b) $y = -4x^2 + 7$ c) $y = 8x^2 + 4x + 0{,}5$.
2. Oceń na podstawie wartości a i q, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:
   a) $y = 2(x-1)^2 - 6$ b) $y = -(x+3)^2 - 1$ c) $y = 0{,}25(x+4)^2$.
3. Wyznacz miejsca zerowe, o ile istnieją, funkcji kwadratowej:
   a) $y = \frac{1}{4}x^2 - 16$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x$ c) $y = x^2 - 2x + 4$.
4. Na podstawie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej podaj miejsca zerowe tej funkcji:
   a) $y = 5(x+7)(x-1)$ b) $y = -\sqrt{2}(x+6)^2$ c) $y = -\frac{1}{4}x(x+3)$.
5. Dany jest współczynnik a i miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zapisz w zeszycie wzór funkcji f w postaci iloczynowej.
   a) $x_1 = -6, x_2 = 0, \ a = \frac{1}{2}$ b) $x_0 = 6, \ a = -5$ c) $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{2}, \ a = 6$.
6. Dany jest wzór funkcji f w postaci iloczynowej. Podaj wzór funkcji f w postaci ogólnej, jeśli:
   a) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x-5)$ b) $f(x) = 3x(x-7)$ c) $f(x) = \frac{1}{6}(x+9)^2$.
7. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej, o ile istnieje, jeśli:
   a) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 7\frac{1}{2}$ b) $y = -2x^2 + 12x$ c) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 4x - 16$.
8. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.
   a) $f(x) = 2(x-3)(x+5)$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)x$ c) $f(x) = -(x-4)(x+4)$.
9. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej. Podaj wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
   a) $y = \frac{3}{4}(x-8)(x-4)$ b) $y = -\frac{1}{2}\left(x + 4\sqrt{2}\right)x$ c) $y = 2(x+4)(x+3)$
   d) $y = -2(x+1)(x+1)$ e) $y = -(x-6)^2$ f) $y = \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$
10. Dany jest wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Podaj wzór funkcji f w postaci iloczynowej, o ile istnieje – bez wyznaczania wzoru funkcji f w postaci ogólnej.
    a) $f(x) = (x+5)^2 - 4$ b) $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$ c) $f(x) = -3(x-7)^2 - 12$

Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu

Ćwiczenie 1. Dany jest wzór funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = -(x-5)^2 + 13$.

a) Podaj współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f.

b) Podaj dwa dowolne punkty należące do tej paraboli, które są symetryczne względem jej osi symetrii.

Aby naszkicować wykres funkcji kwadratowej opisanej wzorem $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, możemy postąpić w sposób przedstawiony w poniższym przykładzie.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $y = 2x^2 + 4x - 6$. Następnie omówimy własności tej funkcji.

1) Wyznaczamy współrzędne wierzchołka W paraboli: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 64$$

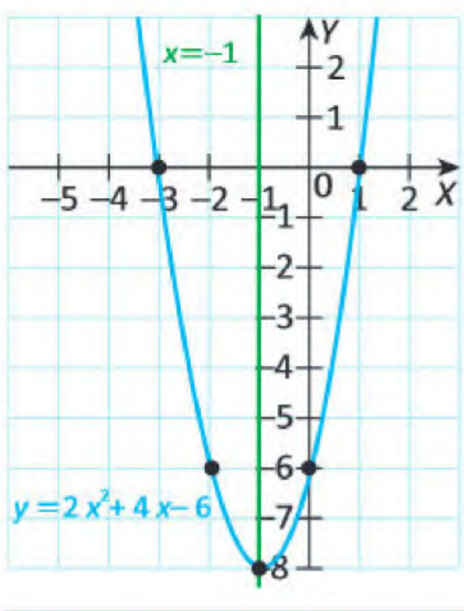
$$x_w = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1 \qquad y_w = \frac{-64}{4 \cdot 2} = -8 \qquad W(-1, -8)$$

2) Podajemy współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią OY: $(0, c)$ oraz współrzędne punktu symetrycznego do niego względem osi symetrii paraboli.
   Równanie osi symetrii paraboli: $x = -1$.
   Szukane punkty: $(0, -6)$, $(-2, -6)$

3) Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej, o ile istnieją.

$$\sqrt{\Delta} = 8, \qquad x_1 = \frac{-4-8}{2 \cdot 2} = -3, \qquad x_2 = \frac{-4+8}{2 \cdot 2} = 1$$

4) Zaznaczamy wyznaczone punkty i szkicujemy wykres tak, aby otrzymać parabolę.
Własności funkcji:



Własności funkcji:

- $D = \mathbf{R}$ $\qquad ZW = \langle -8, +\infty)$
- $y = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \lor x = 1)$
  $y > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
  $y < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$
- funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -1, +\infty)$
  funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$
- dla argumentu -1 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, równą -8
  funkcja nie przyjmuje wartości największej.

Czasami wygodnie jest obliczyć jeszcze wartości funkcji, dla innych argumentów, żeby otrzymać bardziej dokładny wykres. Ma to znaczenie szczególnie wówczas, gdy funkcja nie ma miejsc zerowych.

Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji kwadratowej $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-5$. Następnie podamy, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż -5.

- Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia z osią OY: $(0,-5)$
- Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$\Delta=-1,\qquad x_w=3,\qquad y_w=-\frac{1}{2}\qquad$ stąd

$W\left(3,-\frac{1}{2}\right)$

- Zauważamy, że funkcja f nie ma miejsc zerowych, bo $\Delta<0$.
- Wyznaczamy kilka punktów, parami położonych symetrycznie względem osi symetrii paraboli.

W tym przypadku osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x=3$, więc

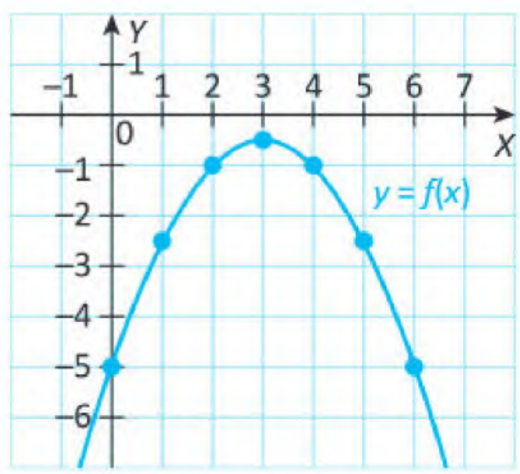
$f(0)=f(6),\ f(1)=f(5),\ f(2)=f(4),$ itd.

Obliczamy:

$f(1)=-\frac{1}{2}+3-5=-2\frac{1}{2}\qquad$ oraz $\qquad f(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2-5=-1$

Punkty o współrzędnych $(0,-5)$, $(6,-5)$, $(2,-1)$, $(4,-1)$, $\left(1,-2\frac{1}{2}\right)$, $\left(5,-2\frac{1}{2}\right)$ należą do wykresu funkcji f.

Zaznaczamy te punkty w układzie współrzędnych i szkicujemy parabolę. Rysunek obok przedstawia wykres funkcji f.



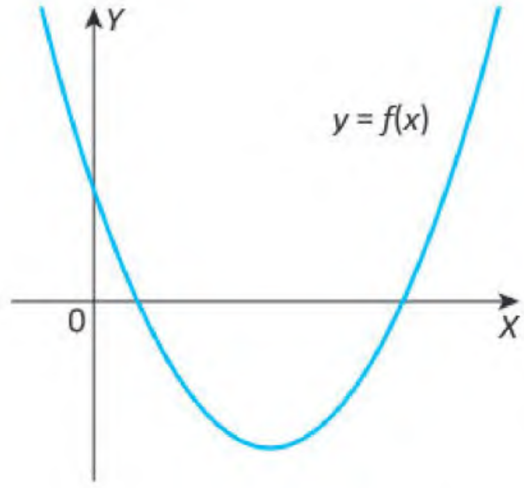
Z wykresu odczytujemy, że funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż -5 tylko wtedy, gdy $x\in\langle 0,6\rangle$.
Zapisujemy:

$f(x)\geqslant -5 \Leftrightarrow x\in\langle 0,6\rangle.$

Ćwiczenie 2. Omów własności funkcji $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-5$, której wykres naszkicowaliśmy w przykładzie 2.

Przykład 3.

Na rysunku obok dany jest szkic wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Ustalimy znaki współczynników a, b, c i wyróżnika tej funkcji.



Wykres funkcji jest parabolą, której ramiona są skierowane w górę, zatem $a > 0$. Parabola przecina oś OY w punkcie $(0, c)$ powyżej punktu $(0, 0)$, więc $c > 0$.

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe, zatem $\Delta > 0$. Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest liczbą dodatnią. Z informacji $\frac{-b}{2a} > 0$ i $a > 0$ wynika, że $-b > 0$, stąd $b < 0$. Otrzymaliśmy: $a > 0, b < 0, c > 0, \Delta > 0$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f i omów własności tej funkcji.

   a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$ c) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

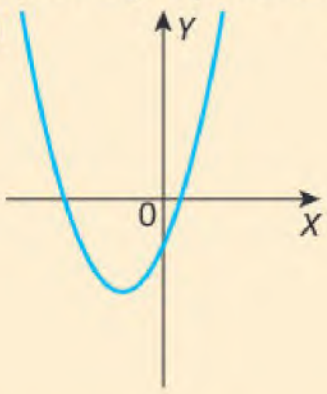
   d) $f(x) = -x^2 + 6x$ e) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ f) $f(x) = 4x^2 + 4x - 1$

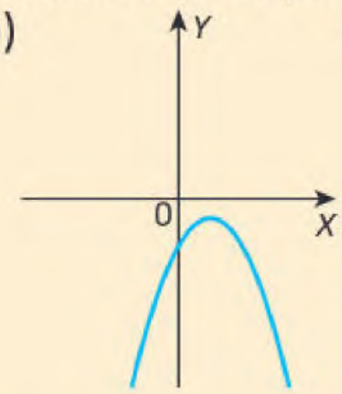
2. Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g. Następnie rozwiąż graficznie podaną obok wzorów funkcji nierówność.

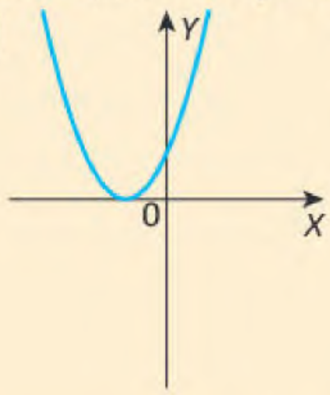
   a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 3$; $f(x) < g(x)$

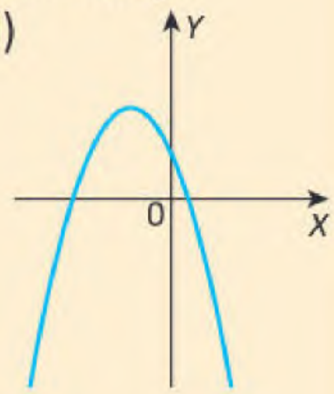
   b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$, $g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+2)$; $f(x) \geqslant g(x)$

3. Na podstawie szkicu wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ w układzie współrzędnych, ustal znaki współczynników a, b, c i wyróżnika funkcji.

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

4. Naszkicuj wykres funkcji f i omów własności tej funkcji, jeśli:

   a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x, \text{ jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ 2x^2 - 8x, \text{ jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 1, \text{ jeśli } x \in (-\infty, 2) \\ \frac{3}{2}x - 4, \text{ jeśli } x \in \langle 2, +\infty) \end{cases}$

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności

Znasz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej. Potrafisz na podstawie tych wzorów określić niektóre własności funkcji.
W tym temacie zdobędziesz umiejętność wyznaczania wzoru funkcji kwadratowej na podstawie danych własności tej funkcji.

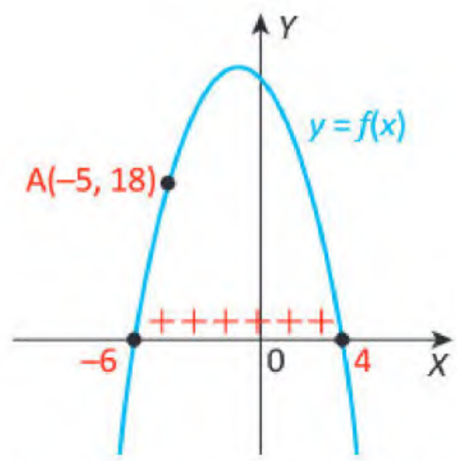
Przykład 1.

Napiszemy wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, jeśli wiadomo, że przyjmuje ona wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-6, 4)$, a do jej wykresu należy punkt $A(-5, 18)$.

Wiemy, że

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-6, 4).$$

Zauważamy, że funkcja f ma dwa miejsca zerowe -6 i 4, a ramiona paraboli skierowane są w dół, jak na rysunku obok.



Zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x+6)(x-4), \text{ gdzie } a < 0.$$

Teraz wyznaczamy współczynnik a. Korzystamy z informacji, że punkt $A(-5, 18)$ należy do wykresu funkcji f:

$$f(-5) = 18$$
$$a(-5+6)(-5-4) = 18$$
$$-9a = 18, \quad \text{stąd}$$
$$a = -2$$

Otrzymaliśmy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej:

$$f(x) = -2(x+6)(x-4).$$

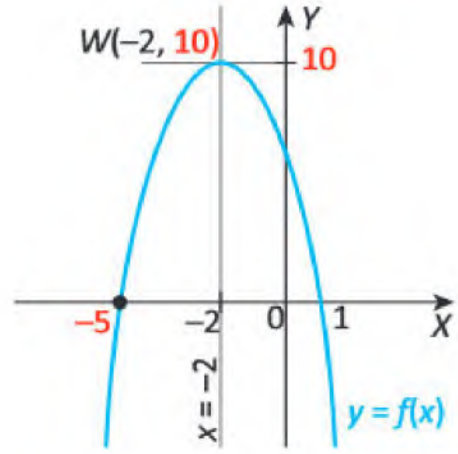
Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$$f(x) = -2(x+6)(x-4)$$
$$f(x) = -2(x^2 - 4x + 6x - 24)$$
$$f(x) = -2x^2 - 4x + 48$$

Wzór funkcji f w postaci ogólnej jest następujący: $f(x) = -2x^2 - 4x + 48$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wzór funkcji kwadratowej f, wiedząc, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2, +\infty)$, jednym z jej miejsc zerowych jest liczba -5, a największa wartość tej funkcji jest równa 10.



Mamy:
- Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2, +\infty)$, zatem prosta o równaniu $x = -2$ jest osią symetrii paraboli.
- Funkcja f przyjmuje największą wartość równą 10, stąd $y_w = 10$
- Miejscem zerowym funkcji jest liczba -5, czyli $f(-5) = 0$.

<u>I sposób</u> – Korzystamy ze wzoru funkcji f w postaci kanonicznej.

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $W(-2, 10)$ oraz $f(-5) = 0$. Wówczas

$f(x) = a(x+2)^2 + 10 \qquad \text{oraz} \qquad f(-5) = 0 \qquad \text{i} \qquad a < 0.$

$0 = a(-5+2)^2 + 10$

$a = -\dfrac{10}{9}$

Wzór funkcji f jest następujący: $f(x) = -\dfrac{10}{9}(x+2)^2 + 10$.

<u>II sposób</u> – Korzystamy ze wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba -5. Wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej $x = -2$, więc drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1. Ponadto $W(-2, 10)$, stąd $f(-2) = 10$.

Otrzymujemy:

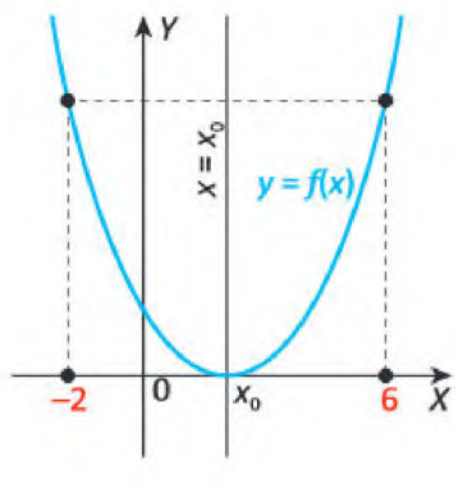
$f(x) = a(x+5)(x-1) \quad \text{oraz} \quad f(-2) = 10$

$10 = a(-2+5)(-2-1), \quad \text{stąd} \quad a = -\dfrac{10}{9}$

Wzór funkcji f jest następujący: $f(x) = -\dfrac{10}{9}(x+5)(x-1)$.

Przykład 3.

Wyznaczymy współczynniki b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + bx + c$, wiedząc że funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe oraz $f(-2) = f(6)$.



- Współczynnik przy x^2 jest dodatni, ramiona paraboli są skierowane w górę.
- Funkcja f ma jedno miejsce zerowe x_0, zatem wierzchołek paraboli znajduje się na osi OX, a prosta o równaniu $x = x_0$ jest osią symetrii tego wykresu.
- Wartość funkcji dla argumentów -2 i 6 jest taka sama: $f(-2) = f(6)$.

I sposób – Korzystamy ze wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej. Zauważamy, że na osi liczbowej OX liczba x_0 jest równoodległa od liczb -2 i 6. Zatem:

$$x_0 = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2, \quad \text{stąd} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

Otrzymujemy: $b = -2$, $c = 2$

II sposób – Obliczamy wartości funkcji f dla argumentów -2 i 6.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c,$$

$$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2b + c = 2 - 2b + c \quad \text{oraz} \quad f(6) = \frac{1}{2} \cdot 36 + 6b + c = 18 + 6b + c$$

Następnie korzystamy z równości $f(-2) = f(6)$ i zapisujemy:

$2 - 2b + c = 18 + 6b + c$ stąd

$b = -2$

Otrzymujemy: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + c.$

Funkcja f ma jedno miejsce zerowe tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$. Zatem

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot c = 0 \Leftrightarrow 4 = 2c \Leftrightarrow c = 2.$$

Szukane współczynniki: $b = -2$, $c = 2$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz współczynniki b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, wiedząc, że osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $x = -6$ oraz punkt $A(-1, -11)$ należy do tej paraboli.
2. Wyznacz współczynniki b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$, wiedząc, że miejscami zerowymi funkcji f są liczby 4 oraz -6.
3. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że dla argumentu 8 przyjmuje ona największą wartość, równą 1, a do wykresu tej funkcji należy punkt $A(4, -7)$.
4. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej, wiedząc, że miejscami zerowymi funkcji f są liczby 10 i -2, a jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -5)$.
5. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że ma ona tylko jedno miejsce zerowe oraz $f(-6) = f(4) = 15$.

6. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 6\rangle$, do jej wykresu należy punkt $B(-1, 3)$, a średnia arytmetyczna jej dwóch miejsc zerowych jest równa 2.
7. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej, wiedząc, że do wykresu funkcji f należy punkt $A(-1, 14)$ oraz $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 6\rangle$.
8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że przyjmuje ona najmniejszą wartość równą -32 oraz $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 4) \cup (12, +\infty)$.
9. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R} - \{4\}$, a wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $K(0, -32)$.
10. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej, wiedząc, że wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f leży na prostej k: $y = 5$, osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x = -4$, a jednym z jej miejsc zerowych jest liczba -9.
11. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej, jeśli wiadomo, że maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca, to $\langle 3, +\infty)$, jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba -1, a do wykresu funkcji f należy punkt $C(8, 27)$.
12. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że przyjmuje ona najmniejszą wartość równą -4, a prosta o równaniu $y = 3$ przecina wykres funkcji f w punktach o odciętych 1 i 5.
13. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej, wiedząc, że jedno z jej miejsc zerowych jest o 8 większe od drugiego, maksymalny przedział, w którym funkcja jest malejąca, to $(-\infty, 3\rangle$, a do wykresu funkcji f należy punkt $A(9, 40)$.
14. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej, wiedząc, że suma jej miejsc zerowych jest równa -12, zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 1\rangle$ oraz $f(-3) = -17$.
15. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że przyjmuje ona największą wartość równą 4 oraz $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \langle 4, 6\rangle$.
16. Wyznacz wartości współczynników a i b we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + 4$, wiedząc, że dla argumentu -2 funkcja przyjmuje największą wartość równą 5.
17. Wyznacz wartości współczynników a i b we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx - 6$, wiedząc, że suma miejsc zerowych funkcji f jest równa -4, a rzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f ma wartość -8.
18. Wyznacz wartości współczynników b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$, wiedząc, że funkcja f ma jedno miejsce zerowe, a jej wykres przecina oś OY w punkcie $P(0, 4)$.

Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, określona w zbiorze liczb rzeczywistych:

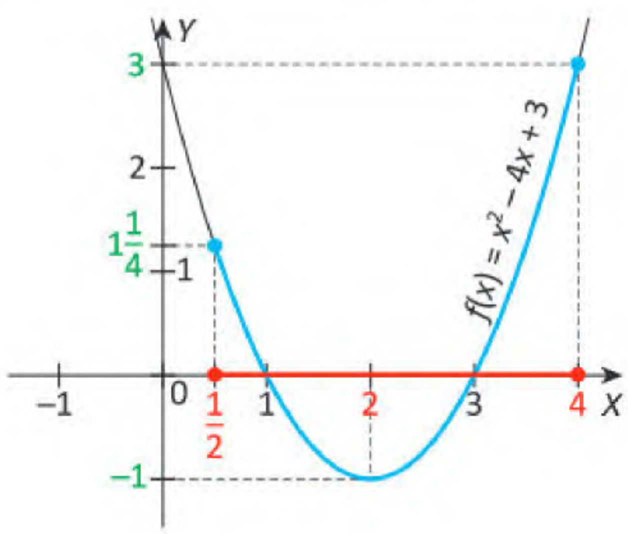
- przyjmuje największą wartość równą y_w, jeśli $a < 0$; wówczas nie ma wartości najmniejszej;
- przyjmuje najmniejszą wartość równą y_w, jeśli $a > 0$; wówczas nie ma wartości największej.

Jeśli ograniczymy dziedzinę funkcji kwadratowej do przedziału domkniętego, to funkcja określona w tym przedziale przyjmuje zawsze wartość największą i wartość najmniejszą. Zastanówmy się, jak można wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Przykład 1.

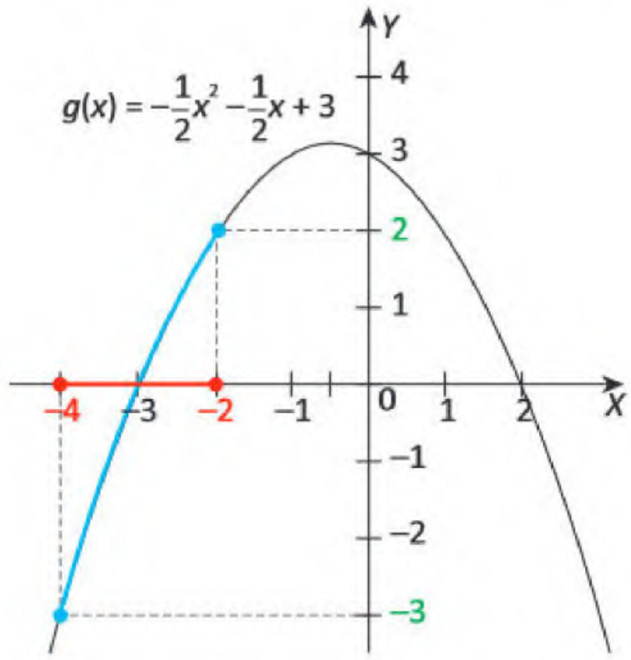
Na rysunkach przedstawione są wykresy dwóch funkcji kwadratowych $f(x) = x^2 - 4x + 3$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$. Rozważmy te funkcje w przedziałach domkniętych (wykresy funkcji odpowiadające tym przedziałom zostały zaznaczone kolorem niebieskim). Stwierdzimy na podstawie wykresu, jaka jest najmniejsza oraz największa wartość funkcji w tym przedziale.

$f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in \left\langle \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$



W przedziale $\left\langle \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$ funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą -1, a największą wartość równą 3.

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3, \quad x \in \langle -4, -2 \rangle$



W przedziale $\langle -4, -2 \rangle$ funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość równą -3, zaś największą wartość równą 2.

Wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale domkniętym $\langle m, n \rangle$ znajdujemy w następujący sposób:

1) Wyznaczamy: $f(m)$ i $f(n)$.
2) Obliczamy x_w.
   - Jeśli x_w należy do przedziału $\langle m, n \rangle$, to obliczamy y_w i wybieramy wartość największą i wartość najmniejszą spośród liczb $f(m), f(n), y_w$. Są to szukane wielkości.
   - Jeśli x_w nie należy do przedziału $\langle m, n \rangle$, to wybieramy wartość największą i wartość najmniejszą spośród liczb $f(m), f(n)$.

Przykład 2.

Obliczymy największą oraz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$.

Postępujemy według zasady podanej wyżej.

1) $f(0) = -8, \quad f(4) = -16$
2) Ponieważ $x_w = 1$ oraz $1 \in \langle 0, 4 \rangle$, więc obliczamy y_w:
   $y_w = f(1) = -7$

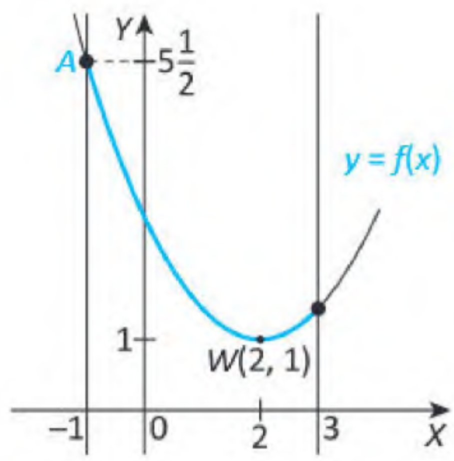
W przedziale $\langle 0, 4 \rangle$ funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ przyjmuje największą wartość równą -7 i najmniejszą wartość równą -16.

Ćwiczenie 1. Oblicz najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 4x$ w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. Następnie naszkicuj wykres funkcji f i sprawdź poprawność obliczeń.

Przykład 3.

Wykresem funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest parabola o wierzchołku $W(2, 1)$. Wyznaczymy wzór tej funkcji, wiedząc, że w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ funkcja f przyjmuje największą wartość równą 5,5.

Rozpatrujemy wartości funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$. Ponieważ $W(2, 1)$, więc x_w należy do przedziału $\langle -1, 3 \rangle$ oraz $f(2) = 1$.
Największa wartość w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ jest równa 5,5 i jest większa od y_w, zatem ramiona paraboli są skierowane w górę, jak na rysunku obok.
Osią symetrii paraboli jest prosta $x = 2$.



Odległość liczby -1 od liczby 2 na osi liczbowej jest większa niż odległość liczby 3 od liczby 2, zatem $f(-1) > f(3)$. Wynika stąd, że $f(-1) = 5{,}5$.

Teraz skorzystamy ze wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej:

$y = a(x-2)^2 + 1$, gdzie $a > 0$.

Wiemy, że do wykresu funkcji f należy punkt $A\left(-1, 5\frac{1}{2}\right)$, zatem

$5{,}5 = a(-1-2)^2 + 1$ stąd

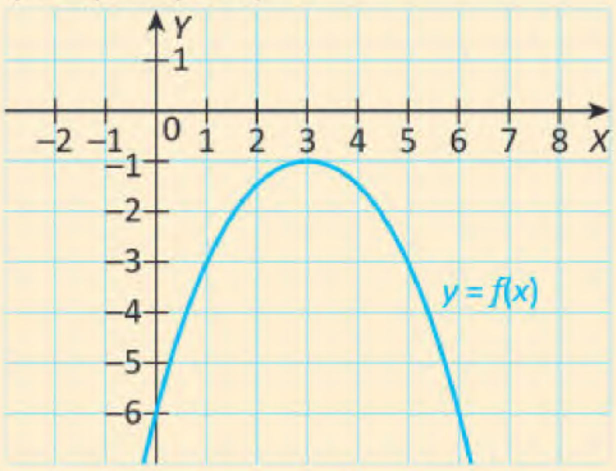
$a = \frac{1}{2}$

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$.

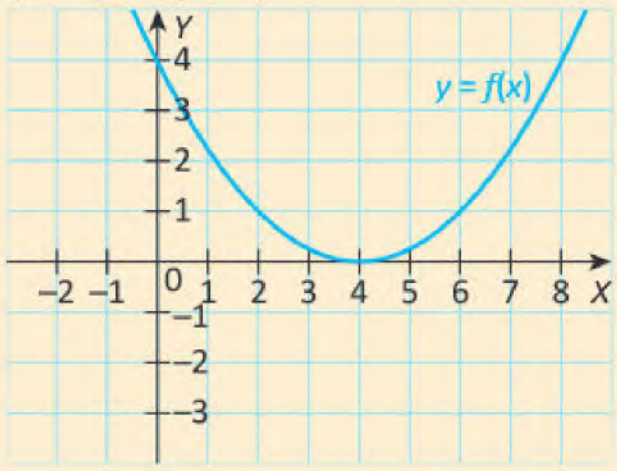
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Odczytaj z wykresu najmniejszą oraz największą wartość funkcji f w podanych przedziałach.

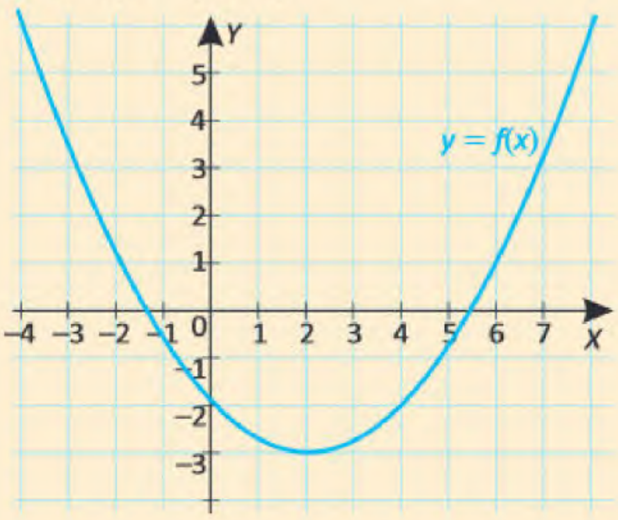
a) $\langle 3, 5\rangle$, $\langle 1, 6\rangle$



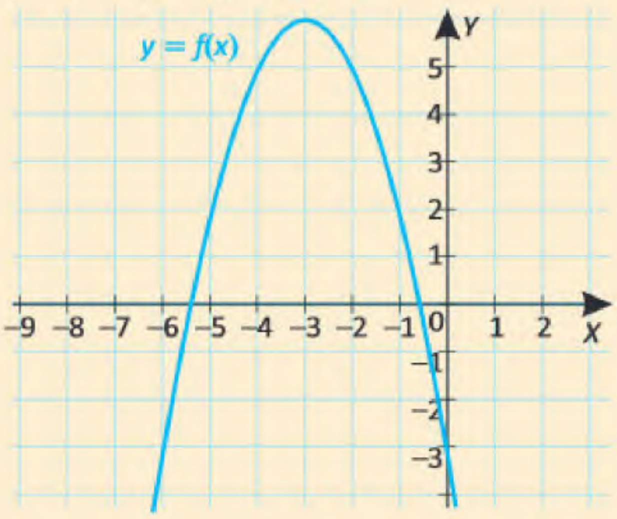
b) $\langle 2, 6\rangle$, $\langle 6, 8\rangle$



c) $\langle -2, 4\rangle$, $\langle 0, 6\rangle$



d) $\langle -6, -3\rangle$, $\langle -4, -1\rangle$



2. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -3, 0\rangle$, jeśli:

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ b) $f(x) = 1 - (x+2)^2$ c) $f(x) = -x^2 - 3x$.

3. Nie szkicując wykresu funkcji kwadratowej, oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale, jeśli:
   a) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+5,\quad \langle -3,-2\rangle$
   b) $f(x)=2x^2-8x,\quad \langle 1,4\rangle$
   c) $f(x)=0{,}4(5-x)(x+3),\quad \langle -2,0\rangle$
   d) $f(x)=0{,}5(x-4)^2+3,\quad \langle 0,\sqrt{2}\rangle$
   e) $f(x)=x^2-4x+4,\quad \langle \sqrt{3},3\rangle$
   f) $f(x)=2x^2+2x-12,\quad \langle -1,1\rangle$.
4. Funkcja kwadratowa f ma następujące własności: $f(7)=0$ oraz $f(1)=f(9)=3$. Czy funkcja kwadratowa f ma wartość najmniejszą, czy największą? Dla jakiego argumentu ta wartość jest przyjmowana?
5. Funkcja kwadratowa f ma następujące własności: $f(0)=0$ oraz $f(2)=f(-6)=-12$.
   a) Czy funkcja kwadratowa f ma wartość najmniejszą, czy największą? Dla jakiego argumentu ta wartość jest przyjmowana?
   D b) Uzasadnij, że największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -4\sqrt{2},-3\sqrt{2}\rangle$ jest równa $f(-3\sqrt{2})$, a najmniejsza wynosi $f(-4\sqrt{2})$.
6. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, wiedząc, że w przedziale $\langle -4,-1\rangle$ funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą 2, a jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(-3,4)$.
7. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, wiedząc, że jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -4,+\infty)$, największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 1,5\rangle$ jest równa 14, a osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x-2=0$.
8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, wiedząc, że funkcja f przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(-3,2)$, a największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -2,-1\rangle$ jest równa 6.
9. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, wiedząc, że funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe, $f(2)=f(6)$ oraz największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 1,4\rangle$ jest równa 18.
10. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że jej wykres jest symetryczny względem prostej $x-4=0$, jednym z jej miejsc zerowych jest liczba 6, a najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle 1,3\rangle$ jest równa -2.
11. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca, to $\langle 1,+\infty)$ oraz największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 0,3\rangle$ jest równa 5, a najmniejsza w tym przedziale jest równa -3.
12. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca, to $(-\infty,-3\rangle$, $f(0)=1$ oraz najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -9,-4\rangle$ jest równa -8.

Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne

Wiedza o własnościach funkcji kwadratowej ma szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu problemów praktycznych. W tym temacie przedstawimy przykłady wykorzystujące wzór funkcji kwadratowej, jej wykres oraz największą i najmniejszą wartość funkcji, przyjmowaną w określonym przedziale.

Przykład 1.

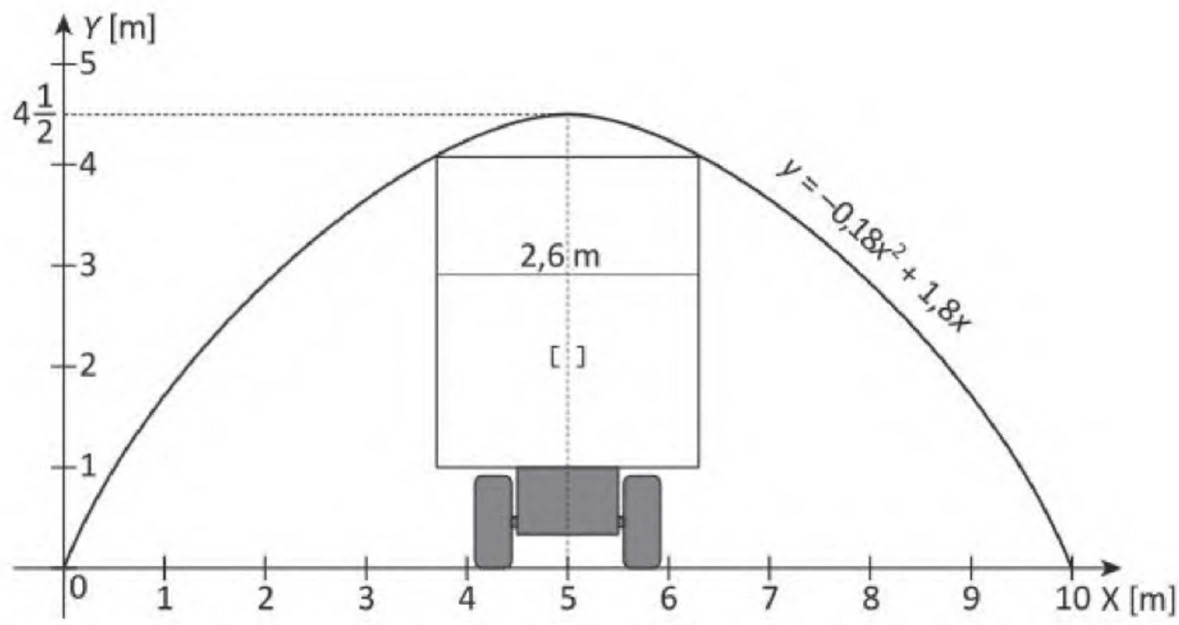
Droga jednokierunkowa prowadzi przez tunel, którego przekrój poprzeczny ma kształt paraboli. Można ją opisać równaniem $y = -0{,}18x^2 + 1{,}8x$, gdzie $x \in \langle 0, 10 \rangle$. Jaką maksymalną wysokość może mieć samochód dostawczy o szerokości 2,6 m, jadący środkiem tunelu, aby zmieścił się w tym tunelu?

Zbudujmy model matematyczny tej sytuacji. Naszkicujmy fragment wykresu funkcji $y = -0{,}18x^2 + 1{,}8x$ opisujący tunel. Miejsca zerowe odczytamy ze wzoru funkcji w postaci iloczynowej:

$y = -0{,}18x^2 + 1{,}8x = -0{,}18x(x-10)$, stąd $x_1 = 0$, $x_2 = 10$.

Okazuje się, że w podstawie tunel ma szerokość 10 m.

Osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x = 5$; współrzędne wierzchołka paraboli są równe $\left(5, 4\frac{1}{2}\right)$.



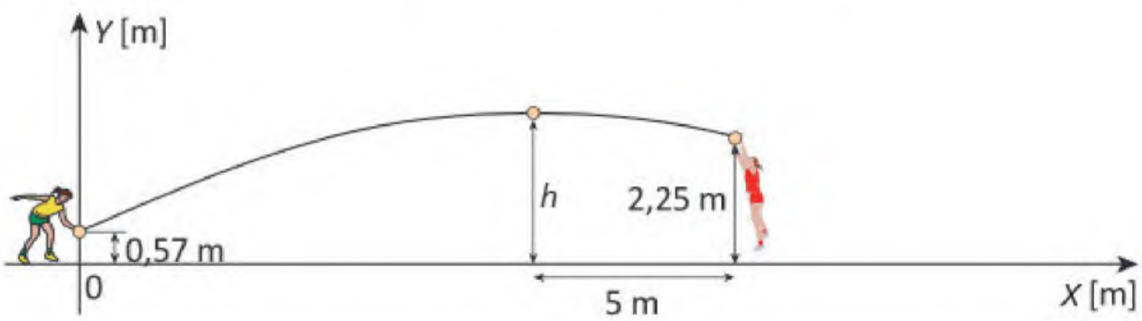
Samochód ciężarowy ma szerokość 2,6 m. Zatem boki samochodu będą znajdowały się w odległości 1,3 m od osi symetrii tunelu. Obliczmy wysokość tunelu w tej sytuacji:

$f(6{,}3) = -0{,}18 \cdot (6{,}3)^2 + 1{,}8 \cdot 6{,}3 = 4{,}1958$

Aby samochód mógł przejechać przez tunel, jego wysokość musi być mniejsza od 4,1958 m.

Przykład 2.

Boisko do siatkówki ma długość 18 m. Podczas meczu siatkówki drużyn szkolnych zawodniczka z drużyny *Arka* serwowała z wysokości 0,57 m, wzdłuż linii bocznej (piłka znajdowała się nad końcową linią boiska). Piłka przeleciała na boisko drużyny przeciwnej, osiągając maksymalną wysokość dokładnie nad siatką. Zawodniczka z drużyny *Barka* odebrała piłkę na wysokości 2,25 m, w odległości 5 m od siatki, na linii toru lotu piłki. Wiedząc, że modelem matematycznym toru lotu piłki jest fragment paraboli o równaniu $y = -0{,}03x^2 + bx + c$ (gdzie x oznacza odległość punktu boiska od końcowej linii boiska, z której wykonano serw), wyznaczymy współczynniki b i c oraz obliczymy, jaką maksymalną wysokość osiągnęła piłka.



Zawodniczka z drużyny *Barka* odebrała piłkę na linii znajdującej się w odległości 14 m od linii serwu. Możemy przyjąć, że dziedziną funkcji $f(x) = -0{,}03x^2 + bx + c$ jest przedział $\langle 0, 14 \rangle$.
Zauważmy, że $f(0) = 0{,}57$ oraz $f(14) = 2{,}25$.
Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} c = 0{,}57 \\ -0{,}03 \cdot 14^2 + b \cdot 14 + c = 2{,}25 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0{,}57 \\ 14b + c = 8{,}13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0{,}57 \\ b = 0{,}54 \end{cases}$$

Wzór funkcji opisującej tor lotu piłki ma postać: $f(x) = -0{,}03x^2 + 0{,}54x + 0{,}57$. Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji jest ujemny. Aby więc obliczyć, jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja, wyznaczamy najpierw x_w.

$x_w = 9, \quad 9 \in \langle 0, 14 \rangle$

Następnie obliczamy y_w.

$y_w = f(x_w)$, więc $f(9) = 3$

Piłka osiągnęła maksymalną wysokość 3 m.

Dużą rolę odgrywają zagadnienia związane z wyznaczaniem tych argumentów funkcji, dla których funkcja przyjmuje, w zadanym przedziale, największą lub najmniejszą wartość. Zadania dotyczące takich zagadnień określa się mianem zadań optymalizacyjnych.

Ćwiczenie 1. Naszkicuj w zeszycie wykresy funkcji

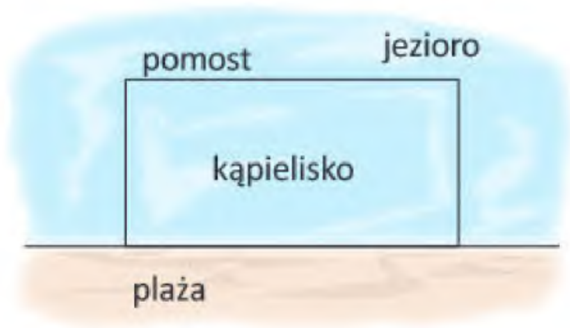
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, gdzie $x \in (0, 3)$ b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, gdzie $x \in (2, 3)$

c) $g(x) = -x^2 + 4x - 3$, gdzie $x \in (1, 4)$ d) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, gdzie $x \in (0, 3)$

Na podstawie tych wykresów zastanów się, kiedy funkcja kwadratowa określona w przedziale otwartym przyjmuje w tym przedziale wartość największą, a kiedy – wartość najmniejszą.

Przykład 3.

Właściciel jeziora chce wybudować pomost, który wyznaczałby kąpielisko strzeżone. Kąpielisko ma mieć kształt prostokąta.

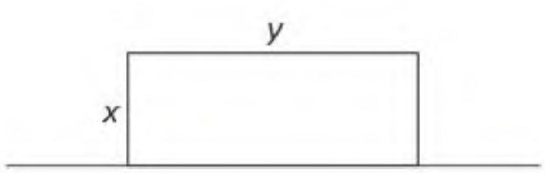


Właściciel może sfinansować budowę pomostu mającego długość 64 m. Zauważmy, że w zależności od wymiarów kąpieliska, przy ustalonej długości pomostu, jego powierzchnia może być różna, na przykład:

- prostokąt o wymiarach 5 m na 54 m ma pole 270 m^2,
- prostokąt o wymiarach 14 m na 36 m ma pole 504 m^2,
- prostokąt o wymiarach 22 m na 20 m ma pole 440 m^2.

Jakie wymiary powinno więc mieć kąpielisko, aby jego powierzchnia była największa? Jakie jest pole tej powierzchni?

Przyjmijmy oznaczenia:



x – długość boku kąpieliska prostopadłego do brzegu (w metrach)

y – długość boku kąpieliska równoległego do brzegu (w metrach)

$2x + y = 64$

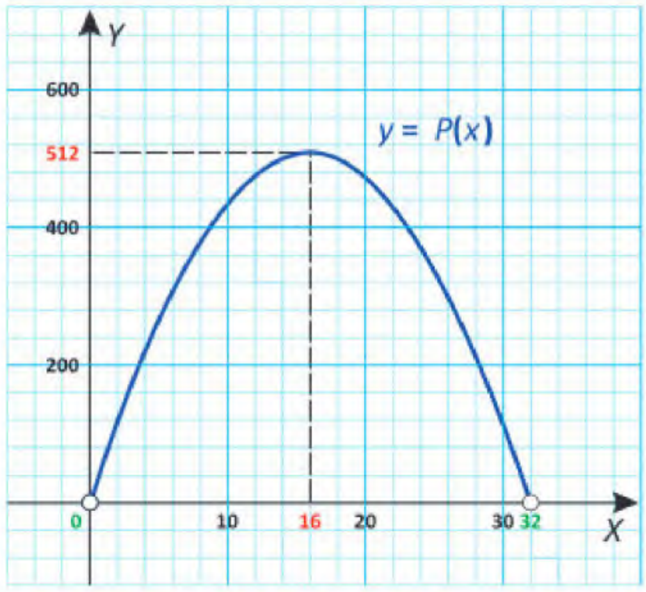
$P = x \cdot y$ — pole powierzchni kąpieliska

$y = 64 - 2x$, więc $P(x) = x \cdot (64 - 2x)$

Otrzymaliśmy funkcję opisującą pole P powierzchni kąpieliska w zależności od długości boku x prostopadłego do brzegu. Ustalmy dziedzinę tej funkcji. Długości boków są liczbami dodatnimi, więc:

$(x > 0 \text{ i } y > 0) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ i } 64 - 2x > 0) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ i } 32 > x) \Leftrightarrow x \in (0, 32)$ zatem $D = (0, 32)$.

Porządkujemy wzór funkcji: $P(x) = -2x^2 + 64x$, gdzie $x \in (0, 32)$.
Rysunek obok przedstawia wykres funkcji $P(x) = -2x^2 + 64x$, gdzie $x \in (0, 32)$.



Zauważamy, że funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu 16. Zatem krótszy bok kąpieliska ma 16 m długości.

Długość boku równoległego do brzegu obliczamy następująco:

$$y = 64 - 2 \cdot 16 = 32$$

Pole powierzchni kąpieliska będzie największe wtedy, gdy jego wymiary będą wynosić 16 m na 32 m i będzie równe 512 m^2.

Przykład 4.

Właściciel sklepu kupuje w hurtowni gry komputerowe w cenie 80 zł za sztukę, a sprzedaje po 130 zł. Miesięcznie sprzedaje 40 gier. Sprzedawca zbadał rynek i oszacował, że każda obniżka ceny gry w jego sklepie o 1 zł zwiększy liczbę sprzedanych gier o jedną sztukę. Jaką nową cenę powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy?

Oznaczmy przez n, $n \in \mathbf{N}_+$, wysokość obniżki ceny gry w złotych. Po obniżce ceny o n zł $(n < 50)$ cena jednej gry w sklepie będzie wynosić $(130 - n)$ zł, ale jednocześnie liczba sprzedanych gier w miesiącu będzie równa $(40 + n)$. Wartość hurtowa sprzedanych gier (w zł) jest równa $(40 + n) \cdot 80$, a kwota w zł uzyskana ze sprzedanych gier w sklepie wynosi

$$(40 + n)(130 - n)$$

Stąd miesięczny zysk właściciela sklepu jest równy

$$f(n) = (40 + n)(130 - n) - (40 + n)80$$

Porządkujemy wzór funkcji f:

$$f(n) = -n^2 + 10n + 2000, \text{ gdzie } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } n < 50$$

Uzasadnij, że funkcja f przyjmuje największą wartość dla argumentu 5.
Właściciel sklepu osiągnie największy miesięczny zysk jeśli cena gry będzie równa 125 zł.

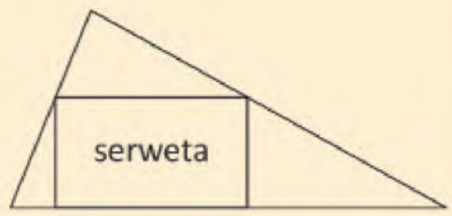
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Liczbę 80 przedstaw w postaci różnicy dwóch liczb tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.
2. Liczbę 24 przedstaw w postaci sumy dwóch liczb tak, aby suma kwadratu podwojonej jednej liczby i kwadratu drugiej liczby była najmniejsza.

3. Rozpatrujemy trójkąty równoramienne, w których suma długości podstawy i wysokości opuszczonej na tę podstawę jest równa 12 cm. Wyznacz długości boków trójkąta mającego największe pole.

4. Krótszy bok prostokąta o wymiarach 16 cm × 10 cm zwiększamy o x cm, a dłuższy zmniejszamy o x cm.
   a) Wyznacz wzór funkcji opisującej pole nowego prostokąta w zależności od długości x i podaj dziedzinę tej funkcji.
   b) Dla jakiej długości x pole otrzymanego prostokąta jest największe? Oblicz to pole.

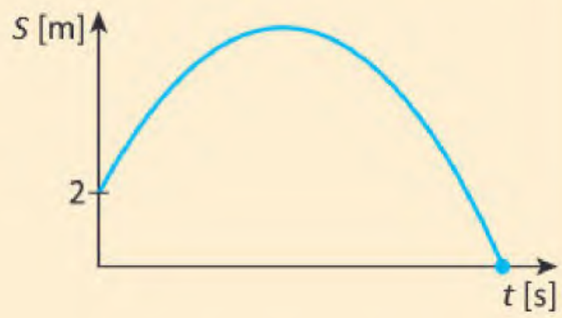
5. Z kawałka płótna w kształcie trójkąta ostrokątnego o podstawie 2 m i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 1 m chcemy wyciąć prostokątną serwetę, w sposób przedstawiony na rysunku. Jakie powinny być wymiary serwety, aby jej pole było jak największe?



6. Skup grzybów jesienią trwał 21 dni. Liczbę kilogramów grzybów skupionych w poszczególnych dniach opisuje funkcja $f(x) = -3x^2 + 72x$, gdzie $x \in \boldsymbol{N}_+$ i $x \leqslant 21$. W którym dniu skupiono najwięcej grzybów i ile kilogramów grzybów skupiono tego dnia?

7. Rzucono kamień pionowo w górę z prędkością początkową 12 m/s. Zależność między wysokością S kamienia liczoną w metrach, a czasem t liczonym w sekundach, wyraża wzór funkcji: $S(t) = 12t - 5t^2$. Podaj dziedzinę tej funkcji. Jaką największą wysokość osiągnie ten kamień?

8. Tor lotu piłki wyrzuconej z wysokości 2 m ilustruje krzywa na rysunku poniżej, będąca fragmentem paraboli. Wiedząc, że po 4,9 s lotu piłka osiągnęła największą wysokość równą 26,01 m:
   a) wyznacz wzór funkcji w postaci ogólnej, opisującej związek między wysokością, na jaką wzniosła się piłka, a czasem lotu i podaj jej dziedzinę.
   b) Po ilu sekundach lotu piłka spadła na ziemię?



9. Właściciel sklepu odzieżowego kupuje w hurtowni koszule męskie w cenie 30 zł za sztukę i sprzedaje każdą po 90 zł. Miesięcznie sprzedaje 16 koszul. Badając rynek odzieżowy, zauważył, że każda obniżka ceny koszuli o 2 zł powoduje wzrost sprzedaży o 1 sztukę. Jaką cenę koszuli powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy?

Równania kwadratowe

Definicja 1.

Równaniem kwadratowym z niewiadomą x nazywamy równanie przyjmujące postać $ax^2 + bx + c = 0$, przy czym a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

Rozwiązać równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, oznacza wyznaczyć argumenty funkcji $y = ax^2 + bx + c$, dla których przyjmuje ona wartość zero. Zatem rozwiązanie równania kwadratowego sprowadzamy do obliczenia miejsc zerowych odpowiedniej funkcji kwadratowej. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta = b^2 - 4ac$:

- nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma jedno rozwiązanie, $\frac{-b}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$,
- ma dwa rozwiązania, $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

Korzystając z twierdzenia 1., możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe.

Przykład 1.

Rozwiążemy równania:

a) $2x^2 - x + 10 = 0$ b) $\frac{1}{3}x^2 + 6x + 27 = 0$ c) $x^2 - x - 6 = 0$.

Ad a) Wypisujemy współczynniki równania:

$a = 2,\ b = -1,\ c = 10$

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -79,\quad -79 < 0$

Wyróżnik dla funkcji kwadratowej $y = 2x^2 - x + 10$ jest ujemny, więc równanie $2x^2 - x + 10 = 0$ nie ma rozwiązań.

Ad b) Współczynniki są następujące:

$a = \frac{1}{3},\ b = 6,\ c = 27$

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = 36 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 27 = 0$

Równanie $\frac{1}{3}x^2 + 6x + 27 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie. Obliczamy:

$$x_0 = \frac{-6}{2 \cdot \frac{1}{3}}, \text{ czyli } x_0 = -9$$

Rozwiązaniem równania jest liczba -9.

Ad c) Wyznaczamy wyróżnik dla funkcji kwadratowej $y = x^2 - x - 6$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25, \quad \text{stąd} \quad \sqrt{\Delta} = 5.$$

Równanie $x^2 - x - 6 = 0$ ma dwa rozwiązania. Obliczamy:

$$x_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot 1} = -2 \qquad x_2 = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot 1} = 3$$

Rozwiązaniami równania są dwie liczby -2 oraz 3.

Ćwiczenie 1. Równanie $(3x-2)^2 = (x+1)(x+4)$ doprowadź do postaci $ax^2 + bx + c = 0$. Następnie rozwiąż to równanie.

W rozwiązywaniu równań kwadratowych często stosujemy metodę wykorzystującą następującą własność dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

Przykład 2.

Rozwiążemy równania: a) $(x-5)(x+3) = -2x(x-5)$ b) $(x+1)^2 - 4 = 0$

Ad a) Równanie zapisujemy w postaci:

$$(x-5)(x+3) + 2x(x-5) = 0$$

Lewa strona jest sumą dwóch iloczynów, w których występuje taki sam czynnik $(x-5)$. Wyłączamy ten czynnik poza nawias:

$$(x-5) \cdot (x+3) + 2x \cdot (x-5) = 0$$
$$(x-5) \cdot [(x+3) + 2x] = 0$$
$$(x-5) \cdot (3x+3) = 0, \quad \text{stąd}$$
$$x - 5 = 0 \vee 3x + 3 = 0$$
$$x = 5 \quad \vee \quad x = -1$$

Stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

Równanie ma dwa rozwiązania: 5 oraz -1.

Ad b) Stosujemy wzór na różnicę kwadratów.

$$(x+1)^2 - 2^2 = 0$$
$$(x+1-2)(x+1+2) = 0$$
$$(x-1)(x+3) = 0, \quad \text{stąd}$$
$$x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = -3$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Równanie ma dwa rozwiązania: 1 oraz -3.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż równanie $x(x-2)-2(x-2)=0$.

Stosując metodę przedstawioną w przykładzie 2., często rozwiązujemy równania kwadratowe szybciej, niż gdybyśmy sprowadzali je do postaci $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a \neq 0$, a następnie korzystali ze wzorów na miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż równanie:
   a) $x^2-7x-8=0$ b) $3x^2-x=0$ c) $5x^2+2=0$
   d) $\frac{1}{4}x^2-x+1=0$ e) $-2x^2+3x-5=0$ f) $6x^2-x-5=0$.
2. Rozwiąż równanie:
   a) $-x^2+5x=0$ b) $-x^2+4=0$ c) $3x^2=5x$
   d) $-5x^2-10=0$ e) $-5x^2-10x=0$ f) $4x^2=25$.
3. Rozwiąż równanie:
   a) $\frac{1}{5}x^2+5=2x$ b) $2x^2-3\sqrt{2}x=4$ c) $3x^2+8x+4=0$
   d) $5x=4x^2+1$ e) $3x^2+2=7x$ f) $6x^2=x+1$.
4. Rozwiąż równanie:
   a) $5x^2=-x$ b) $(2x)^2=4$ c) $(2x-1)^2=2x-1$
   d) $(x-1)\cdot x=2(x-1)$ e) $x^2+64=16x$ f) $(-x-1)(x+1)=9$
   g) $(2x-1)^2=4$ h) $-\frac{1}{2}x^2+2x-2=0$ i) $2x+4=(2x+4)^2$.
5. Rozwiąż równanie:
   a) $x^2-2x=3$ b) $0{,}5x^2-x+8=0$ c) $(x+0{,}5)^2=2x$
   d) $9-(x-2)^2=0$ e) $16x^2=(x+2)^2$ f) $(x-3)^2=(x-3)(5x+2)$
   g) $(x-4)^2-(2x-6)^2=0$ h) $2x^2=(x+5)^2$ i) $4(x+1)^2=9(x-1)^2$.
6. Rozwiąż równania, stosując wzór na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.
   a) $4x^2-4x-5=0$ b) $9x^2-6x-1=0$
   c) $\frac{1}{4}x^2+x-3=0$ d) $\frac{4}{9}x^2+4x+6=0$
7. Rozwiąż równanie:
   a) $(2x-3)(x+7)=4x^2-21$ b) $(2x+5)^2=x(x+8)$
   c) $(4x+1)(1-4x)+7x^2=6x+2$ d) $2x(x+6)=7x-3$
   e) $(x-5)(x+5)=-5(x+6)$ f) $(3-2x)(2x-3)=(x+1)^2-20$.

8. Rozwiąż równanie:
   a) $(x+1)(x-1)=(2x+5)(x+1)$ b) $(2x+1)^2-(3x-2)(3x+2)=4$
   c) $(3x-1)^2-(2x+3)^2=x^2-14x-9$ d) $(x-5)^2-(2x+3)(x+1)=2x^2+22$
   e) $(-3x+1)(1-3x)=7x(x+1)-5$ f) $(2x+6)(x-1)-7x^2=(3x+4)(x-2)$.
9. Rozwiąż równanie:
   a) $\frac{(2x+3)(1-x)}{6}-\frac{x+2}{4}=x^2-\frac{(x-1)x}{3}$
   b) $\frac{(x+2)(2-x)}{4}-\frac{2x^2-0{,}5}{2}=\frac{(2-5x)^2-(4x-1)^2}{8}$
   c) $\frac{(4x-3)^2-8+60x}{15}=\frac{(-2x-3)(2x+3)}{5}-\frac{8}{15}$.
10. Rozwiązaniami równania kwadratowego $2x^2+bx+c=0$ są liczby x_1 i x_2. Wyznacz b oraz c, wiedząc, że:
    a) $x_1=1\frac{2}{5}$ $x_2=-5$ b) $x_1=-7$ $x_2=7$
    c) $x_1=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$ $x_2=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ d) $x_1=\sqrt{3}$ $x_2=\sqrt{27}$.
11. Jedynym rozwiązaniem równania kwadratowego $6x^2+bx+c=0$ jest liczba x_0. Wyznacz b oraz c, wiedząc, że:
    a) $x_0=\frac{1}{2}$ b) $x_0=-4$ c) $x_0=\frac{\sqrt{2}}{6}$ d) $x_0=-3\frac{1}{3}$.
12. Rozwiąż graficznie równanie:
    a) $x^2-4x=2x-5$ b) $4-(x-1)^2=4x$
    c) $(x-3)^2=x-1$ d) $-(x+2)^2-1=-x-5$.
13. Wyznacz wartość a tak, aby podana obok równania liczba była rozwiązaniem tego równania, jeśli:
    a) $3x^2-(a+1)x-a+2=0,\quad 2$ b) $7x^2-(a^2+9)x-5=0,\quad 5$
    c) $10x^2-(a^2+4)x-3=0,\quad -\frac{1}{5}$ d) $2x^2+(3a^2+4a)x-4=0,\quad -4$.

D 14. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a, równanie $2x^2+ax-a-2=0$ ma rozwiązanie.

D 15. Wykaż, że jeśli $2b=2c+1$, gdzie $b, c \in \mathbf{R}$, to równanie $\frac{1}{2}x^2+bx+c=0$ ma rozwiązanie.

D 16. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a, równanie $x^2+2ax+a^2=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wyznacz to rozwiązanie.

17. Liczba 3 jest rozwiązaniem danego równania z niewiadomą x. Sprawdź, czy równanie ma jeszcze jedno rozwiązanie. Jeśli tak, to wyznacz to rozwiązanie.
    a) $x^2-(a^2+2)x+4a+1=0$ b) $2x^2-ax-12a^2-3=0$.

Równania prowadzące do równań kwadratowych

Równanie $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **równaniem dwukwadratowym**.

Równanie dwukwadratowe łatwo daje się sprowadzić do równania kwadratowego przez wprowadzenie pomocniczej niewiadomej.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$.

Równanie $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$, można zapisać w postaci

$(x^2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$.

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą t, gdzie $x^2 = t$. Wówczas otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t:

$t^2 - 6t - 7 = 0$.

Rozwiązujemy to równanie:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$

$t = \frac{6-8}{2} = -1$ lub $t = \frac{6+8}{2} = 7$

Następnie wracamy do podstawienia $x^2 = t$:

$x^2 = -1$ lub $x^2 = 7$

równanie sprzeczne $\quad x = -\sqrt{7}$ lub $x = \sqrt{7}$

Równanie dwukwadratowe $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ ma dwa rozwiązania: $-\sqrt{7}$ oraz $\sqrt{7}$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż dane równania, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 9x^2 = 0$

Przykład 2.

Wykażemy, że równania:

a) $x^4 - 6x^2 + 18 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$

są sprzeczne.

Ad a) $x^4 - 6x^2 + 18 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - 6t + 18 = 0$

$\Delta = -36, \ -36 < 0.$

Równanie z niewiadomą t nie ma rozwiązań. Wówczas nie ma rozwiązań także równanie dwukwadratowe.

Ad b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0, \ x^2 = t$

$t^2 + 12t + 35 = 0$

$\Delta = 4, \quad \sqrt{\Delta} = 2$

$t = -5$ lub $t = -7$

$x^2 = -5$ lub $x^2 = -7$

Obydwa równania kwadratowe z niewiadomą x są sprzeczne. Równanie dwukwadratowe nie ma rozwiązań.

UWAGA: W przykładzie 2b) uzasadnienie może być też następujące:
Dla dowolnej liczby rzeczywistej x:

$x^4 \geqslant 0$ i $12x^2 \geqslant 0$ oraz $35 > 0$, zatem

$x^4 + 12x^2 + 35 > 0$. To znaczy, że równanie $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ nie ma rozwiązań.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie: $(x^2 - 5)^2 + 2(x^2 - 5) + 1 = 0$.

Wykonujemy podstawienie: $t = x^2 - 5$.

$t^2 + 2t + 1 = 0$

$(t + 1)^2 = 0$

$t = -1$

Wracamy do podstawienia:

$x^2 - 5 = -1$

$x^2 = 4$

$x = -2 \quad \vee \quad x = 2$

Równanie ma dwa rozwiązania: -2 oraz 2.

Ćwiczenie 2. Doprowadź równanie z przykładu 3. do postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Następnie rozwiąż je, podstawiając pomocniczą niewiadomą t, gdzie $t = x^2$. Porównaj oba rozwiązania.

Zajmiemy się jeszcze równaniami, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka.

Równania, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka, nazywamy **równaniami pierwiastkowymi**.

Omówimy te równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych.

Przykład 4.

Rozwiążemy równania:

a) $\sqrt{x} + 1 = x$ b) $x + \sqrt{x+2} = 4$ c) $\sqrt[3]{x-3} + 2 = 3\sqrt[6]{x-3}$

Ad a) Dziedziną równania $\sqrt{x} + 1 = x$ jest przedział $\langle 0, +\infty)$.
Dokonujemy podstawienia:

$\boldsymbol{\sqrt{x} = t}$, wówczas

$t + 1 = t^2$

$t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 5, \qquad t = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- Jeśli $t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, to wracając do podstawienia otrzymujemy równanie:

$\sqrt{x}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ – które jest sprzeczne, bo $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$.

- Jeśli $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to otrzymujemy równanie:

$\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Wyrażenia po obu stronach równania są nieujemne.

$x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ Równanie podnosimy stronami do kwadratu.

$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}\in\langle 0,+\infty)$

Równanie $\sqrt{x}+1=x$ ma jedno rozwiązanie: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ad b) Dziedziną równania $x+\sqrt{x+2}=4$ jest przedział $\langle -2,+\infty)$.
Równanie przekształcamy równoważnie, dodając do obu jego stron liczbę 2.

$(x+2)+\sqrt{x+2}=6$

Dokonujemy podstawienia

$t=\sqrt{x+2}$

które prowadzi nas do równania:

$t^2+t=6,$ czyli
$t^2+t-6=0$
$\Delta=25,$ $t=-3 \quad \vee \quad t=2$
$\sqrt{x+2}=-3 \quad \vee \quad \sqrt{x+2}=2$
równanie sprzeczne $x=2,\quad 2\in\langle -2,+\infty)$

Równanie $x+\sqrt{x+2}=4$ ma jedno rozwiązanie równe 2.

Ad c) Dziedziną równania $\sqrt[3]{x-3}+2=3\sqrt[6]{x-3}$ jest przedział $\langle 3,+\infty)$.

$\left(\sqrt[6]{x-3}\right)^2+2=3\sqrt[6]{x-3}$

Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt[6]{x-3}$. Wtedy $t^2=\sqrt[3]{x-3}$. Mamy:

$t^2+2=3t,$ czyli
$t^2-3t+2=0$
$\Delta=1,$ $t=1 \vee t=2$

Wracamy do podstawienia:

$\sqrt[6]{x-3}=1 \quad \vee \quad \sqrt[6]{x-3}=2$ Wyrażenia po obu stronach równań są nieujemne.

$x-3=1 \quad \vee \quad x-3=64$

$x=4 \quad \vee \quad x=67$ Oba rozwiązania należą do dziedziny.

Równanie $\sqrt[3]{x-3}+2=3\sqrt[6]{x-3}$ ma dwa rozwiązania: 4 oraz 67.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Rozwiąż równanie:
   a) $x^4-8x^2+15=0$ b) $2x^4-7x^2-4=0$ c) $4x^4+4x^2+1=0$
   d) $x^4-50x^2+625=0$ e) $x^4-81x^2=0$ f) $x^4=-36x^2$.

2. Rozwiąż równanie:
   a) $x^2\cdot(x^2-2)=3-4x^2$ b) $(x^2-4)^2+4=4x^2$
   c) $(x^2-1)(x^2-3)+1=0$ d) $10x^4+17x^2+3=(x^2-1)^2$
   e) $(x^2+5)^2=-x^2-5$ f) $4(1-x^4)-6x^2=(2x^2+1)^2$.

3. Rozwiąż równanie:
   a) $(x^2+x+1)(x^2-2)=x^3-2x$ b) $(2x^2-3)(-2x^2-3)=5-6x^2$
   c) $(x+1)^2(x^2+3)=2x(x^2+3)$ d) $(x^2-3x+1)(2x^2+5)=3x^2(3-2x)-5(3x-1)$
   e) $(x^2-2x)^2+(x^2+2x)^2=10$ f) $(5-x^2)(-x^2-5)-x^4=75-4(2x^2-1)^2$.

4. Podaj przykład równania dwukwadratowego, które:
   a) ma dwa rozwiązania b) jest sprzeczne
   c) ma trzy rozwiązania d) ma cztery rozwiązania.

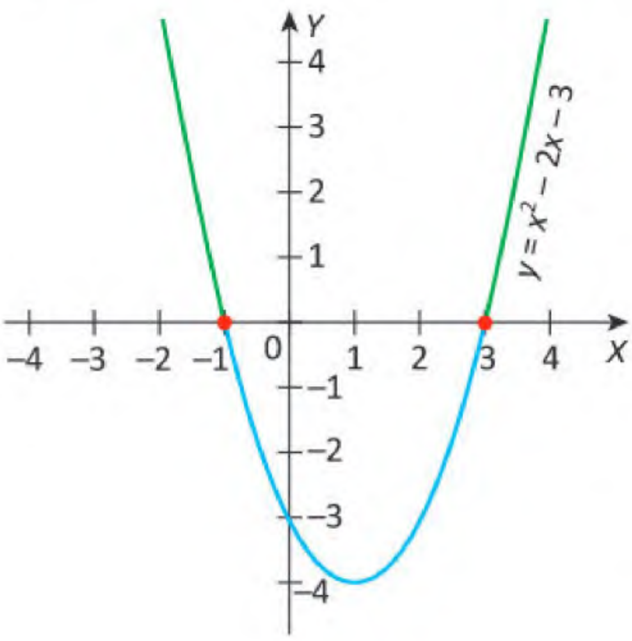
5. Rozwiąż równanie:
   a) $(x^2-1)^2=3(x^2-1)$ b) $(x^2+2)^2+49=14(x^2+2)$
   c) $3(2x^2+5x)^2+6(2x^2+5x)=0$ d) $4(x^2+1)^2-4(x^2+1)+1=0$
   e) $(x^2+3)^2=2(x^2+3)+3$ f) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$.

6. Rozwiąż równanie:
   a) $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)=0$ b) $(\sqrt{4x}-2)\cdot\sqrt{x}=0$
   c) $x+4=4\sqrt{x}$ d) $2\sqrt{x}-x=1$
   e) $\sqrt{x-5}=x-5$ f) $2\sqrt{1-x}+x=1$.

7. Rozwiąż równanie:
   a) $x+\sqrt{x-3}=5$ b) $x-7\sqrt{x-1}+11=0$
   c) $x^2+7\sqrt{x^2+1}-7=0$ d) $x^2+2\sqrt{x^2+4}-11=0$
   e) $\sqrt{x+5}=10-3\sqrt[4]{x+5}$ f) $6-5\sqrt[4]{2-x}=-\sqrt{2-x}$
   g) $x^2+9=5\sqrt{x^2+3}$ h) $x+6\sqrt{x+2}+7=0$.

Nierówności kwadratowe

Rysunek przedstawia wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Na podstawie wykresu tej funkcji umiesz już stwierdzić, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość zero, dla jakich argumentów wartości danej funkcji są dodatnie, a dla jakich ujemne.



Przypomnijmy: miejsca zerowe funkcji to pierwsze współrzędne punktów przecięcia wykresu z osią *OX*, zaznaczonych kolorem czerwonym. Są to liczby –1 i 3.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \lor x = 3)$$

Powyżej osi *OX* znajdują się punkty wykresu funkcji, zaznaczone kolorem zielonym, których druga współrzędna jest dodatnia.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

Poniżej osi *OX* znajdują się punkty wykresu funkcji, zaznaczone kolorem niebieskim, których druga współrzędna jest ujemna.

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

Umiejętność odczytywania z wykresu funkcji argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne, lub równe zeru, jest bardzo przydatna w rozwiązywaniu nierówności kwadratowych.

Definicja 1.

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność przyjmującą postać $ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, lub $ax^2 + bx + c < 0$, lub $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, przy czym a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Odczytanie zbioru argumentów funkcji, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), jest równoważne rozwiązaniu nierówności $x^2 - 2x - 3 > 0$ $(x^2 - 2x - 3 < 0)$. Zatem:

- Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2x - 3 > 0$ jest suma przedziałów $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.
- Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2x - 3 < 0$ jest przedział $(-1, 3)$.

Podczas rozwiązywania nierówności kwadratowej będziemy korzystać z wykresu odpowiedniej funkcji kwadratowej.

Zauważ, że współrzędne wierzchołka paraboli oraz punkt przecięcia wykresu z osią *OY* nie mają wpływu na zbiór rozwiązań nierówności.

Istotne jest położenie tego wykresu w stosunku do osi OX. W szczególności miejsca zerowe tej funkcji oraz to, czy parabola ma ramiona skierowane w dół, czy w górę. Dlatego wystarczy naszkicować przybliżony wykres, uwzględniający miejsca zerowe i znak współczynnika przy x^2.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówności:

a) $-x^2 + 1 < 0$ b) $4x \geqslant x^2$

Ad a)

$-x^2 + 1 < 0$

$-(x^2 - 1) < 0$ Korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

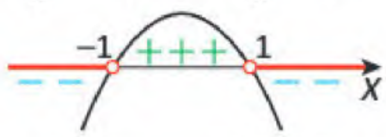
$-(x + 1)(x - 1) < 0$ Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji $y = -x^2 + 1$.

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$ Szkicujemy wykres funkcji.

Współczynnik przy x^2 jest równy -1.

Parabola ma ramiona skierowane w dół.

Odczytujemy argumenty, dla których wartości funkcji są ujemne.



$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Ad b)

$4x \geqslant x^2$ Nierówność doprowadzamy do postaci $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

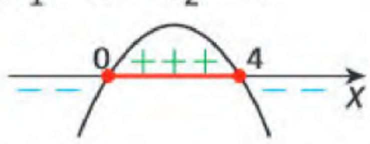
$4x - x^2 \geqslant 0$ $a = -1, \quad -1 < 0$

$x(4 - x) \geqslant 0$ Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji $y = -x^2 + 4x$.

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$ Szkicujemy przybliżony wykres funkcji.

Parabola ma ramiona skierowane w dół.

Odczytujemy argumenty, dla których wartości funkcji są nieujemne.



$x \in \langle 0, 4 \rangle$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\langle 0, 4 \rangle$.

Przykład 2.

Przeanalizujemy teraz nierówności, w których rozpatrzymy wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 4x + 4$ mającej tylko jedno miejsce zerowe.

$f(x) = x^2 + 4x + 4.$

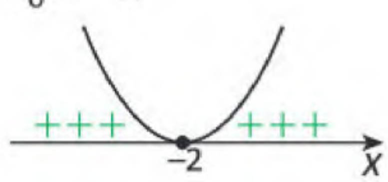
$f(x) = (x + 2)^2$ Stosujemy wzór $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$x_0 = -2$ Funkcja ma jedno miejsce zerowe: -2.

Szkicujemy przybliżony wykres.

Współczynnik przy x^2 jest dodatni.

Parabola ma ramiona skierowane w górę.



Odczytujemy:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

Funkcja f nie przyjmuje wartości ujemnych.

Na podstawie powyższych informacji otrzymujemy:

- $x^2 + 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$,
- $x^2 + 4x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R}$,
- $x^2 + 4x + 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Nierówność $x^2 + 4x + 4 < 0$ nie ma rozwiązań.
W ten sposób rozwiązaliśmy cztery możliwe nierówności.

Ćwiczenie 1. Na podstawie wykresu odpowiedniej funkcji rozwiąż nierówność:

a) $-x^2 + 8x - 16 < 0$ b) $-x^2 - 1 < 0$.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność: $x(5x + 10) + 1 \geqslant 12x$.

$x(5x + 10) + 1 \geqslant 12x$

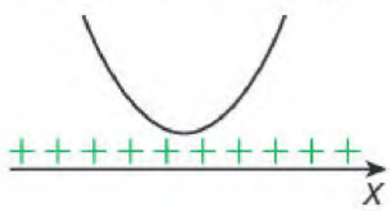
$5x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$

Nierówność doprowadzamy do postaci: $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, gdzie $a \neq 0$.

$\Delta = 4 - 20 = -16, \quad -16 < 0$

Wyróżnik funkcji $y = 5x^2 - 2x + 1$ jest ujemny.

Szkicujemy przybliżony wykres funkcji.
Współczynnik przy x^2 jest dodatni.



Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

$5x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R}$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Ćwiczenie 2. Naszkicuj wykres funkcji, a następnie rozwiąż nierówności:

a) $-x^2 - 1 \leq 0$ b) $-x^2 - 1 \geq 0$

UWAGA: Ujemny wyróżnik nie świadczy o tym, że zbiór rozwiązań nierówności jest pusty. Jedynie informuje nas, że dana funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych. Dlatego, rozwiązując nierówność kwadratową, zawsze szkicujemy przybliżony wykres odpowiedniej funkcji kwadratowej.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż nierówność:

a) $x^2 > 0$ b) $x^2 \leqslant 0$ c) $x^2 < 4$

d) $x^2 \geqslant 9$ e) $-x^2 > 1$ f) $x^2 + 16 > 0$.

2. Rozwiąż nierówność:
a) $0{,}2x^2 + x > 0$ b) $3x^2 \leqslant 8x$ c) $2(x^2 + 5) < 5x^2 + 1$
d) $-x^2 + 4x - 4 \geqslant 0$ e) $-4x^2 + 4x < 1$ f) $x^2 + x + 2 > 0$.

3. Rozwiąż nierówność:
a) $(3x - 5)(3x - 5) > 0$ b) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 8 \leqslant 0$
c) $2(x - 4)^2 + 5 > 0$ d) $2x(2x - 7) < 7(2x - 7)$
e) $64 \leqslant 4(x - 5)^2$ f) $(x - 1) < 3(x - 1)(x + 2)$.

4. Rozwiąż nierówność:
a) $(2x - 3)(x + 5) > (3x + 2)^2 - 21$ b) $4x^2 - 20x + 25 < (3x - 1)(2x - 5)$
c) $x^2 + (5x - 2)(3 - x) < 13x - 5$ d) $(8 - x)(-x - 8) - (2x + 1)^2 \geqslant -64$
e) $x^2 - 5x + 6 > (x - 1)^2 + (2x - 1)(-2x - 1)$
f) $2(x - 3)^2 - 27 < 3x(x - 2)$.

5. Rozwiąż nierówność:
a) $\frac{x^2-4}{2} - \frac{3x+6}{5} < 0$ b) $\frac{(x-3)(x+3)}{3} \geqslant \frac{(x+1)^2}{2} - 2$
c) $\frac{(2x-1)^2}{2} > (5-x)(5+x) - 49$ d) $\frac{2x+5}{2} - \frac{(x+1)(2x-1)}{4} < 3$
e) $\frac{3x+2}{5} - \frac{(2x-1)(1-2x)}{10} \leqslant \frac{1}{2}$ f) $\frac{(5-3x)(2x-1)}{8} + \frac{(x-2)^2}{2} \leqslant 1\frac{1}{8}$.

6. Podaj przykład nierówności kwadratowej, której zbiorem rozwiązań jest:
a) przedział liczbowy $\langle -1, 3 \rangle$, b) $\boldsymbol{R} - \{3\}$,
c) $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$, d) zbiór jednoelementowy $\{-1\}$.

7. Dana jest nierówność kwadratowa $(2x - 5)(ax + 1) < 0$ z niewiadomą x, $a \neq 0$. Czy istnieje liczba a, dla której zbiorem rozwiązań tej nierówności jest:
a) przedział liczbowy $\left(-3, 2\frac{1}{2}\right)$ b) suma przedziałów $(-\infty, -4) \cup \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right)$?
Odpowiedź uzasadnij.

8. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:
a) $f(x) = \sqrt{-3x^2 + 9x}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$ d) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.

9. Wyznacz wszystkie wartości m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których liczba x należy do podanego przedziału liczbowego, jeśli:
a) $x = m^2 + 3m$, $x \in \langle 4, +\infty)$ b) $x = -2m^2 + 6m + 1$, $x \in (-\infty, 5)$
c) $x = 3 - m^2$, $x \in (1, 5)$ d) $x = 2m^2 + 3m$, $x \in \langle -1, 9 \rangle$.

Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

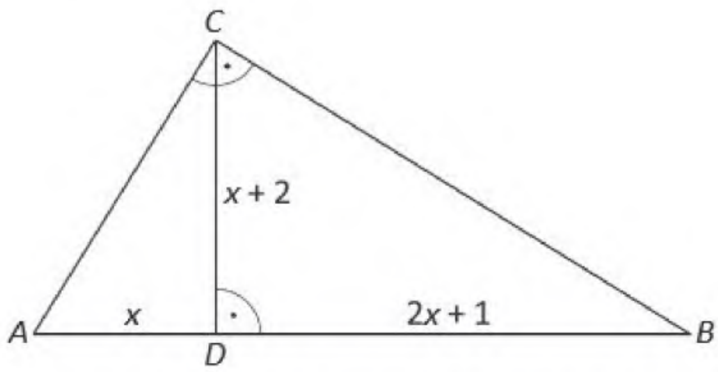
Przykład 1.

W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Wysokość CD dzieli przeciwprostokątną AB na takie odcinki AD i DB, że $|DB| = 2|AD| + 1$. Wiedząc dodatkowo, że $|CD| = |AD| + 2$, obliczymy pole trójkąta ABC.

Analiza:

Aby obliczyć pole P trójkąta ABC, wystarczy obliczyć długość przeciwprostokątnej AB i wysokość CD. Wtedy

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD|$$



Przyjmijmy oznaczenia:

$|AD| = x, \quad x > 0$

Wówczas

$|DB| = 2x + 1$

$|CD| = x + 2$

oraz

$|AB| = |AD| + |DB|$.

Ułożenie i rozwiązanie równania:

Z twierdzenia poznanego w klasie pierwszej – o wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej na przeciwprostokątną – wynika, że

$|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |DB|}$, stąd $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$, zatem

$(x+2)^2 = x(2x+1)$

$-x^2 + 3x + 4 = 0 \qquad \Delta = 25 \qquad \sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -1$

Liczba -1 nie spełnia warunku $x > 0$. Mamy więc

$|AD| = 4 \quad |DB| = 9 \quad |CD| = 6$ oraz $|AB| = 13$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39.$$

Sprawdzenie:

Wysokość CD jest o 2 dłuższa od odcinka AD $(6 - 4 = 2)$, podwojona długość odcinka AD zwiększona o 1 jest równa długości odcinka DB $(2 \cdot 4 + 1 = 9)$. Ponadto $\sqrt{|AD| \cdot |DB|} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 = |CD|$, przeciwprostokątna ma długość 13, a wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną – 6. Pole trójkąta ABC jest więc równe $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6$, czyli 39.

Odpowiedź:

Pole trójkąta ABC jest równe 39.

Przykład 2.

Dwa lata temu pani Alicja Nowak założyła dwuletnią lokatę, o stałym oprocentowaniu, wpłacając do banku 20 000 zł. Kapitalizacja odsetek następowała po każdym roku oszczędzania. Jakie było roczne oprocentowanie tej lokaty, jeżeli pani Alicja po dwóch latach oszczędzania ma na tej lokacie, wraz z odsetkami, 20 402 zł? Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

Analiza:
x – oprocentowanie roczne lokaty, wyrażone w ułamku dziesiętnym, $x > 0$

$20\,000 + x \cdot 20\,000 = (1 + x) \cdot 20\,000$ – kwota (w zł), jaką pani Alicja miała na lokacie po roku oszczędzania

$(1 + x) \cdot 20\,000 + x \cdot [(1 + x) \cdot 20\,000] = (1 + x) \cdot 20\,000 \cdot (1 + x)$ – kwota (w zł), jaką pani Alicja ma na lokacie po dwóch latach oszczędzania

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$(1 + x)^2 \cdot 20\,000 = 20\,402 \quad |: 20\,000$$

$$(1 + x)^2 = 1{,}0201$$

$$1 + x = 1{,}01 \ \vee \ 1 + x = -1{,}01$$

$$x = 0{,}01 \ \vee \ x = -2{,}01$$

Liczba $-2{,}01$ nie spełnia założenia $x > 0$.

Sprawdzenie:
Roczne oprocentowanie lokaty wynosi 1%. Po roku oszczędzania na lokacie znajdowało się 20 200 zł. Po drugim roku bank dopisał $0{,}01 \cdot 20\,200$ (zł) $= 202$ (zł) odsetek. Na lokacie znajduje się obecnie kwota $20\,200 + 202 = 20\,402$ (zł).

Odpowiedź:
Oprocentowanie lokaty wynosiło 1% w stosunku rocznym.

Przykład 3.

W zakładzie pracy pana Grzegorza zależność przychodów ze sprzedaży od wielkości dziennej produkcji wyraża wzór $p(n) = 150n$, gdzie n oznacza liczbę sztuk wyprodukowanego towaru. Koszty produkcji, w złotych, określa zależność
$k(n) = n^2 + 50n + 1600$

a) Napiszemy wzór funkcji $z(n)$ – zależności zysku zakładu od wielkości dziennej produkcji, jeśli zysk jest różnicą między przychodem zakładu a kosztami produkcji. Następnie obliczymy, jaka wielkość produkcji nie powoduje strat finansowych zakładu.
b) Jaka wielkość dziennej produkcji zapewnia największy zysk? Jaki jest koszt produkcji, gdy zysk jest największy?

Ad a) Analiza:

Określamy wzór funkcji zysku:

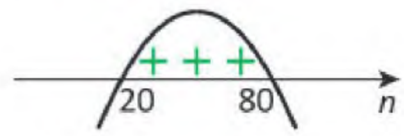
$z(n) = p(n) - k(n)$, więc

$z(n) = -n^2 + 100n - 1600$

Aby zakład nie ponosił strat finansowych, zysk musi być nieujemny.

Ułożenie i rozwiązanie nierówności:

$-n^2 + 100n - 1600 \geqslant 0$



$\Delta = 3600 \qquad \sqrt{\Delta} = 60$

$n_1 = 80$ i $n_2 = 20$

$(n \in \langle 20; 80\rangle \wedge n \in \boldsymbol{N}) \Leftrightarrow n \in \{20, 21, ..., 79, 80\}$.

Odpowiedź:

Aby zakład nie ponosił strat, powinien wyprodukować w ciągu dnia co najmniej 20 sztuk i co najwyżej 80 sztuk towaru.

Ad b) Aby obliczyć, jaka wielkość produkcji zapewnia największy zysk, wystarczy wyznaczyć argument, dla którego funkcja

$z(n) = -n^2 + 100n - 1600$

przyjmuje największą wartość w zbiorze

$Z = \{20, 21, ..., 80\}$.

Mamy:

$$n_w = \frac{-100}{-2} = 50$$

Liczba 50 jest elementem zbioru Z. Obliczmy koszt produkcji 50 sztuk towaru:

$k(50) = 50^2 + 50 \cdot 50 + 1600 = 6600$

Odpowiedź:

Największy zysk zapewnia dzienna produkcja 50 sztuk towaru. Wówczas koszt produkcji wynosi 6600 zł.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Suma kwadratów dwóch liczb różniących się o 5 jest równa 1313. Wyznacz te liczby.
2. Wyznacz trzy kolejne liczby nieparzyste, jeśli wiadomo, że różnica kwadratów największej i najmniejszej z nich jest o 345 mniejsza od kwadratu środkowej liczby.
3. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 8. Jeśli tę liczbę pomnożymy przez liczbę dwucyfrową o tych samych cyfrach, ale zapisanych w odwrotnej kolejności, to otrzymamy 1855. Wyznacz tę liczbę.

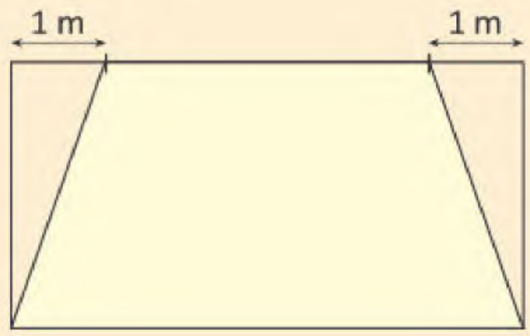
4. Wyznacz liczbę trzycyfrową, w której cyfra jedności jest o 2 większa od cyfry setek, cyfra dziesiątek jest o 3 mniejsza od cyfry jedności, zaś suma kwadratów wszystkich cyfr tej liczby jest równa 38.

5. Wyznacz wszystkie liczby całkowite mające tę własność, że różnica kwadratu tej liczby i liczby o 3 od niej większej jest mniejsza od 27.

6. Wyznacz wszystkie dwucyfrowe liczby naturalne o sumie cyfr równej 6, które spełniają warunek: iloczyn liczby i jej cyfry dziesiątek jest mniejszy od 120.

7. Ile metrów płotu potrzeba na ogrodzenie prostokątnej działki o polu 1104 m^2, jeśli jeden bok tej działki jest o 22 m dłuższy od drugiego?

8. Pani Helena chce na swojej działce wytyczyć prostokątną rabatę kwiatową o stosunku boków 2:1. Projekt rabaty przedstawiony jest na rysunku obok. W częściach trójkątnych chce posadzić goździki, zaś na pozostałej części róże. Jakie wymiary powinna mieć ta rabata, aby powierzchnia przeznaczona na róże była równa 10 m^2?



9. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego pole jest równe 30 cm^2.

10. Powierzchnia latawca w kształcie rombu jest równa 0,24 m^2. Jedna przekątna tego latawca jest o 0,2 m dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego latawca.

11. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną podzieliła ją na dwa odcinki, z których jeden ma długość 25 cm, a drugi jest o 6 cm krótszy od tej wysokości. Oblicz długość wysokości poprowadzonej na przeciwprostokątną.

12. Telewizor plazmowy kosztował 8000 zł. Po dwukrotnej obniżce ceny, o ten sam procent, jego cena wynosiła 7220 zł. Oblicz, o ile procent obniżano cenę telewizora za każdym razem.

13. Dwa lata temu pani Krystyna Kwiatkowska założyła dwuletnią lokatę o stałym oprocentowaniu, wpłacając do banku 15 000 zł. Kapitalizacja odsetek następowała po każdym roku oszczędzania. Jakie było roczne oprocentowanie tej lokaty, jeżeli pani Krystyna po dwóch latach oszczędzania ma na tej lokacie, wraz z odsetkami 15 606 zł.

D 14. Odcinek AB podzielono na dwie części w ten sposób, że stosunek krótszej części tego odcinka do dłuższej jest równy stosunkowi dłuższej części do długości całego odcinka. Wykaż, że stosunek podziału jest równy $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego

W tym temacie omówimy dwie kolejne metody rozwiązywania równań i nierówności pierwiastkowych.

Równania pierwiastkowe

Rozważmy równanie $\sqrt{x} = -x$, określone w zbiorze $\langle 0, +\infty)$.

Wprowadźmy oznaczenia: $L = \sqrt{x}$ oraz $P = -x$. Zauważ, że $L \geqslant 0$ oraz $P \leqslant 0$ dla dowolnej liczby x należącej do przedziału $\langle 0, +\infty)$. Zatem równość $L = P$ zachodzi tylko wtedy, gdy $\sqrt{x} = 0$ i jednocześnie $-x = 0$. To znaczy, że jedynym rozwiązaniem danego równania jest liczba 0.

Zastanowimy się, czy możemy rozwiązać to równanie, podnosząc jego strony do kwadratu. Porównajmy zbiory rozwiązań równań $L = P$ oraz $L^2 = P^2$.

$L = P$	$\sqrt{x} = -x$	Jedynym rozwiązaniem równania $L = P$ jest liczba 0.
$L^2 = P^2$	$x = x^2$	Równanie $L^2 = P^2$ ma dwa rozwiązania: 0 oraz 1.

Okazuje się, że liczba 1 jest rozwiązaniem równania $x = x^2$, ale nie jest rozwiązaniem równania $\sqrt{x} = -x$. Dzieje się tak dlatego, że rozwiązaniami równania $L^2 = P^2$ są nie tylko rozwiązania równania $L = P$, ale również rozwiązania równania $L = -P$. Powiemy, że liczba 1 jest rozwiązaniem obcym dla równania $\sqrt{x} = -x$.

Rozwiązania obce możemy wyeliminować na dwa sposoby, w zależności od metody, którą zastosujemy do rozwiązania danego równania.

<u>I. Metoda analizy starożytnych</u>

1. Zakładamy, że liczba x jest rozwiązaniem danego równania, a następnie przekształcamy to równanie w taki sposób, aby:
   - otrzymane równanie było łatwiejsze do rozwiązania
   - wszystkie rozwiązania danego równania były też rozwiązaniami równania końcowego.
2. Eliminujemy ewentualne rozwiązania obce – poprzez sprawdzenie, czy otrzymane rozwiązania spełniają początkowe równanie. **Sprawdzenie jest koniecznym etapem rozwiązywania** równania metodą analizy starożytnych.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{x-1} = 3 - x$ metodą analizy starożytnych.

1. Rozwiązujemy równanie, podnosząc obie jego strony do kwadratu:
   $x - 1 = (3 - x)^2$, stąd
   $x^2 - 7x + 10 = 0$
   $\Delta = 9$, $x = 2 \vee x = 5$
   Rozwiązaniami ostatniego równania są liczby: 2 oraz 5.
2. Sprawdzamy, czy obydwa rozwiązania spełniają równanie $\sqrt{x-1} = 3 - x$.
   - Jeśli $x = 2$, to $L = \sqrt{2-1} = 1$, $P = 3 - 2 = 1$, $L = P$
   - Jeśli $x = 5$, to $L = \sqrt{5-1} = 2$, $P = 3 - 5 = -2$, $L \neq P$

   Liczba 5 jest rozwiązaniem obcym.

Rozwiązaniem równania $\sqrt{x-1} = 3 - x$ jest tylko liczba 2.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równanie $\sqrt{x+3} = 2x$ metodą analizy starożytnych.

II. Metoda równań równoważnych

Dane równanie przekształcamy w taki sposób, aby każde kolejno otrzymane równanie miało taki sam zbiór rozwiązań, jak równanie bezpośrednio je poprzedzające. Ponadto stosujemy następujące własności:

1. Jeżeli strony równania $L = P$ mają identyczne znaki (obie strony są nieujemne lub obie strony są ujemne) w pewnym podzbiorze dziedziny tego równania, to w tym zbiorze równanie $L = P$ ma taki sam zbiór rozwiązań jak równanie $L^2 = P^2$.
2. Jeżeli strony równania $L = P$ danego równania mają znaki przeciwne w pewnym podzbiorze dziedziny tego równania, to w tym zbiorze równanie $L = P$ jest sprzeczne.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{x-1} = 3 - x$ metodą równań równoważnych.

Dziedziną danego równania jest przedział $\langle 1, +\infty)$.
Zauważmy, że lewa strona równania jest dodatnia lub równa 0 dla dowolnej liczby x, gdzie $x \in \langle 1, +\infty)$. Prawa strona równania przyjmuje wartości dodatnie lub równe 0 tylko wtedy, gdy $x \leqslant 3$.
Zatem rozwiązań równania należy szukać w przedziale $\langle 1, 3\rangle$.
Obie strony równania $\sqrt{x-1} = 3 - x$ podnosimy do kwadratu i otrzymujemy równanie równoważne danemu w przedziale $\langle 1, 3\rangle$. Mamy:

$x - 1 = (3 - x)^2$, gdzie $x \in \langle 1, 3\rangle$
$x - 1 = 9 - 6x + x^2$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x = 2 \ \vee \ x = 5$

Otrzymujemy:

$[(x = 2 \ \vee \ x = 5) \wedge x \in \langle 1, 3\rangle] \Leftrightarrow x = 2$

Równanie $\sqrt{x-1} = 3 - x$ ma jedno rozwiązanie, równe 2.

Nierówności pierwiastkowe

Nierówności pierwiastkowe, podobnie jak inne nierówności, rozwiązujemy metodą nierówności równoważnych.

Ćwiczenie 2. Zastanów się, czy nierówności $x > -1$ oraz $x^2 > (-1)^2$ są równoważne.

Przyjrzyjmy się relacjom zachodzącym między liczbami rzeczywistymi.

1) Jeżeli liczby rzeczywiste a i b są nieujemne, to $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.
   Na przykład: $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 \leqslant 3$
   $$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{9} \leqslant \frac{1}{4}$$
2) Jeżeli liczby rzeczywiste a i b są ujemne, to $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2$.
   Na przykład: $-5 \leqslant -3 \Leftrightarrow 25 \geqslant 9$
   $$\frac{-1}{2} \leqslant \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{9}$$
3) Jeżeli liczby rzeczywiste a i b mają przeciwne znaki i dodatkowo:
   - jeśli $a < b$, to nierówność $a \leqslant b$ jest prawdziwa
   - jeśli $a > b$, to nierówność $a \leqslant b$ jest fałszywa.

Rozwiązując nierówności pierwiastkowe, stosujemy powyższe własności.

Obie strony nierówności możemy podnieść do kwadratu tylko wtedy, gdy obie są nieujemne albo gdy obie są ujemne. Wówczas:
- jeżeli obie strony nierówności są nieujemne, to po podniesieniu ich do kwadratu znak nierówności pozostawiamy bez zmiany;
- jeżeli obie strony nierówności są ujemne, to po podniesieniu ich do kwadratu znak nierówności zmieniamy na przeciwny.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$.

Wyznaczamy dziedzinę nierówności:

$(x + 2)(x - 5) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty)$

Zatem

$$D = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty)$$

Zauważmy, że dla każdego $x \in D$ lewa strona nierówności jest nieujemna; prawa zaś przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak ujemne. Rozważamy dwa przypadki.

I przypadek

$$\begin{cases} 8 - x \geqslant 0 \\ x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 8 \\ x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle$$

Jeśli $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle$, to obie strony nierówności są nieujemne i po podniesieniu stron nierówności do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną danej. Mamy:

$$\begin{cases} x \in (-\infty -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle \\ (x+2)(x-5) < (8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle \\ x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle \\ 13x < 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle \\ x < 5\frac{9}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\rangle \cup \left\langle 5, 5\frac{9}{13}\right).$$

II przypadek

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \\ 8 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (8, +\infty).$$

Jeśli $x \in (8, +\infty)$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, zaś prawa strona nierówności jest ujemna, więc nierówność jest sprzeczna (liczba nieujemna nie może być mniejsza od ujemnej).

Zatem, jeśli $x \in (8, +\infty)$, to nierówność jest sprzeczna.

Ostatecznie zbiorem rozwiązań nierówności $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$ jest zbiór

$$(-\infty, -2\rangle \cup \left\langle 5, 5\frac{9}{13}\right).$$

Przykład 4.

Rozwiążemy nierówność $\sqrt{x+3} \geqslant 9 - x$.

Dziedziną nierówności jest przedział $\langle -3, +\infty)$. Rozważymy dwa przypadki ze względu na znak wyrażenia $9 - x$: $9 - x \geqslant 0$ oraz $9 - x < 0$

I przypadek

$$\begin{cases} x \in \langle -3, 9 \rangle \\ \sqrt{x+3} \geqslant 9 - x \end{cases}$$

Obie strony nierówności są nieujemne, więc po podniesieniu ich do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną danej. Mamy:

II przypadek

$$\begin{cases} x \in (9, +\infty) \\ \sqrt{x+3} \geqslant 9 - x \end{cases}$$

Prawa strona nierówności jest ujemna, lewa strona jest nieujemna.
Nierówność jest tożsamościowa w zbiorze $(9, +\infty)$.

$$\begin{cases} x \in \langle -3, 9 \rangle \\ x+3 \geqslant 81 - 18x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \langle -3, 9 \rangle \\ x \in \langle 6, 13 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle 6, 9 \rangle$$

Sumujemy zbiory rozwiązań otrzymane w obu przypadkach:

$$\langle 6, 9 \rangle \cup (9, +\infty) = \langle 6, +\infty)$$

Ostatecznie zbiorem rozwiązań nierówności $\sqrt{x+3} \geqslant 9 - x$ jest przedział $\langle 6, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż równanie, stosując metodę analizy starożytnych:
   a) $\sqrt{x-2} = 8 - x$ b) $\sqrt{3x - \sqrt{x+2}} = 2$
   c) $\sqrt{2 - x + \sqrt{x+63}} = 3$ d) $\sqrt{2x+3} - 6 + x = 0$.
2. Rozwiąż równanie, stosując metodę równań równoważnych:
   a) $x = \sqrt{2-x}$ b) $\sqrt{x^2-9} = x+1$
   c) $\sqrt{x+3} + x = 9$ d) $\sqrt{-x^2+5x-6} + 2 = x$.
3. Rozwiąż równanie:
   a) $2 - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-5}$ b) $\sqrt{x+5} - \sqrt{-x} = 1$
   c) $\sqrt{10-x} - \sqrt{x+3} = 1$ d) $\sqrt{x+2} - 2 = \sqrt{8-x}$.
4. Rozwiąż nierówność:
   a) $x+1 > \sqrt{x+3}$ b) $\sqrt{x-2} + x \geqslant 8$
   c) $\sqrt{2x-2} + 10 \leqslant 4x$ d) $\sqrt{4-x} < 13 + 2x$.
5. Rozwiąż nierówność:
   a) $\sqrt{4-x^2} \geqslant 2x+2$ b) $\sqrt{x^2+3x} < x+1$
   c) $\sqrt{x^2+x+3} + x \leqslant 4$ e) $\sqrt{2x^2+3x-5} \geqslant x+1$.

Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną

Ćwiczenie 1. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 6$, naszkicuj wykresy następujących funkcji: a) $y = |x^2 - 5x + 6|$ b) $y = x^2 - 5|x| + 6$.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = |x + 3|(1 - x)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Na podstawie definicji wartości bezwzględnej wzór funkcji f można zapisać następująco:

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)(1-x), \text{ jeśli } x+3 \geqslant 0 \\ -(x+3)(1-x), \text{ jeśli } x+3 < 0 \end{cases} \quad \text{stąd}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)(1-x), \text{ jeśli } x \in \langle -3, +\infty) \\ (x+3)(x-1), \text{ jeśli } x \in (-\infty, -3) \end{cases}$$

Wykres funkcji f jest sumą wykresów funkcji:

$f_1(x) = (x + 3)(1 - x)$, gdzie $x \in \langle -3, +\infty)$ oraz

$f_2(x) = (x + 3)(x - 1)$, gdzie $x \in (-\infty, -3)$.

Rozpatrzmy najpierw funkcje f_1 i f_2 w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Wówczas miejsca zerowe obu funkcji są równe: -3, 1.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołków parabol, będących wykresami tych funkcji:

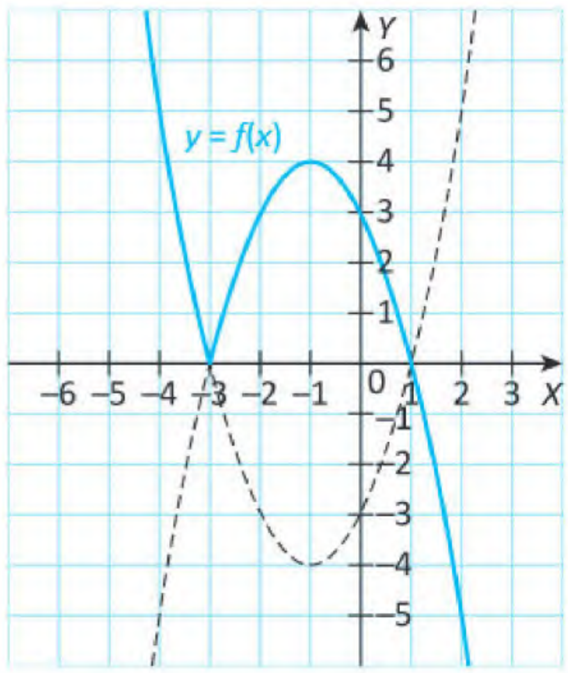
$$p = \frac{-3+1}{2} = -1$$

Wyznaczamy drugą współrzędną:

$f_1(-1) = (-1 + 3)(1 - (-1)) = 2 \cdot 2 = 4$, $\quad W_1(-1, 4)$

$f_2(-1) = (-1 + 3)(-1 - 1) = 2 \cdot (-2) = -4$, $\quad W_2(-1, -4)$

Szkicujemy dwie parabole, następnie uwzględniamy przedziały, w których określone są funkcje f_1 i f_2 – jak na rysunku obok.



Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = |2x - x^2| - x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci:

$f(x) = |x(2 - x)| - x^2$.

Aby opuścić znak wartości bezwzględnej, ustalamy najpierw znak wyrażenia $x(2 - x)$.

$x(2 - x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0, 2\rangle$ oraz $x(2 - x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Wówczas:

$$f(x)=\begin{cases}2x-x^2-x^2, \text{ jeśli } x\in\langle 0,2\rangle\\ -2x+x^2-x^2, \text{ jeśli } x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)\end{cases} \quad \text{stąd}$$

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+2x, \text{ jeśli } x\in\langle 0,2\rangle\\ -2x, \text{ jeśli } x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)\end{cases}$$

Wykres funkcji f jest sumą wykresów funkcji:

$f_1(x)=-2x^2+2x$, gdzie $x\in\langle 0, 2\rangle$ oraz

$f_2(x)=-2x$, gdzie $x\in(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$

Wzór funkcji f_1 możemy sprowadzić do postaci kanonicznej:

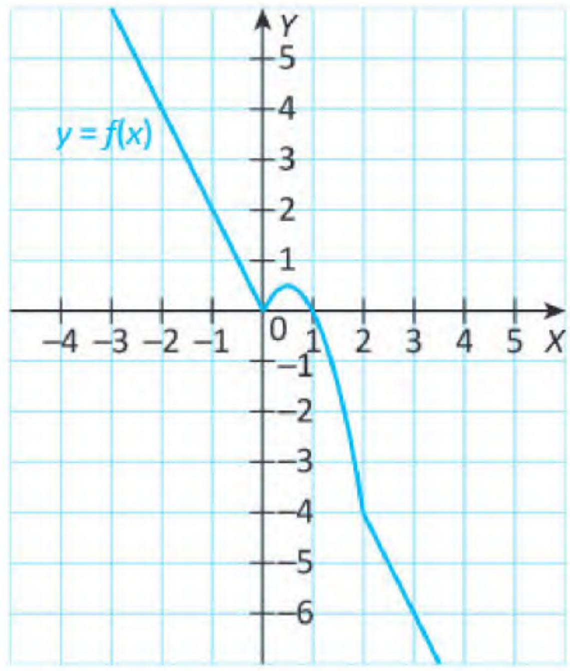
$$f_1(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \qquad \text{stąd}$$

$$W\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Ponieważ funkcja f_1 jest określona w przedziale $\langle 0, 2\rangle$, więc obliczamy również wartości tej funkcji na końcach przedziału:

$f_1(0)=0$ oraz $f_1(2)=-4$.

Wykres funkcji $f(x)=|2x-x^2|-x^2$, $x\in \boldsymbol{R}$, jest przedstawiony na rysunku obok.



Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x)=3-|x^2-|x|-2|$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$.

Z własności wartości bezwzględnej wiemy, że $x^2=|x|^2$, zatem

$f(x)=3-||x|^2-|x|-2|$

Teraz skorzystamy z przekształceń wykresów funkcji.

$f_1(x)=x^2-x-2$ — $f_1(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{4}$, miejsca zerowe: –1, 2; *OY*: (0, –2)

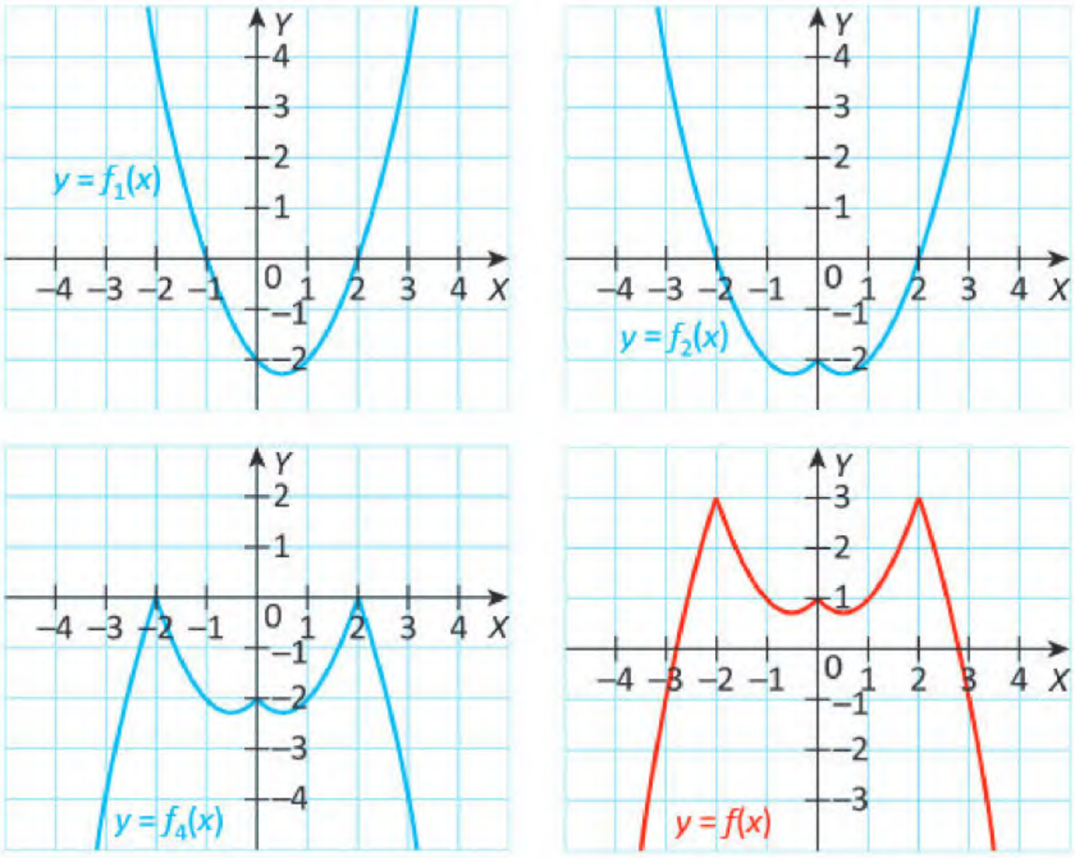
$f_2(x)=|x|^2-|x|-2$ — $f_2(x)=f_1(|x|)$

$f_3(x)=|x^2-|x|-2|$ — $f_3(x)=|f_2(x)|$

$f_4(x)=-|x^2-|x|-2|$ — symetria wykresu funkcji f_3 względem osi *OX*

$f(x)=3-|x^2-|x|-2|$ — przesunięcie wykresu funkcji f_4 o wektor [0, 3]

Wykres funkcji f_1 oraz wykresy pozostałych funkcji przedstawiają rysunki poniżej.



Sprawdź, czy rozumiesz. Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Naszkicuj wykres funkcji f:
   a) $f(x) = x|x-1|$
   b) $f(x) = |x+3|x-2x$
   c) $f(x) = 4 + |x|(x-2)$
   d) $f(x) = 4|x+1| - x|x+1|$.

2. Naszkicuj wykres funkcji
   a) $y = x^2 - |x^2 - 4|$
   b) $y = 2x - |x^2 + 2x|$
   c) $y = x^2 + x - |1 - x^2|$
   d) $y = |x(x+3)| - x - 3$.

3. Naszkicuj wykres funkcji f:
   a) $f(x) = |x^2 - 2x - 3| - 2$
   b) $f(x) = -2|1 - |x^2 - 1||$
   c) $f(x) = |x^2 - (4|x| + 5)|$
   d) $f(x) = ||x^2 - 2x| - 3| - 1$.

4. Naszkicuj wykres funkcji:
   a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - |x^2 - 9|$
   b) $f(x) = |x^2 - 4| + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

5. Funkcja f jest określona wzorem: $f(x) = |x^2 - 2|x| - 8| - 5$, $x \in \mathbf{R}$.
   a) Naszkicuj wykres funkcji f.
   b) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.
   c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne?

6. Funkcja f jest określona wzorem: $f(x) = |x^2 - 4| + |x^2 - 2|$, $x \in \mathbf{R}$.
   a) Naszkicuj wykres funkcji f.
   b) Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f.
   c) Podaj wszystkie miejsca zerowe funkcji g, gdzie $g(x) = f(x-2) - 2$.

Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $|3x^2+8x+1| = 3x^2+8x+1$.

Wiemy, że

$$|w| = w \Leftrightarrow w \geqslant 0$$

Zatem, aby rozwiązać równanie

$$|3x^2+8x+1| = 3x^2+8x+1,$$

wystarczy wyznaczyć zbiór tych wszystkich liczb, dla których wyrażenie $3x^2+8x+1$ jest nieujemne. Mamy:

$$3x^2+8x+1 \geqslant 0$$

$$\Delta = 52,\ \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$$

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{13}}{3},\ x_2 = \frac{-4+\sqrt{13}}{3}$$

Parabola będąca wykresem funkcji $y = 3x^2+8x+1$ zwrócona jest ramionami w górę, więc $3x^2+8x+1 \geqslant 0$ wtedy, gdy

$$x \in \left(-\infty, \frac{-4-\sqrt{13}}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-4+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$$

Równanie $|3x^2+8x+1| = 3x^2+8x+1$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste należące do zbioru

$$\left(-\infty, \frac{-4-\sqrt{13}}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-4+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right).$$

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówność $|3x^2+2x| \leqslant 1$.

Korzystamy z własności wartości bezwzględnej:

Jeśli $a > 0$, to $|w| \leqslant a \Leftrightarrow (w \leqslant a \wedge w \geqslant -a)$

$$\text{zatem } |3x^2+2x| \leqslant 1 \Leftrightarrow (3x^2+2x \leqslant 1 \wedge 3x^2+2x \geqslant -1)$$

$$3x^2+2x \leqslant 1 \quad \wedge \quad 3x^2+2x \geqslant -1$$

$$3x^2+2x-1 \leqslant 0 \quad \wedge \quad 3x^2+2x+1 \geqslant 0$$

$$x \in \left\langle -1, \frac{1}{3}\right\rangle \quad \wedge \quad x \in \mathbf{R}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $|3x^2+2x| \leqslant 1$ jest część wspólna obu wyznaczonych zbiorów, czyli przedział $\left\langle -1, \frac{1}{3}\right\rangle$.

Ćwiczenie 1. Korzystając z odpowiedniej własności wartości bezwzględnej, rozwiąż:
a) równanie $|x^2+x-1|=1$ b) nierówność $|x^2-1| \geqslant 8$.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $|x^2+2x-3|=|x-1|$.

Skorzystamy z własności wartości bezwzględnej:
$$|a|=|b| \Leftrightarrow (a=b \vee a=-b)$$
Zatem:
$$|x^2+2x-3|=|x-1| \Leftrightarrow [x^2+2x-3=x-1 \ \vee \ x^2+2x-3=-x+1] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [x^2+x-2=0 \ \vee \ x^2+3x-4=0] \Leftrightarrow [(x+2)(x-1)=0 \ \vee \ (x+4)(x-1)=0] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [x \in \{-2, 1\} \vee x \in \{-4, 1\}] \Leftrightarrow x \in \{-4, -2, 1\}$$
Rozwiązaniami równania $|x^2+2x-3|=|x-1|$ są liczby: -4, -2 oraz 1.

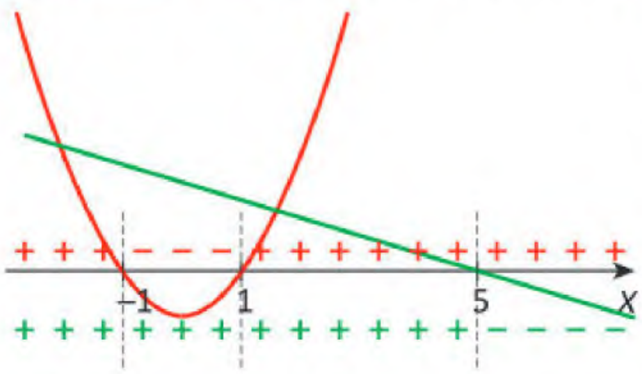
Ćwiczenie 2. Rozwiąż równanie z przykładu 3. graficznie.

Ćwiczenie 3. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x)=|x^2-1|$ oraz $g(x)=|5-x|+6$. Następnie odczytaj argumenty, dla których funkcje f i g przyjmują tę samą wartość.

Przykład 4.

Rozwiążemy algebraicznie równanie $|x^2-1|-|5-x|-6=0$.

W tym przypadku skorzystamy z definicji wartości bezwzględnej. Aby określić znak wyrażenia x^2-1 oraz $5-x$, posłużymy się szkicami wykresów: funkcji kwadratowej $\boldsymbol{f_1(x)=x^2-1}$ oraz funkcji liniowej $\boldsymbol{f_2(x)=5-x}$.



Wykorzystując pomocniczy szkic wykresu łatwo ustalić, że:
$(x^2-1 \geqslant 0 \wedge 5-x \geqslant 0) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, 5\rangle$
$(x^2-1<0 \wedge 5-x>0) \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$
$(x^2-1>0 \wedge 5-x<0) \Leftrightarrow x \in (5, +\infty)$.
Zauważ, że nie zachodzi przypadek $x^2-1<0 \wedge 5-x<0$.

Teraz wystarczy rozważyć trzy przypadki:
1) jeśli $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, 5\rangle$, to $|x^2-1|=x^2-1$ oraz $|5-x|=5-x$;
2) jeśli $x \in (-1, 1)$, to $|x^2-1|=-x^2+1$ oraz $|5-x|=5-x$;
3) jeśli $x \in (5, +\infty)$, to $|x^2-1|=x^2-1$ oraz $|5-x|=-5+x$.

1) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, 5\rangle$

$x^2 - 1 - (5 - x) - 6 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = 49$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 3$

Równanie ma dwa rozwiązania w zbiorze $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, 5\rangle$.

2) $x \in (-1, 1)$

$-x^2 + 1 - (5 - x) - 6 = 0$

$-x^2 + x - 10 = 0$

$\Delta = 1 - 40 = -39, \quad -39 < 0$

Równanie nie ma rozwiązań w przedziale $(-1, 1)$.

3) $x \in (5, +\infty)$

$x^2 - 1 - (-5 + x) - 6 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 9$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$

Liczby -1 oraz 2 nie należą do przedziału $(5, +\infty)$, więc nie są rozwiązaniami równania.

Równanie ma dwa rozwiązania: -4 oraz 3.

Ćwiczenie 4. Rozwiąż równanie $|x^2 - x| + |x - 1| = 0$, korzystając z tego, że lewa strona równania to suma dwóch wyrażeń nieujemnych.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność $\frac{1}{2}(x-3)^2 \geqslant 4\frac{1}{2} - |x - 6|$.

Nierówność przekształcamy równoważnie w następujący sposób:

$$\frac{1}{2}(x-3)^2 \geqslant 4\frac{1}{2} - |x-6|$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} + |x-6| \geqslant 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + |x-6| \geqslant 0$$

Teraz rozważymy dwa przypadki ze względu na znak wyrażenia $x - 6$.

$$\begin{cases} x < 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x - (x-6) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + x - 6 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \geqslant 0 \end{cases}$$

I. Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \geqslant 0$$

$\Delta = 4, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6$

$x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$

II. Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \geqslant 0$$

$\Delta = 16, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 6$

$x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} x < 6 \\ x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty) \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 6 \\ x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 6, +\infty) \end{cases}$$

zatem
$x \in (-\infty, 2\rangle \ \vee \ x \in \langle 6, +\infty)$, czyli $x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{2}(x-3)^2 \geqslant 4\frac{1}{2} - |x-6|$ jest $(-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$.

Ćwiczenie 5. Rozwiąż nierówność z przykładu 5. graficznie.

Przykład 6.

Rozwiążemy nierówność $(4x-1)^2 - 2|4x-1| - 3 \geqslant 0$.

Nierówność możemy zapisać w postaci:

$|4x-1|^2 - 2|4x-1| - 3 \geqslant 0$.

Rozwiążemy tę nierówność, wprowadzając zmienną pomocniczą t, gdzie

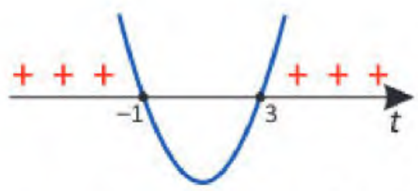
$t = |4x-1|$

Wówczas:

$t^2 - 2t - 3 \geqslant 0$

$\Delta = 16$

$t_1 = -1, \qquad t_2 = 3$



$t \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

Mamy:

$t^2 - 2t - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow (t \leqslant -1 \ \vee \ t \geqslant 3)$

Wracamy do niewiadomej x:

$|4x-1| \leqslant -1 \quad \vee \quad |4x-1| \geqslant 3$

Nierówność $|4x-1| \leqslant -1$ jest sprzeczna.

Nierówność $|4x-1| \geqslant 3$ rozwiążemy, korzystając z własności wartości bezwzględnej:

jeśli $a > 0$, to $|w| \geqslant a \Leftrightarrow (w \leqslant -a \vee w \geqslant a)$

Otrzymujemy:

$$|4x-1| \geqslant 3 \Leftrightarrow (4x-1 \leqslant -3 \vee 4x-1 \geqslant 3) \Leftrightarrow (4x \leqslant -2 \vee 4x \geqslant 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \leqslant -\frac{1}{2} \vee x \geqslant 1\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$$

Ostatecznie $\left[|4x-1| \leqslant -1 \vee |4x-1| \geqslant 3\right] \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz zbiór rozwiązań równania:
   a) $(|x|-5)(|x|+5) = 24$ b) $x^2 + 16 = 8|x|$
   c) $|2x^2 - 3x + 1| = -2x^2 + 3x - 1$ d) $(2|x|-3)(2|x|+3) = |4x^2 - 9|$
   e) $|x^2 + 5x + 4| = |x + 4|$ f) $|x - 3| = |x^2 - 4x + 3|$.
2. Rozwiąż algebraicznie równanie:
   a) $|x| \cdot x + 2x|x| = 3$ b) $|2x+1| \cdot \sqrt{4x^2+4x+1} = 9$
   c) $(x+7)^2 - \sqrt{x^2+14x+49} = 6$ d) $x^2 + 4x + 4 = 7|x+2|$.
3. Rozwiąż algebraicznie równanie:
   a) $|(x-1)^2 - 1| = 9x$ b) $|x^2 + 3x| = 2x$
   c) $|4x - x^2| + 5x = 0$ d) $|x^2 + 6x + 8| + 1 = (x+3)^2$.
4. Rozwiąż równanie:
   a) $|x^2 - 1| + |-2x^2 + x + 3| = 0$ b) $|x^2 - 4x| + 3 = x^2 + |x - 5|$
   c) $|4x - x^2| + 3 = 2 - |x^2 - 1|$ d) $|x^2 - x| + 1 = |x + 1| - x^2$.
5. Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówność:
   a) $|1 - x^2| \leqslant x + 1$ b) $|x^2 - x - 2| > 4$
   c) $x^2 - 3|x| + 2 < 2 - x$ d) $|x^2 - 4| > |x - 2|$.
6. Rozwiąż algebraicznie nierówność:
   a) $|x + 1| \geqslant x^2 - 2x + 1$ b) $x^2 + 2|x - 1| > 3 - 2x$
   c) $|2x - 5| + x^2 < 1$ d) $|x - 3|(x - 1) \leqslant 4$
   e) $|x^2 - 3x| > 4$ f) $x|x + 1| \geqslant 2x$.
7. Rozwiąż algebraicznie nierówność:
   a) $3|x| > x^2 - x$ b) $|x^2 - 1| \geqslant 1 - x^2$
   c) $|x^2 - 2x| < x^2 + x + 3$ d) $|x^2 - 4| - 2x \leqslant 4$.

Wzory Viéte'a

Rozważmy funkcję kwadratową $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, o której wiadomo, że $\Delta > 0$. Obliczymy sumę i iloczyn jej miejsc zerowych. Otrzymujemy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Na tej podstawie możemy sformułować twierdzenie zwane twierdzeniem Viéte'a.

Twierdzenie 1.

Jeśli x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, to zachodzą związki:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Jeśli x_0 jest jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, to:

$$2x_0 = \frac{-b}{a}$$

$$x_0^2 = \frac{c}{a}.$$

Powyższe wzory noszą nazwę wzorów Viéte'a.

Przykłady poniżej ilustrują zastosowanie wzorów Viéte'a.

A) Ustalanie znaków miejsc zerowych funkcji kwadratowej

Przykład 1.

Określimy znaki miejsc zerowych funkcji kwadratowych

a) $y = -\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}$ b) $y = 2x^2 + 5x - 4$.

Ad a)

$$y = -\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}$$
$$\Delta = 32 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 8, \qquad \Delta > 0$$

Funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 3, \qquad x_1 \cdot x_2 > 0$$

Miejsca zerowe mają taki sam znak. To znaczy, oba są dodatnie albo oba są ujemne.

$$x_1 + x_2 = \frac{-\left(-4\sqrt{2}\right)}{-\sqrt{2}} = -4, \qquad x_1 + x_2 < 0$$

Obydwa miejsca zerowe nie mogą być jednocześnie dodatnie.

Miejsca zerowe funkcji $y = -\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}$ są liczbami ujemnymi.

Ad b)

$$y = 2x^2 + 5x - 4$$
$$\Delta = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 57, \qquad \Delta > 0$$

Funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2} = -2, \qquad x_1 \cdot x_2 < 0$$

Miejsca zerowe mają różne znaki. To znaczy, jedno jest dodatnie, a drugie jest ujemne.

Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 + 5x - 4$ ma dwa miejsca zerowe. Jedno jest dodatnie, a drugie – ujemne.

Ćwiczenie 1. Określ znaki miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = -3x^2 + 11x - 7$.

B) Ustalanie znaków współczynników we wzorze funkcji kwadratowej na podstawie informacji o znakach miejsc zerowych

Przykład 2.

Określimy znaki współczynników we wzorze funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, wiedząc, że funkcja f ma dwa dodatnie miejsca zerowe, a jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.

Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, stąd $\Delta > 0$.
Wiemy, że $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$. Mamy:

$$(x_1 > 0 \wedge x_2 > 0) \Leftrightarrow (x_1 + x_2 > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 > 0)$$

Korzystamy ze wzorów Viéte'a:

$$\left(\frac{-b}{a} > 0 \quad \wedge \quad \frac{c}{a} > 0\right) \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{b}{a} < 0 \quad \wedge \quad \frac{c}{a} > 0\right).$$

Wykres funkcji f ma z osią OY punkt wspólny $(0, -3)$, stąd

$f(0) = -3, \quad c = -3.$

Określamy znaki współczynników a, b:

$$\left(c<0 \ \wedge \ \frac{c}{a}>0\right) \Rightarrow a<0 \quad \text{oraz} \quad \left(a<0 \ \wedge \ \frac{b}{a}<0\right) \Rightarrow b>0$$

Znaki współczynników we wzorze funkcji f są następujące: $a<0$, $b>0$, $c<0$.

Ćwiczenie 2. Określ znaki współczynników we wzorze funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, wiedząc, że funkcja f ma dwa ujemne miejsca zerowe oraz $f(0) > 0$.

C) Obliczanie wartości wyrażeń, w których występują miejsca zerowe funkcji kwadratowej, bez obliczania miejsc zerowych

Przykład 3.

Wiedząc, że x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$ $(\Delta > 0)$, obliczymy wartości wyrażeń: a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $|x_1 - x_2|$.

Wyrażenia, których wartości mamy obliczyć, przekształcimy tak, aby skorzystać ze wzorów Viéte'a. W tym przypadku: $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$ i $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Ad a) Zauważ, że $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Stąd

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$

Wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$ jest równa 10.

Ad b) Z własności wartości bezwzględnej wiemy, że $\sqrt{x^2} = |x|$. Zatem:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2} = \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2}$$

Stąd $|x_1 - x_2| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 1} = \sqrt{12 - 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Wartość wyrażenia $|x_1 - x_2|$ jest równa $2\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 3. Funkcja kwadratowa $y = -2x^2 + 5x + 1$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2. Oblicz wartość wyrażenia: $x_1^2 + x_2^2$.

D) Ustalanie wartości współczynników we wzorze funkcji na podstawie wartości wyrażeń, zawierających miejsca zerowe funkcji

Przykład 4.

Wyznaczymy współczynniki b oraz c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, jeśli wiadomo, że jej miejsca zerowe x_1, x_2 spełniają warunek:

$$x_1 + x_2 = 5 \quad \text{i} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2{,}5, \text{ gdzie } x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0.$$

Najpierw przekształcimy wyrażenie $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ tak, aby otrzymać sumę i iloczyn miejsc zerowych funkcji f. Mamy:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1x_2} + \frac{x_1}{x_1x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 2{,}5 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$$

Ze wzorów Viéte'a wiemy, że $x_1 + x_2 = -b$ i $x_1 \cdot x_2 = c$, więc $b = -5$ oraz $c = 2$.

E) Obliczanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej bez stosowania wzorów na miejsca zerowe

Przykład 5.

Obliczymy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - px - 15$, jeśli wiadomo, że są one liczbami całkowitymi, a parametr p jest liczbą pierwszą.

Zauważymy najpierw, że $\Delta = p^2 + 60$. Zatem $\Delta > 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej p, funkcja f ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2. Ze wzorów Viéte'a mamy:

$$x_1 + x_2 = p \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = -15.$$

Z założenia wiemy, że liczby x_1 i x_2 są całkowite. Wobec tego na podstawie równości $x_1 \cdot x_2 = -15$ możemy wnioskować, że istnieją tylko cztery pary liczb spełniające ten warunek:

-1 i 15 lub 1 i -15, lub -3 i 5, lub 3 i -5.

Ale $x_1 + x_2 = p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, więc tylko para -3 i 5 spełnia warunek (sprawdź!).

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe -3 oraz 5. Parametr p jest równy 2.

Znajomość wzorów Viéte'a ułatwia rozwiązywanie wielu zadań. Do wzorów tych wrócimy w kolejnych tematach.

Sprawdź, czy rozumiesz. Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe. Ustal znaki tych miejsc zerowych, bez ich obliczania.
   a) $y = 3x^2 + 3x - 6$ b) $y = -2x^2 - 14x - 24$ c) $y = -0{,}5x^2 + \sqrt{10}x - 4$
   d) $y = x^2 - 2\sqrt{3}x - 8$ e) $y = (\sqrt{3} - 1)x^2 - \sqrt{7}$ f) $y = (3 - \pi)x^2 - \sqrt{5}x - 6$
2. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe: x_1, x_2. Wyznacz brakujące współczynniki we wzorze funkcji f, jeśli:
   a) $f(x) = x^2 + bx + c$, $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = -15$
   b) $f(x) = 2x^2 + bx + c$, $x_1 \cdot x_2 = 10$, $x_1 + x_2 = -7$
   c) $f(x) = ax^2 + 3x + c$, $x_1 \cdot x_2 = -4$, $x_1 + x_2 = 3$
   d) $f(x) = ax^2 + bx - 8$, $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 \cdot x_2 = -16$.
3. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2. Określ znaki współczynników we wzorze funkcji f, wiedząc, że:
   a) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ oraz $f(0) = -5$ b) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ oraz $f(0) = 7$
   c) $x_1 = x_2$, $x_1 > 0$ oraz $f(0) = -1$ d) $x_1 = x_2$, $x_2 < 0$ oraz $f(0) = 10$.
4. **D** Wykaż, że funkcja $y = \sqrt{2}x^2 + 8x - 4\sqrt{2}$ ma dwa miejsca zerowe. Następnie bez obliczania tych miejsc zerowych oblicz sumę ich odwrotności.
5. **D** Wykaż, że funkcja $y = \sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{2}x + \sqrt{3}$ ma dwa miejsca zerowe. Następnie, bez obliczania tych miejsc zerowych, oblicz sumę kwadratów ich odwrotności.
6. Funkcja $y = -2\sqrt{5}x^2 + \sqrt{10}x + 3\sqrt{5}$ ma dwa miejsca zerowe. Oblicz kwadrat różnicy tych miejsc zerowych.
7. Liczby x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji $y = 2\sqrt{6}x^2 - 4\sqrt{3}x - 8\sqrt{6}$. Oblicz wartość wyrażenia $x_1(x_1x_2 + 8) + x_2(x_1x_2 + 8)$.
8. **D** Liczby x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -4x^2 - 8x + 2$. Wykaż, że wartość wyrażenia $x_1^4 + x_2^4$ jest równa 24,5.
9. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 - (3p + q)x + (6p - 1{,}5q)$ są liczby: $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$. Wyznacz p i q.
10. Ułóż równanie kwadratowe, którego rozwiązaniami są liczby x_1, x_2 spełniające warunki:
    a) $x_1 + x_2 = 4$ oraz $(x_1 - x_2)^2 = 20$ b) $x_1 + x_2 = 7$ oraz $x_1^2 + x_2^2 = 11$
    c) $x_1 + x_2 = -3$ oraz $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 21$ d) $x_1 + x_2 = -4$ oraz $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 5$.

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

Ćwiczenie 1. Dane jest równanie z niewiadomą x i parametrem m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

$(m^2-1)x^2+(m-1)x=0.$

Rozwiąż je w przypadku: a) $m=1$ b) $m=-1$ c) $m=0$.

Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych z parametrem omówimy na przykładach.

Przykład 1.

Określimy liczbę rozwiązań równania $(m-1)x^2+\sqrt{2}x+\frac{m}{4}=0$ ze względu na wartość parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

Współczynnik przy x^2 jest równy $m-1$. To znaczy, że jeśli $m=1$, to przyjmuje on wartość 0 i wówczas dane równanie jest liniowe. Jeśli $m \neq 1$, to równanie jest kwadratowe. Z tego względu rozpatrujemy dwa przypadki.

1. przypadek: $m=1$.
Wówczas równanie przyjmuje postać:

$\sqrt{2}x+\frac{1}{4}=0$, stąd — Jest to równanie liniowe.

$x=\frac{-\sqrt{2}}{8}$ — Równanie ma jedno rozwiązanie, równe $\frac{-\sqrt{2}}{8}$.

2. przypadek: $m \neq 1$.

$(m-1)x^2+\sqrt{2}x+\frac{m}{4}=0$ — Jest to równanie kwadratowe.

$\Delta=2-4(m-1)\cdot\frac{m}{4}=-m^2+m+2$ — Liczba rozwiązań równania kwadratowego zależy od znaku wyróżnika.

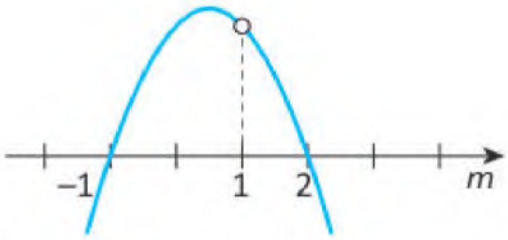
Aby określić znak wyróżnika dla poszczególnych wartości parametru m, $m \neq 1$, naszkicujemy przybliżony wykres funkcji zmiennej m, określonej wzorem:

$y=-m^2+m+2$, gdzie $m \neq 1$.

$\Delta_m=1+4\cdot1\cdot2=9,\ \sqrt{\Delta_m}=3$

$m_1=\frac{-1-3}{-2}=2 \qquad m_2=\frac{-1+3}{-2}=-1$

Miejscami zerowymi funkcji $y=-m^2+m+2$, gdzie $m \neq 1$, są liczby: -1, 2. Współczynnik przy m^2 jest równy -1, parabola będąca wykresem tej funkcji ma ramiona skierowane w dół.



$\Delta = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}$
$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-1, 1) \cup (1, 2)$
$\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Równanie kwadratowe $(m-1)x^2 + \sqrt{2}x + \frac{m}{4} = 0$:

- ma jedno rozwiązanie wtedy, gdy $\Delta = 0$, czyli wtedy, gdy $m \in \{-1, 2\}$,
- ma dwa rozwiązania wtedy, gdy $\Delta > 0$, czyli wtedy, gdy $m \in (-1, 1) \cup (1, 2)$,
- nie ma rozwiązań wtedy, gdy $\Delta < 0$, czyli wtedy, gdy $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Uwzględniając dwa przypadki, otrzymujemy, że równanie $(m-1)x^2 + \sqrt{2}x + \frac{m}{4} = 0$:

– nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$,
– ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \{-1, 1, 2\}$,
– ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-1, 1) \cup (1, 2)$.

Ćwiczenie 2. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, gdzie $k \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $(5-k^2)x^2 + kx + 1 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie. Dla każdej wyznaczonej wartości k podaj to rozwiązanie.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru p, gdzie $p \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $(p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

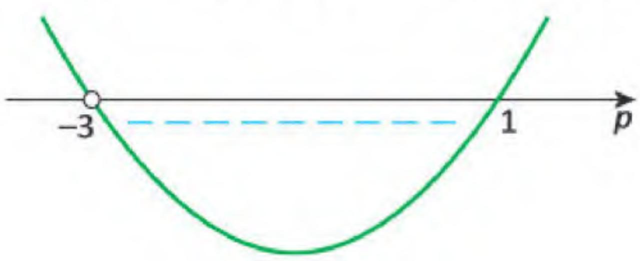
Równanie ma rozwiązanie wtedy, gdy ma co najmniej jedno rozwiązanie. To znaczy, że nie jest równaniem sprzecznym.

1) $p + 3 = 0$, czyli $p = -3$. Wówczas mamy:
   $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$
   $1 = 0$ – sprzeczność

Jeśli $p = -3$, to dane równanie jest sprzeczne.

2) $p \neq -3$. Wówczas dane równanie jest kwadratowe.
   $\Delta = (p+3)^2 - 4(p+3) = (p+3)(p-1)$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne wtedy, gdy $\Delta < 0$, czyli wtedy gdy funkcja $f(p) = (p+3)(p-1)$, gdzie $p \neq -3$, przyjmuje wartości ujemne.



Ze szkicu wykresu funkcji f odczytujemy:
$\Delta < 0 \Leftrightarrow p \in (-3, 1)$.

Po rozważeniu dwóch przypadków mamy:
Równanie $(p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ jest sprzeczne wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in \langle -3, 1)$.
Dopełnieniem przedziału $\langle -3, 1)$ w zbiorze $\boldsymbol{R}$ jest zbiór $(-\infty, -3) \cup \langle 1, +\infty)$.
Równanie $(p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, +\infty)$.

Ćwiczenie 3. Wykaż, że równanie $x^2-(p-2)x-p=0$ z niewiadomą x i parametrem p ma dwa różne rozwiązania dla dowolnej liczby rzeczywistej p.

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $-0{,}5x^2+2x+m^2-3m=0$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

I sposób – Skorzystamy ze wzorów Viéte'a.

Zauważ, że dla dowolnej liczby rzeczywistej m rozpatrywane równanie jest równaniem kwadratowym.
Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.
Dwa rozwiązania x_1 oraz x_2 są przeciwnych znaków wtedy, gdy jedno z nich jest dodatnie, a drugie ujemne, czyli wtedy gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.
Zatem wystarczy rozwiązać następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$$

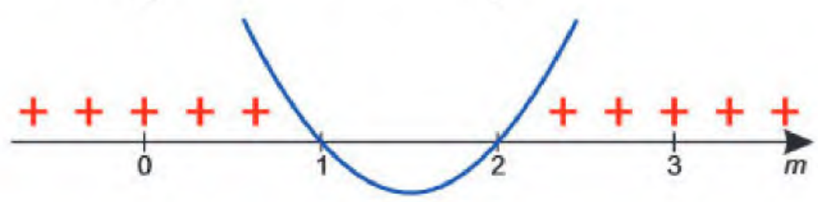
- Obliczamy wyróżnik i ustalamy, kiedy przyjmuje on wartość dodatnią.

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot(-0{,}5)\cdot(m^2-3m) = 2m^2-6m+4$$

$$\Delta_m = 36-4\cdot 2\cdot 4 = 4, \quad \sqrt{\Delta_m}=2, \quad m_1=\frac{6-2}{4}=1, \quad m_2=\frac{6+2}{4}=2$$

Z wykresu funkcji $y = 2m^2-6m+4$ odczytujemy:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

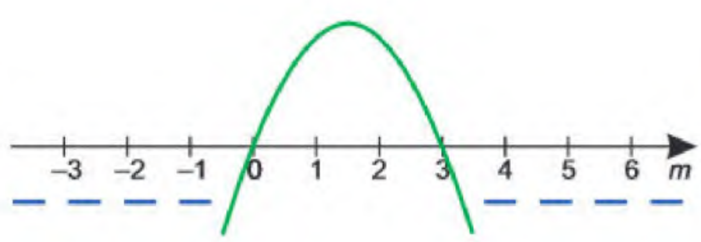


- Obliczamy iloczyn rozwiązań równania, stosując wzór $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2-3m}{-0{,}5} = -2(m-3)m$$

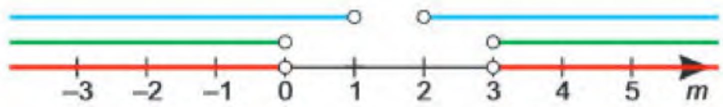
Z wykresu funkcji $y = -2(m-3)m$ odczytujemy:

$$-2(m-3)m < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$



- Wyznaczamy część wspólną zbiorów:

$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ oraz
$(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$



$m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

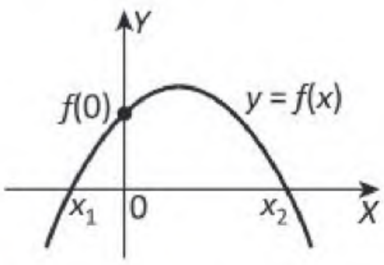
Równanie ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków wtedy, gdy
$m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

<u>II sposób</u> – Skorzystamy ze szkicu wykresu funkcji o zadanych własnościach.

Rozwiązania równania $-0{,}5x^2 + 2x + m^2 - 3m = 0$ to miejsca zerowe funkcji:

$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + m^2 - 3m$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Szkicujemy wykres funkcji, która ma dwa miejsca zerowe przeciwnych znaków. Znajdują się one na osi OX po przeciwnych stronach liczby 0. Parabola ma ramiona skierowane w dół, bo współczynnik przy x^2 jest ujemny.



Wnioskujemy, że funkcja f będzie miała dwa miejsca zerowe różnych znaków wtedy i tylko wtedy, gdy wartość funkcji f dla argumentu 0 będzie dodatnia.

Obliczamy:

$f(0) = -0{,}5 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + m^2 - 3m = m^2 - 3m$

$f(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m(m-3) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Równanie ma rozwiązania o przeciwnych znakach wtedy, gdy $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Ćwiczenie 4. Zastanów się, dlaczego w II sposobie rozwiązania przykładu 2. nierówność $f(0) > 0$ jest wystarczającym warunkiem – to znaczy nie trzeba dodatkowo rozwiązywać nierówności $\Delta > 0$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru a, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, dla których suma kwadratów dwóch rozwiązań równania $x^2 + (a+2)x = (a+1)(a+2)$ pomniejszona o $4a$ przyjmuje najmniejszą wartość. Podamy tę najmniejszą wartość.

Równanie zapisujemy w postaci:

$x^2 + (a+2)x - (a+1)(a+2) = 0.$

- Współczynnik przy x^2 jest różny od 0, więc dane równanie jest kwadratowe dla dowolnej liczby rzeczywistej a. Ma ono dwa rozwiązania wtedy, gdy wyróżnik jest dodatni.

$$\Delta = (a+2)^2 + 4(a+1)(a+2) = (a+2)\left[(a+2) + 4a + 4\right] = (a+2)(5a+6)$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (a+2)(5a+6) > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -2) \cup \left(-1\frac{1}{5}, +\infty\right)$$

- Sumę kwadratów rozwiązań x_1 i x_2 danego równania zapisujemy w takiej postaci, by można było wykorzystać wzory Viéte'a.

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \qquad x_1+x_2=-(a+2) \qquad x_1x_2=-(a+1)(a+2)$$

$$x_1^2+x_2^2=(a+2)^2+2(a+1)(a+2)=3a^2+10a+8$$

- Określamy funkcję f opisującą sumę kwadratów rozwiązań x_1 i x_2 pomniejszoną o $4a$, w zależności od wartości parametru a:

$$f(a)=3a^2+6a+8, \text{ gdzie } a\in(-\infty,-2)\cup\left(-1\frac{1}{5},+\infty\right).$$

Współczynnik przy a^2 jest równy 3; $3>0$. Zatem funkcja f może mieć wartość najmniejszą dla argumentu równego pierwszej wpółrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f.
Otrzymujemy:

$$a_W=\frac{-6}{2\cdot 3}=-1, \quad -1\in(-\infty,-2)\cup\left(-1\frac{1}{5},+\infty\right).$$

Obliczamy wartość funkcji f dla $a=-1$:

$$f(-1)=3\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+8=5.$$

Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą, równą 5, jeśli $a=-1$.

Ćwiczenie 5. Dane jest równanie z niewiadomą x i parametrem a, gdzie $a\in\mathbf{R}$: $x^2+ax+\frac{1}{4}(a+1)^2=0$. Wykaż, że suma kwadratów dwóch rozwiązań tego równania nie przyjmuje ani wartości najmniejszej, ani wartości największej.

Przykład 5.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, $m\in\mathbf{R}$, dla których równanie $x^2-(m-3)x+m=0$ ma dwa rozwiązania mniejsze od 2.

Zauważmy najpierw, że równanie $x^2-(m-3)x+m=0$ jest kwadratowe dla dowolnej wartości parametru m. Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby.

<u>I sposób</u> – skorzystamy ze wzorów Viéte'a.
Równanie ma dwa rozwiązania wtedy, gdy $\Delta>0$. Rozwiązania są mniejsze od 2, czyli

$x_1<2$ i $x_2<2$, zatem

$x_1-2<0$ i $x_2-2<0$.

Wyrażenia x_1-2 oraz x_2-2 są ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest dodatni i suma ujemna, czyli wtedy, gdy:

$(x_1-2)\cdot(x_2-2)>0$ i $(x_1-2)+(x_2-2)<0$, stąd

$x_1\cdot x_2-2x_1-2x_2+4>0$ i $x_1+x_2-4<0$, zatem

$x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)+4>0$ i $(x_1+x_2)-4<0$.

Warunki zadania możemy zapisać następująco:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ (x_1 + x_2) - 4 < 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy kolejno nierówności otrzymanego układu.

- $\Delta = [-(m-3)]^2 - 4m = m^2 - 6m + 9 - 4m = m^2 - 10m + 9$

  $\Delta_m = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64, \qquad \sqrt{\Delta_m} = 8$

  $m_1 = 1 \qquad\qquad m_2 = 9$

  Wówczas:

  $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-9) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty)$

- $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$

  Ze wzorów Viéte'a: $x_1 \cdot x_2 = m, \quad x_1 + x_2 = m - 3.$

  Stąd otrzymujemy:

  $m - 2(m-3) + 4 > 0$

  $-m + 10 > 0$

  $m < 10$

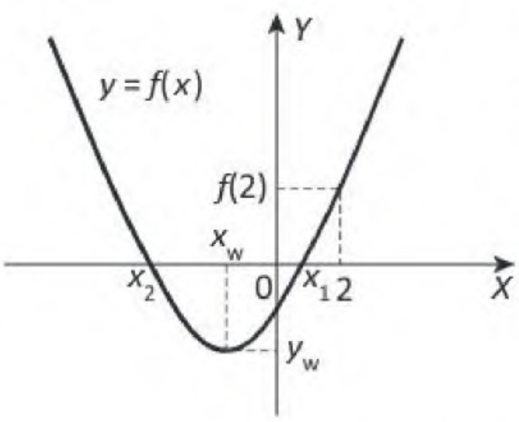
- $(x_1 + x_2) - 4 < 0$, czyli $(m-3) - 4 < 0$, więc $m < 7$.

Ostatecznie otrzymaliśmy:

$$\begin{cases} m \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty) \\ m \in (-\infty, 10) \\ m \in (-\infty, 7) \end{cases} \Leftrightarrow \quad m \in (-\infty, 1)$$

Równanie ma dwa rozwiązania mniejsze od 2 wtedy, gdy $m \in (-\infty, 1)$.

<u>II sposób</u> – skorzystamy z własności funkcji kwadratowej.
Rozwiązania x_1, x_2 równania kwadratowego $x^2 - (m-3)x + m = 0$ to miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - (m-3)x + m$. Wykresem funkcji f jest parabola ramionami zwrócona w górę. Aby rozważane równanie spełniło warunki zadania, miejsca zerowe funkcji f muszą być liczbami mniejszymi od 2.



Rysunek przedstawia wykres funkcji kwadratowej odpowiadający warunkom zadania.
Warunki zadania można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) > 0 \\ x_w < 2 \end{cases}$$

- Ustalamy, kiedy wyróżnik jest dodatni wykorzystując rozwiązanie przy I sposobie. Mamy

  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty)$

- Rozwiązujemy nierówność $f(2) > 0$.

$$4-(m-3)\cdot 2+m>0$$
$$-m+10>0$$
$$m<10 \quad \text{czyli} \quad m\in(-\infty,\,10)$$

- Rozwiązujemy nierówność: $x_w < 2$.

$$x_w<2 \Leftrightarrow \frac{m-3}{2}<2 \Leftrightarrow m<7 \quad \text{czyli} \quad m\in(-\infty,\,7)$$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych zbiorów i otrzymujemy:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ f(2)>0\\ x_w<2\end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty,\,1)$$

Dwa rozwiązania równania $x^2-(m-3)x+m=0$ są mniejsze od 2 wtedy, gdy $m\in(-\infty,\,1)$.

Ćwiczenie 6. Podaj przykład dwóch liczb rzeczywistych a, b, które spełniają układ nierówności:

$\begin{cases}a\cdot b<4\\ a+b<4\end{cases}$, ale jedna z nich jest mniejsza od 2, a druga jest większa od 2.

Przykład 6.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, $m\in \boldsymbol{R}$, dla których dziedziną funkcji

$f(x)=\sqrt{(m-1)x^2+2mx+3m-2}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych, tylko wtedy, gdy wyrażenie występujące pod znakiem pierwiastka kwadratowego przyjmuje wartości nieujemne dla każdej liczby x, czyli gdy nierówność $(m-1)x^2+2mx+3m-2\geqslant 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą x. Rozważymy dwa przypadki.

<u>I przypadek</u>

Współczynnik przy x^2 jest równy zeru, czyli $m-1=0$, stąd $m=1$. Wówczas nierówność jest liniowa i ma postać

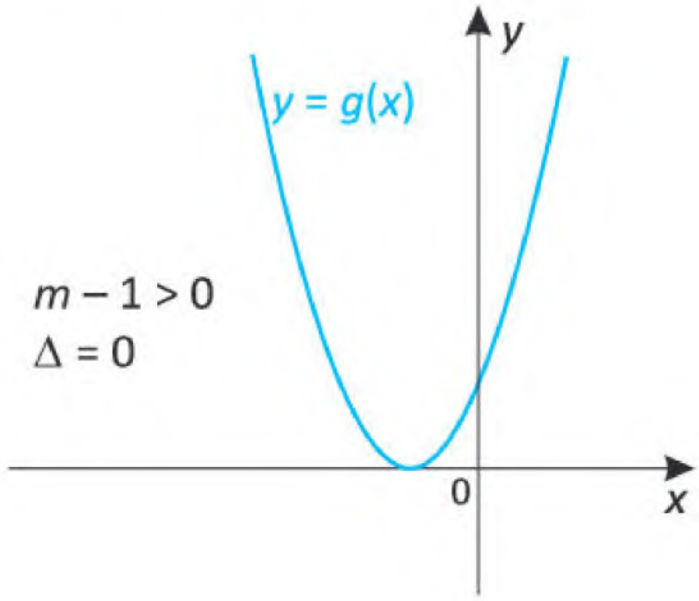
$$2x+1\geqslant 0$$

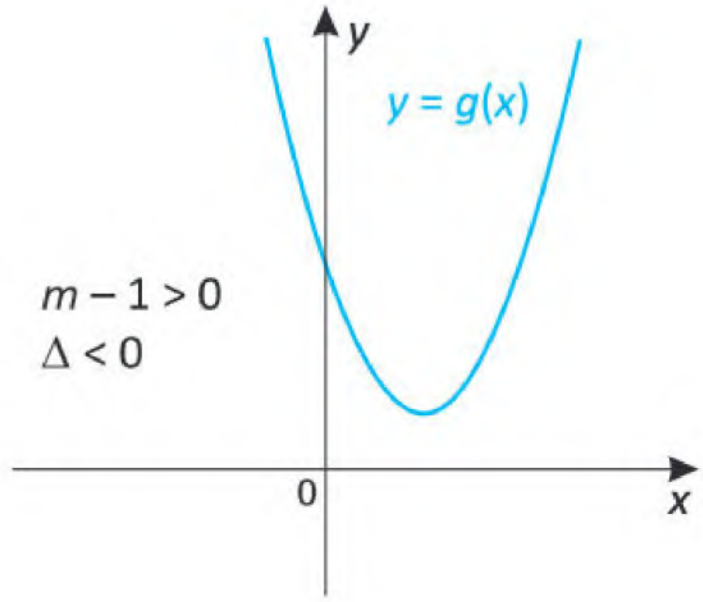
Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $\langle -0{,}5,\ +\infty)$, który jest podzbiorem właściwym zbioru $\boldsymbol{R}$. Zatem nierówności nie spełnia każda liczba rzeczywista, więc jeśli $m=1$, to nie są spełnione warunki zadania.

<u>II przypadek</u>

Jeśli $m\in \boldsymbol{R}-\{1\}$, to nierówność $(m-1)x^2+2mx+3m-2\geqslant 0$ jest kwadratowa. Spełniają ją wszystkie liczby rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej $g(x)=(m-1)x^2+2mx+3m-2$ ma ramiona skierowane w górę, a funkcja g ma co najwyżej jedno miejsce zerowe.

Możliwe są następujące przypadki:





Zatem warunki zadania są spełnione wtedy, gdy:

$$m-1>0 \ \wedge \ \Delta \leqslant 0$$

Rozwiążemy kolejno otrzymane nierówności:

- $m-1>0 \Leftrightarrow m>1 \Leftrightarrow m \in (1,+\infty)$
- $\Delta \leqslant 0 \Leftrightarrow (2m)^2-4\cdot(m-1)\cdot(3m-2)\leqslant 0 \Leftrightarrow 4m^2-4\cdot(3m^2-5m+2)\leqslant 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 2m^2-5m+2\geqslant 0 \Leftrightarrow 2\left(m-\frac{1}{2}\right)(m-2)\geqslant 0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle 2,+\infty)$

Stąd mamy:

$$\begin{cases} m\in(1,+\infty) \\ m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle 2,+\infty) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m\in\langle 2,+\infty)$$

Teraz wystarczy zsumować uzyskane wyniki w obu rozważanych przypadkach.

Dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{(m-1)x^2+2mx+3m-2}$ jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy, gdy $m\in\langle 2,+\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k\in \boldsymbol{R}$, dla których równanie:
   a) $(k+2)x^2-kx+k=0$ ma dwa rozwiązania,
   b) $(2k-1)x^2-2x+k=0$ ma tylko jedno rozwiązanie,
   c) $kx^2-4x+k+3=0$ nie ma rozwiązań,
   d) $(4-k^2)x^2+(k-2)x+3=0$ ma rozwiązanie.
2. Wyznacz liczbę rozwiązań równania ze względu na wartość parametru m, gdzie $m\in\boldsymbol{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $y=g(m)$, która każdej wartości parametru m przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.
   a) $mx^2+2x+m=0$
   b) $(2m-1)x^2-2mx+1=0$

3. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, gdzie $p \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie:
   a) $x^2 + (p-3)x + p^2 = 0$ ma dwa rozwiązania jednakowych znaków,
   b) $x^2 + 2px + 1 - p^2 = 0$ ma dwa rozwiązania ujemne,
   c) $x^2 - px - p + 3 = 0$ ma dwa rozwiązania dodatnie,
   d) $x^2 + px + p^2 - 3 = 0$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.
4. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, dla których:
   a) nierówność $(a-2)x^2 + ax + a - 2 < 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą,
   b) dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{(a+1)x^2 + 4x + a + 1}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.
5. Dla jakich wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$, równanie $4x^2 - 4(3m-2)x + 6m - 5 = 0$ ma dwa rozwiązania, których kwadrat różnicy jest mniejszy od 9?
6. Dla jakich wartości parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, równanie $x^2 + (3a+4)x + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania, których suma kwadratów odwrotności jest nie mniejsza niż 7?
7. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 + kx + 2k = 0$ spełniają warunek $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 + 3x_1x_2 \geqslant x_1 + x_2 - 4$?
8. Wyznacz te wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 3x - m + 1$ ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 spełniające warunek $3x_2 - 2x_1 = 4$.
9. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, gdzie $p \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2(1-p)x + 1$ ma dwa miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 1)$.
10. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, gdzie $p \in \boldsymbol{R}$, dla których każde z dwóch miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + x + p$ należy do przedziału $(p, +\infty)$.
11. Dla jakich wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, równanie $x^2 + (p+2)x - 2p + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest ujemne, a drugie większe od 1?
12. Dla jakich wartości parametru p, gdzie $p \in \boldsymbol{R}$, funkcja kwadratowa $f(x) = (2p - x)(x - p + 5)$ przyjmuje wartości dodatnie, dla każdej liczby rzeczywistej x należącej do przedziału $\langle -3, 2 \rangle$?
13. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, gdzie $p \in \boldsymbol{R}$, dla których rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 + (p-1)x + p + 3 = 0$ spełniają warunek:
   a) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 3x_1x_2 \leqslant 0$ b) $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3.

Test

1. Wykresem funkcji kwadratowej $y = -2(x + 1)^2$ jest parabola o wierzchołku w punkcie:
A. $(0, -2)$ B. $(1, 0)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-2, 0)$

2. Osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $y = x^2 + 6x - 8$ jest prosta o równaniu:
A. $y = -6$ B. $x = -3$ C. $y = -3$ D. $x = -6$

3. Suma miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = 2(x - 1)(x + 3)$ jest równa:
A. -2 B. -4 C. 2 D. 4

4. Maksymalny przedział, w którym funkcja kwadratowa $y = -3(x + 2)^2 + 1$ jest rosnąca, to:
A. $(-\infty, 1\rangle$ B. $(-\infty, -3\rangle$ C. $\langle -2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2\rangle$

5. Wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji $y = 0{,}5(x - 2)(x - 4)$, ma współrzędne:
A. $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ B. $(-3, 0)$ C. $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-3, -\frac{35}{2}\right)$

6. Wzór funkcji kwadratowej $y = 2 - (x + 3)^2$ w postaci ogólnej to:
A. $y = -x^2 + 6x + 11$ B. $y = -x^2 - 6x - 7$
C. $y = -x^2 - 6x + 11$ D. $y = -x^2 - 6x + 7$

7. Funkcja kwadratowa $y = -x^2 - 4x - 2$ przyjmuje największą wartość równą:
A. -14 B. -4 C. 2 D. 10

8. Wykres funkcji $y = x^2 - 2x + 3$ przesunięto równolegle wzdłuż osi OY o 3 jednostki w dół i otrzymano wykres funkcji, której miejscami zerowymi są liczby:
A. 0 i 1 B. –1 i 0 C. 0 i 2 D. –2 i 0

9. Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-4, 1)$. Zatem funkcja $g(x) = -f(x + 2)$ przyjmuje wartości dodatnie tylko wtedy, gdy:
A. $x \in (-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$ B. $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
C. $x \in (-2, 3)$ D. $x \in (-6, -1)$

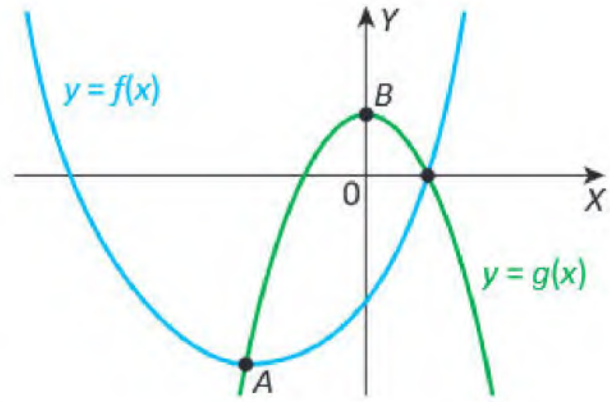
10. Która z poniższych funkcji przyjmuje w przedziale $\langle -1, 0\rangle$ najmniejszą wartość równą 0 ?
A. $y = -x^2$ B. $y = 4x^2 + 4x + 1$ C. $y = x^2 - 2x + 1$ D. $y = -x^2 + 4$

11. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $y = -2x^2 - 4x + 5c$ jest przedział $(-\infty, -8\rangle$. Zatem:
A. $c = 0$ B. $c = \frac{-8}{5}$ C. $c = -1$ D. $c = -2$

Zadania otwarte

12. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W(3, 0)$.
    a) Oblicz wartości współczynników b i c. b) Rozwiąż nierówność $f(x)\leqslant 2$.
13. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=-2x^2+4x$. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz:
    a) przesuwając wykres funkcji f o 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w górę
    b) przekształcając wykres funkcji f w symetrii środkowej względem punktu $(0, 0)$.
14. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe: -8 i 2. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $A(-4, 6)$.
    a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f.
    b) Podaj miejsca zerowe funkcji g, określonej wzorem $g(x)=f(x+5)$.
15. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest liczba 5. Maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca, to $(-\infty, 3\rangle$. W przedziale $\langle -2, 0\rangle$ największa wartość tej funkcji jest równa 10,5. Wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej i w postaci kanonicznej.
16. Funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$, przyjmuje największą wartość równą 9. Wiedząc, że $f(-3)=f(5)=-7$, wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej i w postaci ogólnej.
17. Rozwiąż równanie:
    a) $3(x-2)^2=9(x-2)$ b) $(x+3)^2=4(x-1)^2$ c) $(2x^2-1)^2=(x^2-5)^2$.
18. Rozwiąż nierówność:
    a) $5x+2>\frac{6x-x^2}{2}$ b) $(x+2)^2\geqslant 6x+2$ c) $(5-x)(x+3)<0$.
19. Wyznacz najmniejszą i największą wartość wyrażenia x^2+4x+5 w przedziale:
    a) $\langle -3, 1\rangle$ b) $\langle 11, 25\rangle$.
20. Książka kosztowała 60 zł. Po dwukrotnej obniżce ceny o ten sam procent, cena książki była równa 43 zł 35 gr. Ile procent wyniosła każda z obniżek?
21. Pewien zakład stolarski produkuje stoły, które sprzedaje po 96 zł za sztukę. Związek między kosztem produkcji $K(x)$, a liczbą x wytworzonych w ciągu dnia stołów wyraża wzór $K(x)=5x^2+6x+160$. Zakład może wyprodukować dziennie maksymalnie 12 stołów.
    a) Wyznacz wzór funkcji, określającej dzienny zysk zakładu w zależności od liczby wytworzonych stołów.
    b) Oblicz, ile stołów dziennie powinien produkować ten zakład, aby jego produkcja była opłacalna.
    c) Dla jakiej liczby wyprodukowanych w ciągu dnia stołów zysk zakładu będzie największy? Oblicz wartość tego zysku.

22. Na rysunku obok przedstawione są wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Funkcja f opisana jest wzorem: $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x - 3\frac{1}{3}$. Wierzchołek A paraboli będącej wykresem funkcji f należy do wykresu funkcji g. Większe miejsce zerowe funkcji f jest także miejscem zerowym funkcji g. Osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $y = g(x)$ jest prosta o równaniu $x = 0$. Wyznacz wzór funkcji $y = g(x)$ i rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.



D 23. Wykaż, że jeśli funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx$, gdzie $a \neq 0$, przyjmuje w przedziale $\langle -5, -1\rangle$ największą wartość równą $f(-2)$, to $a + b < 0$.

D 24. Wykaż, że jeśli funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + (b - 4)x + c$ ma dwa miejsca zerowe i dla argumentu c przyjmuje najmniejszą wartość, to $c \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

25. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których najmniejsza wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (p - 1)x + 2p^2$ jest mniejsza od 2.

26. Rozwiąż algebraicznie i graficznie równanie oraz nierówność:
a) $|x - 1| \cdot (x - 1) = 4 - (x - 3)^2$ b) $|x^2 - 2x| < |x - 1| + 1$.

27. Naszkicuj wykres funkcji $y = g(k)$, która każdej wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $|x^2 - 4| - 2x = k - 1$.

D 28. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej m równanie $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek: $|x_1 - x_2| = 2$.

29. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których funkcja kwadratowa $f(x) = -2x^2 + (3 - m)x + m^2 - 3m$ ma dwa miejsca zerowe dodatnie.

30. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których funkcja $f(x) = x^2 + (k + 3)x + 2k^2 + 5k - 3$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 \cdot x_2| \leqslant |x_1 + x_2|$.

31. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla których zbiorem rozwiązań nierówności $(a^2 + 2a - 3)x^2 - (a + 3)x + 1 > 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

32. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których równanie $2x^2 - (p + 3)x + p + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania należące do przedziału $(-1, 3)$.

33. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności $(2 - m - x)(3m + 5 + x) \geqslant 0$ zawiera się w przedziale $\langle -2, 8\rangle$.

34. Dla jakich wartości parametru m, gdzie $m \in \mathbf{R}$, różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 - 2mx + 4 - m^2 = 0$ spełniają nierówność $|x_1| + |x_2| \leqslant 4$?

4. Geometria płaska – okręgi i koła

Powtórzenie wiadomości z geometrii z klasy 1.

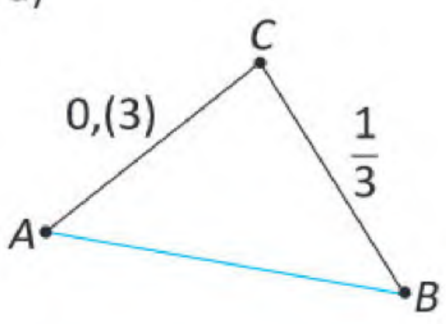
W tym temacie przypomnimy definicję symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta, podstawowe własności trójkątów, a także ważne twierdzenia z geometrii, poznane w klasie pierwszej. Umieszczone pod twierdzeniami ćwiczenia pomogą Ci przypomnieć zastosowania tych twierdzeń do rozwiązywania zadań.

Definicja 1.
Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka, dzielącą go na dwie równe części.

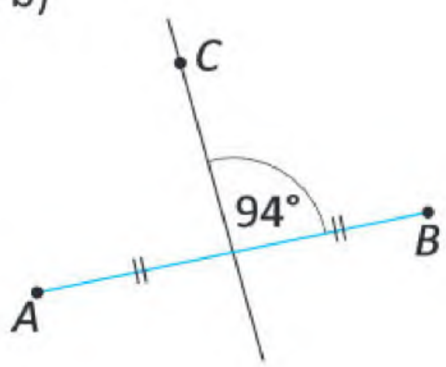
Twierdzenie 1. *O symetralnej odcinka*
Symetralna odcinka jest zbiorem punktów równoodległych od końców tego odcinka.

Ćwiczenie 1. Czy punkt C na rysunku poniżej należy do symetralnej odcinka AB? Odpowiedź uzasadnij.

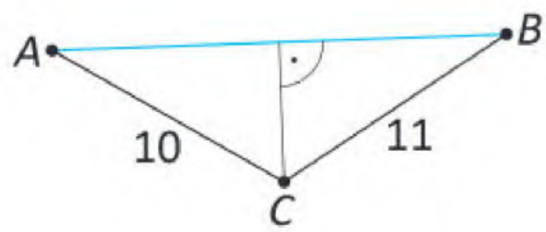
a)



b)



c)

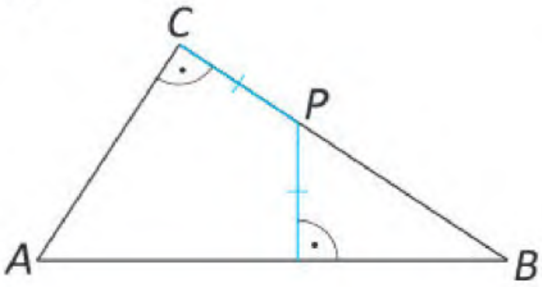


Definicja 2.
Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku tego kąta, dzielącą kąt na dwa kąty równe.

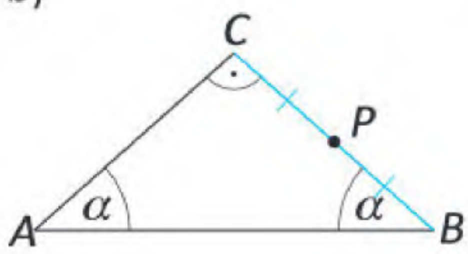
Twierdzenie 2. *O dwusiecznej kąta*
Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem punktów równoodległych od ramion tego kąta.

Ćwiczenie 2. Czy punkt P na rysunku poniżej należy do dwusiecznej kąta BAC? Odpowiedź uzasadnij.

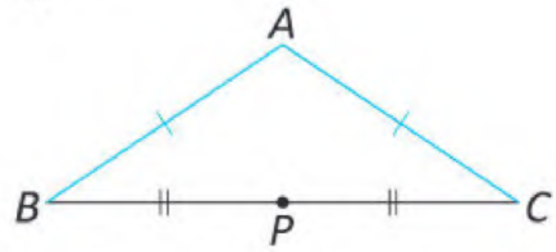
a)



b)



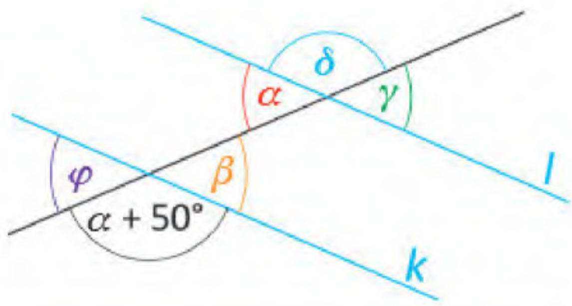
c)



Twierdzenie 3. *O dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą*

Jeżeli dwie proste równoległe są przecięte trzecią prostą, to kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe.

Ćwiczenie 3. Która para kątów na rysunku obok to kąty naprzemianległe wewnętrzne, która – kąty naprzemianległe zewnętrzne, a która – kąty odpowiadające? Oblicz kąt α, wiedząc że proste k i l są równoległe.



Twierdzenie 4.

Jeżeli dwie proste tworzą z trzecią prostą kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, to są równoległe.

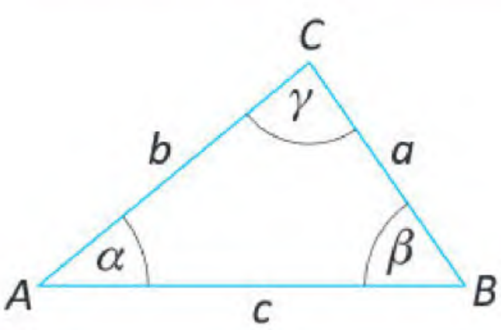
Ćwiczenie 4. W czworokącie $ABCD$ przekątna AC zawarta jest w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A. Wykaż, że jeśli $|AD| = |DC|$, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Definicja 3.

Trójkątem nazywamy wielokąt, który ma trzy boki.

Twierdzenie 5. *Nierówność trójkąta*

W dowolnym trójkącie długość każdego boku jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków.



$$\begin{array}{lcccc} a < b + c & \text{i} & b < a + c & \text{i} & c < a + b \\ a < b + c & \text{i} & b - c < a & \text{i} & b - c > -a \\ a < b + c & \text{i} & & |b - c| < a & \end{array}$$

$$|b - c| < a < b + c$$

Wniosek: Z trzech odcinków mających długości a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy $|b - c| < a < b + c$

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie liczby c, gdzie $c > 0$, dla których istnieje trójkąt o bokach mających długość: 5, c, $2c + 1$.

Z ostatniego wniosku i z warunków zadania mamy:

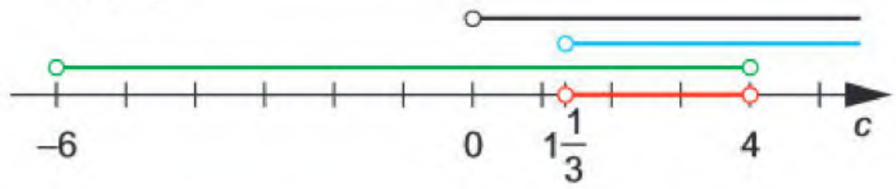
$$|2c+1-c| < 5 < 3c+1 \quad \text{i} \quad c > 0$$

$$|c+1| < 5 \quad \text{i} \quad 5 < 3c+1 \quad \text{i} \quad c > 0$$

Po rozwiązaniu nierówności otrzymujemy:

$$-6 < c < 4 \quad \text{i} \quad c > 1\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad c > 0$$

$$c \in \left(1\frac{1}{3}, 4\right)$$

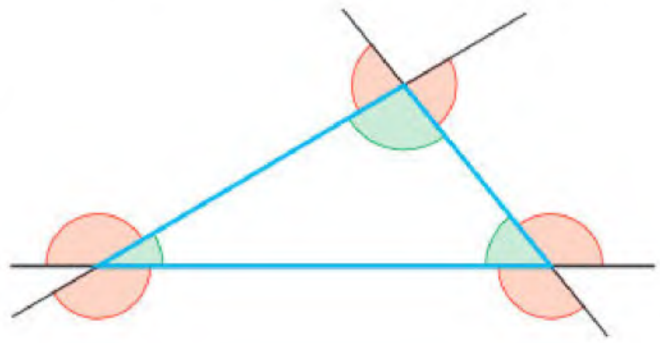


Z danych odcinków można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy $c \in \left(1\frac{1}{3}, 4\right)$.

Ćwiczenie 5. Boki trójkąta mają długości: $2 - c$, 7, $2c + 5$. Wyznacz liczbę c, dla której długości wszystkich boków trójkąta wyrażają się liczbami naturalnymi. Dla wyznaczonej wartości c podaj długości boków tego trójkąta.

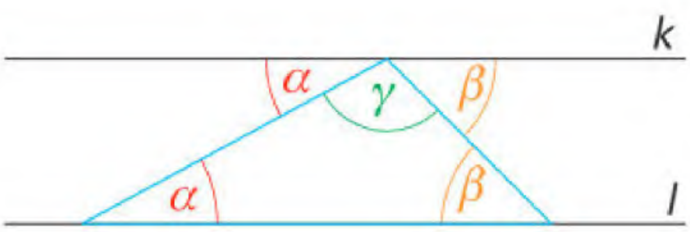
W trójkącie wyróżniamy trzy kąty wewnętrzne oraz trzy pary kątów zewnętrznych.

Na rysunku obok kolorem zielonym są zaznaczone kąty wewnętrzne trójkąta, a kolorem czerwonym – kąty zewnętrzne trójkąta.



Twierdzenie 6.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.

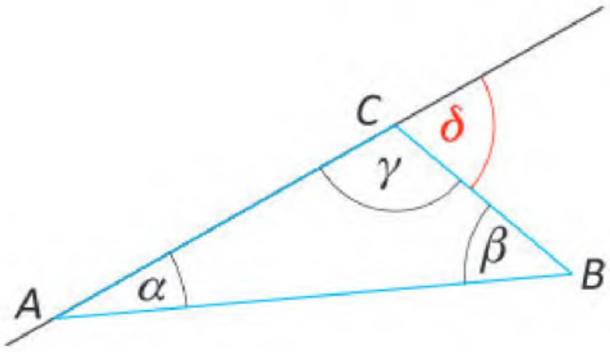


$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$k \parallel l$

Twierdzenie 7.

Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych do tego kąta.



$\delta + \gamma = 180°$ oraz
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, więc
$\delta = \alpha + \beta$

Ćwiczenie 6. Wykaż, że suma miar wszystkich kątów zewnętrznych trójkąta jest równa 720°.

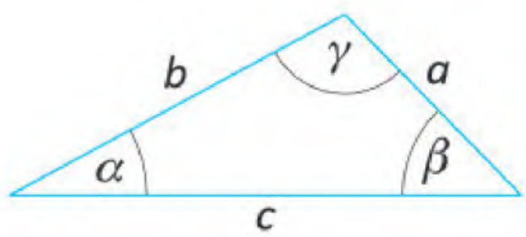
Ze względu na kąty trójkąty dzielimy na:
a) trójkąty ostrokątne, których wszystkie kąty wewnętrzne są ostre,
b) trójkąty prostokątne, których jeden kąt wewnętrzny jest prosty, dwa ostre,
c) trójkąty rozwartokątne, których jeden kąt wewnętrzny jest rozwarty, dwa ostre.

Ze względu na długości boków trójkąty dzielimy na:
a) trójkąty różnoboczne, które mają wszystkie boki różnej długości,
b) trójkąty równoramienne, których co najmniej dwa boki mają tę samą długość, wśród których wyróżniamy trójkąty równoboczne – trzy boki mają tę samą długość.

Wszystkie kąty wewnętrzne trójkąta równobocznego są równe 60°.

Twierdzenie 8.
Jeśli dwa boki trójkąta mają różne długości, to kąt leżący naprzeciw dłuższego boku jest większy.

Ćwiczenie 7. Kąty wewnętrzne trójkąta są równe α, β, γ, zaś długości boków tego trójkąta wynoszą odpowiednio a, b, c (patrz rysunek obok). Uzasadnij, że jeśli $a < b < c$, to $\alpha < 60°$ i $\gamma > 60°$.



Twierdzenie 9.
Trójkąt jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej dwa kąty tego trójkąta są równe.

Ćwiczenie 8. W trójkącie prostokątnym ABC punkt D należy do przeciwprostokątnej AB. Wykaż, że jeśli $|BD| = |CD|$, to $|CD| = |AD|$.

Definicja 4.

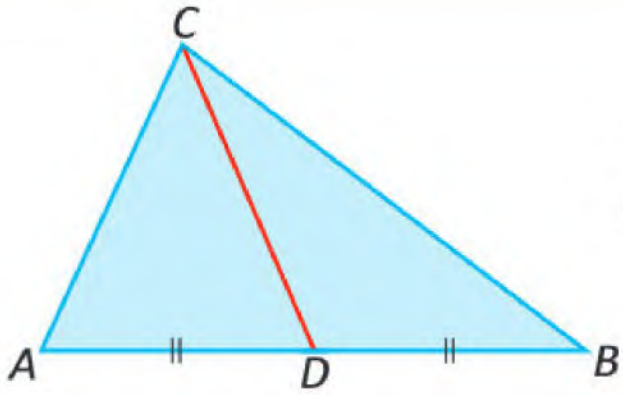
Wysokością trójkąta nazywamy odcinek, a także długość tego odcinka, który łączy wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok i który jest prostopadły do tej prostej.

Każdy trójkąt ma trzy wysokości. Wysokości trójkąta lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy **ortocentrum**.

Ćwiczenie 9. Narysuj trzy trójkąty różnoboczne: trójkąt ostrokątny, trójkąt prostokątny i trójkąt rozwartokątny. W każdym trójkącie poprowadź trzy wysokości i zaznacz ortocentrum.

Definicja 5.

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



$|AD| = |DB|$
CD – środkowa

Twierdzenie 10. Cechy przystawania trójkątów

1. (bbb) Jeżeli długości trzech boków w jednym trójkącie są odpowiednio równe długościom trzech boków w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.
2. (bkb) Jeżeli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są równe odpowiednio dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.
3. (kbk) Jeżeli bok i dwa przyległe do niego kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm przyległym do niego kątom w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.

Ćwiczenie 10. Wykaż, że środkowa trójkąta równoramiennego poprowadzona z wierzchołka kąta między ramionami jest jednocześnie wysokością tego trójkąta.

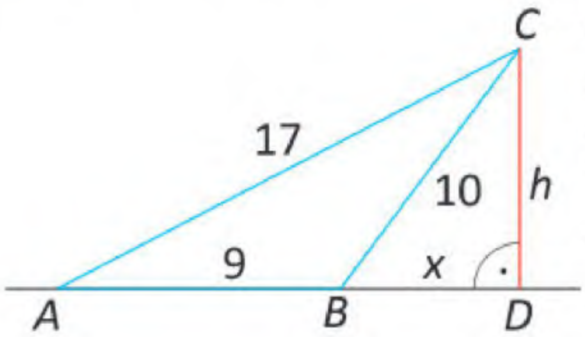
Ćwiczenie 11. Wykaż, że w trójkącie równoramiennym wysokości poprowadzone z wierzchołków przy podstawie są równe.

Ćwiczenie 12. Wykaż, że w trójkącie równoramiennym środkowe poprowadzone z wierzchołków przy podstawie mają taką samą długość.

Twierdzenie 11. *Twierdzenie Pitagorasa*
Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

Przykład 2.

Wyznaczymy wysokość CD trójkąta rozwartokątnego ABC, wiedząc, że $|AB| = 9$, $|BC| = 10$, $|AC| = 17$.



Z twierdzenia 8. wynika, że kąt rozwarty znajduje się naprzeciw najdłuższego boku, w tym przypadku naprzeciw boku AC.

Wprowadźmy oznaczenia: $|CD| = h$, $|BD| = x$.

Stosujemy dwukrotnie twierdzenie Pitagorasa: do trójkąta BDC i do trójkąta ADC.

$$h^2 + x^2 = 10^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 + (x+9)^2 = 17^2$$
$$h^2 = 100 - x^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = 289 - (x+9)^2$$

Porównujemy prawe strony dwóch ostatnich równości i otrzymujemy równanie

$$100 - x^2 = 289 - (x+9)^2,$$

którego rozwiązaniem jest liczba 6. Następnie obliczamy wysokość CD:

$$h^2 = 100 - 36 = 64$$
$$h = 8.$$

Wysokość CD jest równa 8.

Ćwiczenie 13. Wyznacz pozostałe wysokości trójkąta ABC z ostatniego przykładu.

Twierdzenie 12. *Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa*
Jeżeli długości boków a, b, c trójkąta spełniają zależność $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny, przy czym bok długości c leży naprzeciw kąta prostego.

Ćwiczenie 14. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 24$, $|BC| = 25$, $|AC| = 7$.

a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
b) Oblicz długość środkowej CD.

Twierdzenie 13. *O środkowych w trójkącie*
W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 1 : 2.

Punkt przecięcia się środkowych w trójkącie nazywamy **środkiem ciężkości trójkąta**.

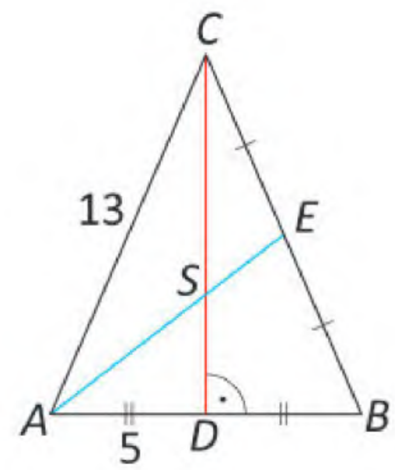
Ćwiczenie 15. Narysuj trzy trójkąty różnoboczne: trójkąt ostrokątny, trójkąt prostokątny i trójkąt rozwartokątny. W każdym trójkącie poprowadź trzy środkowe i zaznacz środek ciężkości.

Przykład 3.

Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta równoramiennego ABC, którego boki mają długość: $|AB| = 10$, $|AC| = |BC| = 13$. Wyznaczymy odległość punktu S od wierzchołka C.

Na rysunku obok środkowe CD i AE przecinają się w punkcie S.

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc środkowa CD jest jednocześnie wysokością trójkąta.



Wyznaczamy długość środkowej CD:

$|CD|^2 = |AC|^2 - |AD|^2$ – z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC

$|CD|^2 = 13^2 - 5^2 = 144, \quad |CD| > 0$

$|CD| = 12$

Punkt S dzieli środkową na odcinki CS i SD w stosunku 2:1, stąd

$$|CS| = \frac{2}{3}|CD|,$$

więc

$$|CS| = 8$$

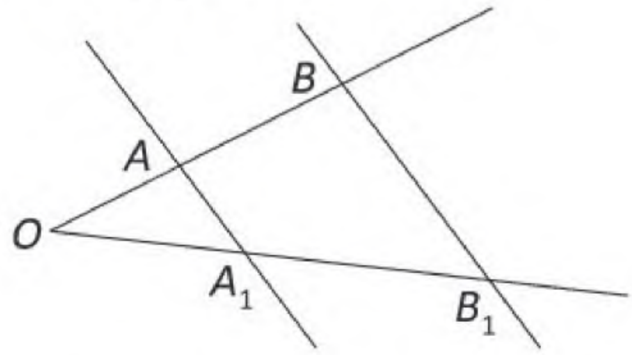
Odległość środka ciężkości trójkąta ABC od wierzchołka C jest równa 8.

Ćwiczenie 16. Wyznacz odległość punktu S od wierzchołka A z przykładu 3., a następnie oblicz długość środkowej AE.

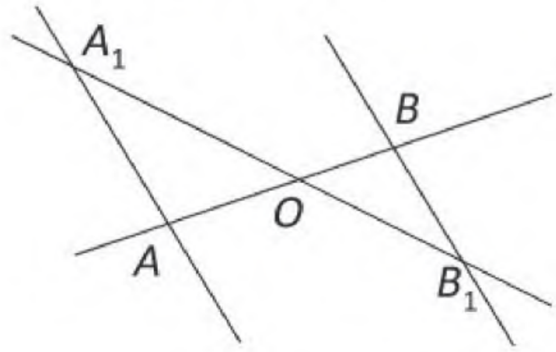
Twierdzenie 14. Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta AOA_1 lub ich przedłużenia przetniemy dwiema prostymi równoległymi AA_1 i BB_1, to stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na ramieniu OA lub na jego przedłużeniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków na ramieniu OA_1 lub na jego przedłużeniu.

a) pr. $AA_1 \parallel$ pr. BB_1



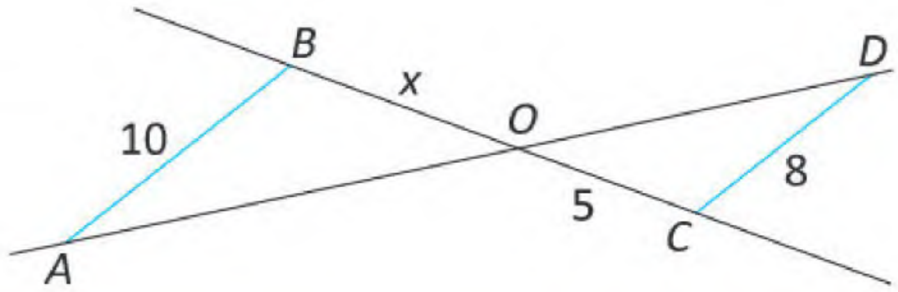
b) pr. $AA_1 \parallel$ pr. BB_1



$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|} \text{ oraz } \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$$

Ćwiczenie 17. Przy założeniach twierdzenia Talesa (zobacz rysunek powyżej) wykaż, że $\dfrac{|AB|}{|OB|} = \dfrac{|A_1B_1|}{|OB_1|}$.

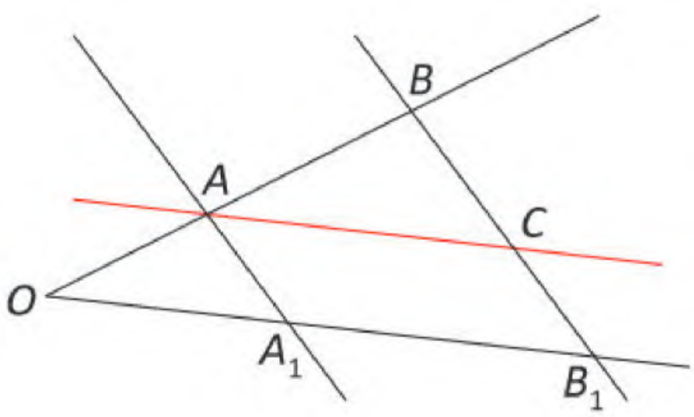
Ćwiczenie 18. Na rysunku obok odcinki AB i CD są równoległe. Oblicz x.



Wniosek z twierdzenia Talesa:
Przy założeniach twierdzenia Talesa (patrz rysunek do tw. Talesa) stosunek długości odcinków utworzonych na obu prostych równoległych jest równy stosunkowi długości tych odcinków na każdym z ramion, których końcem jest wierzchołek kąta, czyli:

$$\frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}.$$

Udowodnimy powyższy wniosek. Rozważmy kąt położony tak, jak na rysunku a) do twierdzenia Talesa.



Przez punkt A prowadzimy prostą równoległą do ramienia $\overrightarrow{OB_1}$, która przecina prostą BB_1 w punkcie C. Rozpatrzmy kąt OBB_1, którego ramiona przecinają proste AC i OB_1. Na mocy równości z ćwiczenia 17. otrzymujemy

$$\frac{|CB_1|}{|BB_1|} = \frac{|OA|}{|OB|} \quad \text{ale}$$

$$|CB_1| = |AA_1|$$ Czworokąt AA_1B_1C jest równoległobokiem.

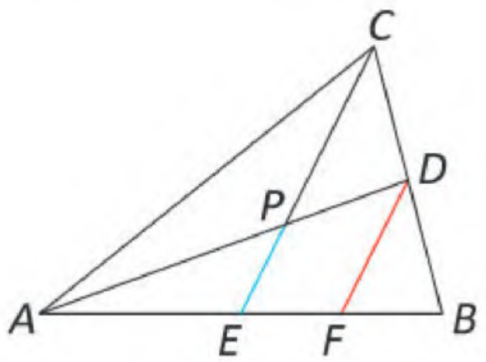
więc

$$\frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|OA|}{|OB|}$$

co kończy dowód.

Przykład 4.

W trójkącie ABC środkowe AD i CE przecinają się w punkcie P. Odcinek DF jest równoległy do środkowej CE i $F \in AB$. Wykażemy, że $|DF| : |PE| = 3 : 2$.



Założenie:
CE, AD – środkowe trójkąta ABC
$F \in AB$, $DF \parallel CE$

Teza:
$|DF| : |PE| = 3 : 2$

Dowód: Z twierdzenia o środkowych w trójkącie mamy:

$$\frac{|PD|}{|AP|} = \frac{1}{2}, \text{ stąd } |AP| = 2|PD| \text{ i } |AD| = 3|PD|.$$

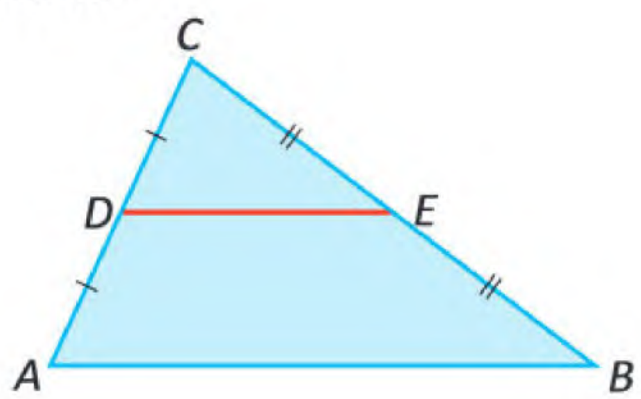
Z założenia $DF \parallel CE$ wynika, że $DF \parallel PE$. Z wniosku z twierdzenia Talesa otrzymujemy:

$$\frac{|DF|}{|PE|} = \frac{|AD|}{|AP|} \quad \text{czyli} \quad \frac{|DF|}{|PE|} = \frac{3|PD|}{2|PD|} = \frac{3}{2}$$

co kończy dowód.

Twierdzenie 15. *O odcinku łączącym środki boków trójkąta*
Jeśli w trójkącie połączymy środki dwóch boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

Założenie:



Teza:

$DE \parallel AB$

$|DE| = \frac{1}{2}|AB|$

Ćwiczenie 19. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne mają długość: $|AC| = 5$ cm, $|BD| = 6$ cm. Wykaż, że czworokąt, powstały z połączenia kolejno środków boków czworokąta $ABCD$, jest równoległobokiem, a jego obwód jest równy 11 cm.

Twierdzenie 16. *Cechy podobieństwa trójkątów*

1. (bbb) Jeżeli długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$, czyli $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$, to te trójkąty są podobne.
2. (bkb) Jeżeli długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta $A_1B_1C_1$, czyli $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$, oraz kąty między tymi bokami są równe, to te trójkąty są podobne.
3. (kkk) Jeżeli dwa kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe dwóm kątom trójkąta $A_1B_1C_1$, to te trójkąty są podobne.

Dodatnią liczbę k, $k = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$, nazywamy **skalą podobieństwa** trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC.

Przykład 5.

Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{4}{5}$. Obliczymy, o ile procent obwód trójkąta ABC jest większy od obwodu trójkąta $A_1B_1C_1$.

Niech a, b, c oznaczają długości boków trójkąta ABC, L, L_1 – obwody trójkątów odpowiednio ABC i $A_1B_1C_1$. Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC w skali $\frac{4}{5}$ mają odpowiednio długość: $\frac{4}{5}a$, $\frac{4}{5}b$, $\frac{4}{5}c$.

Obliczamy:

$$L_1 = \frac{4}{5}a + \frac{4}{5}b + \frac{4}{5}c = \frac{4}{5}(a+b+c) = \frac{4}{5}L, \text{ stąd}$$

$$L = \frac{5}{4}L_1 = 1{,}25L_1$$

Obwód trójkąta ABC jest o 25% większy od obwodu trójkąta $A_1B_1C_1$.

Ćwiczenie 20. W trójkącie ABC wysokość CD podzieliła podstawę AB na odcinki mające długość 3 cm i 12 cm. Wiedząc, że wysokość CD ma długość 6 cm, wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

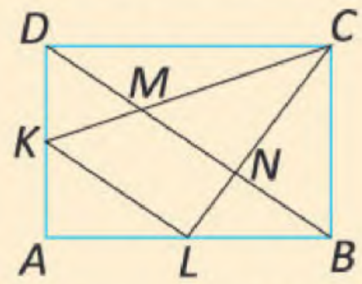
Ćwiczenie 21. Wykaż, korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, że w trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki mające długość c_1, c_2, dla których $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$.

Ćwiczenie 22. W trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, wysokość BD podzieliła ramię AC na odcinki mające długość 4 cm i 6 cm, licząc od wierzchołka A. Jaką długość ma podstawa AB tego trójkąta?

Sprawdź, czy rozumiesz.

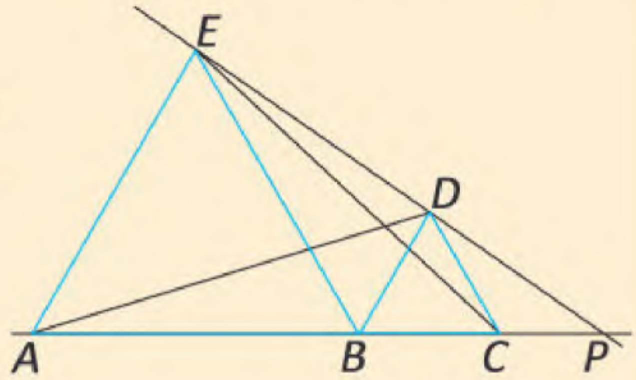
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Dane są długości boków trójkąta ABC: $|AB| = 14$, $|BC| = 15$, $|AC| = 13$. Oblicz wysokość poprowadzoną z wierzchołka C.
2. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 3\sqrt{2}$, $|\sphericalangle BAC| = 45°$, $|\sphericalangle CBA| = 60°$. Oblicz:
   a) obwód trójkąta ABC
   b) wysokości tego trójkąta.
3. Oblicz długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C, jeśli:
   a) $|AB| = 10$, $|BC| = 8$, $|AC| = 6$
   b) $|AB| = |AC| = 20$, $|BC| = 32$
4. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość AD dzieli najdłuższy bok BC na odcinki długości: $|CD| = 1$ oraz $|DB| = 4$. Wyznacz wysokość DE trójkąta ABD.
5. Na rysunku obok punkty K i L są środkami boków AD i AB prostokąta $ABCD$. Odcinki KC i LC przecinają przekątną DB w punktach M i N. Wiedząc, że $|AB| = 24$ oraz $|BC| = 18$, oblicz $|KL|$ oraz $|MN|$.



D 6. W trójkącie równoramiennym ABC, $|AB| = |AC|$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 36°$. Wykaż, że dwusieczna kąta przy podstawie dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne.

D 7. Na rysunku obok punkty A, B, C są współliniowe, a trójkąty ABE i BCD są równoboczne.
   a) Wykaż, że $|AD| = |EC|$.
   b) Wykaż, że jeśli proste AB i ED przecinają się w punkcie P oraz $|AB| = a$ i $|BC| = b$, to $|CP| = \dfrac{b^2}{a-b}$.



Okrąg. Położenie prostej i okręgu

Definicja 1.

Okręgiem o środku O i promieniu r, $r > 0$, nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r. Taki okrąg oznaczamy symbolem $o(O, r)$.

Promieniem okręgu nazywamy również odcinek łączący środek okręgu z dowolnym punktem tego okręgu.
Okrąg o promieniu r ma długość równą $2\pi r$.

Część okręgu, wyznaczona przez dwa punkty okręgu wraz z tymi punktami, jest łukiem okręgu. Zauważ, że dwa punkty okręgu wyznaczają dwa łuki.

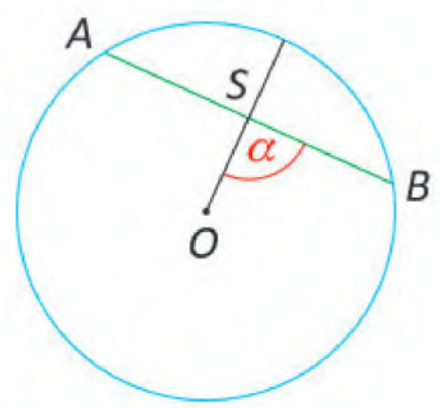
Cięciwą okręgu nazywamy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu. Cięciwa przechodząca przez środek okręgu jest **średnicą** tego **okręgu**. Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.

Twierdzenie 1.

Jeśli promień okręgu przechodzi przez środek cięciwy, to jest prostopadły do tej cięciwy.

Założenie:
- $o(O, r)$ – dany okrąg
- AB – cięciwa okręgu $o(O, r)$
- S – środek cięciwy AB
- $|\sphericalangle OSB| = \alpha$

Teza: $\alpha = 90°$



Dowód: Rozpatrujemy trójkąty AOS i BOS. Mamy:
- $|AS| = |BS|$ – z założenia
- OS – wspólny bok trójkątów AOS i OBS oraz
- $|AO| = |BO|$ – promienie okręgu

Z cechy (bbb) otrzymujemy:
$\Delta AOS \equiv \Delta BOS$.

Zatem kąty przyległe OSA i OSB są równe, więc
$|\sphericalangle OSA| = |\sphericalangle OSB| = \alpha = 90°$ co kończy dowód.

Twierdzenie 2.

Jeśli promień okręgu jest prostopadły do cięciwy, to dzieli tę cięciwę na połowy.

Założenie:

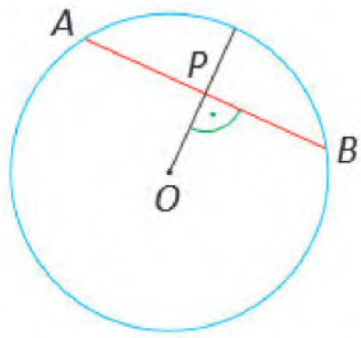
$o(O, r)$ – dany okrąg

AB – cięciwa okręgu

$P \in AB \quad |\sphericalangle OPB| = 90°$

Teza:

$|AP| = |PB|$

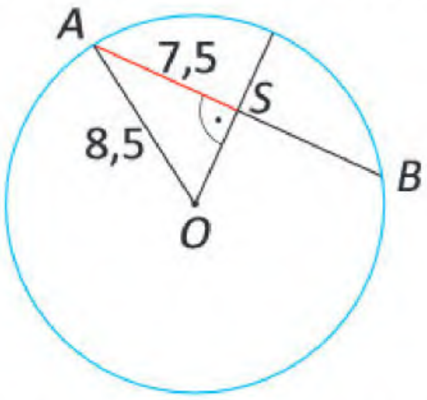


Ćwiczenie 1. Udowodnij twierdzenie 2.

Długość odcinka łączącego środek okręgu ze środkiem cięciwy tego okręgu nazywamy **odległością środka okręgu od cięciwy.**

Przykład 1.

Okrąg ma promień równy 8,5. Wyznaczymy odległość cięciwy *AB* od środka *O* tego okręgu, wiedząc, że jej długość jest równa 15.



Na rysunku obok prowadzimy promień prostopadły do cięciwy *AB*, który przecina tę cięciwę w punkcie *S*. Z twierdzenia 2. wynika, że $|AS| = |BS|$.

Obliczamy:

$|AS| = 7{,}5$

$|OS|^2 = (8{,}5)^2 - (7{,}5)^2 = 16$ – z twierdzenia Pitagorasa

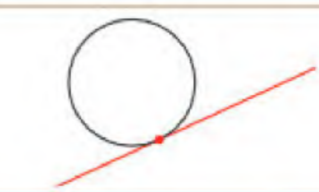
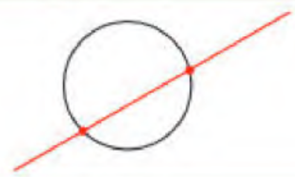
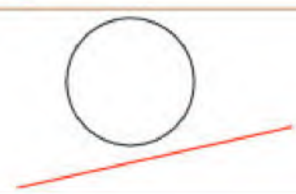
$|OS| = 4$, bo $|OS| > 0$

Odległość cięciwy *AB* od środka okręgu jest równa 4.

Ćwiczenie 2. Okrąg ma długość 20π. Oblicz długość cięciwy tego okręgu, jeśli jej odległość od środka okręgu jest równa 8.

Wzajemne położenie prostej i okręgu

Prosta i okrąg mogą się znajdować w następujących położeniach względem siebie:

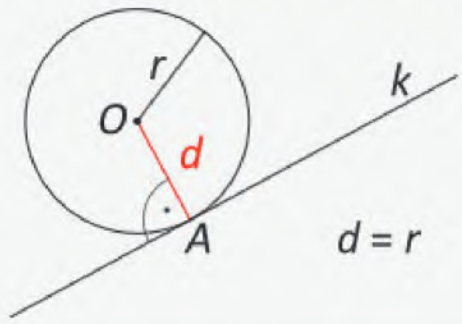
a) Prosta ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem.	
b) Prosta ma dwa punkty wspólne z okręgiem.	
c) Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.	

Definicja 2.

Prostą, która ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem, nazywamy **styczną do okręgu** w tym punkcie. Punkt wspólny prostej i stycznej nazywamy **punktem styczności prostej i okręgu**.

Twierdzenie 3.

Prosta jest styczną do okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy promień poprowadzony do punktu wspólnego prostej i okręgu jest prostopadły do prostej.



Twierdzenie 4.

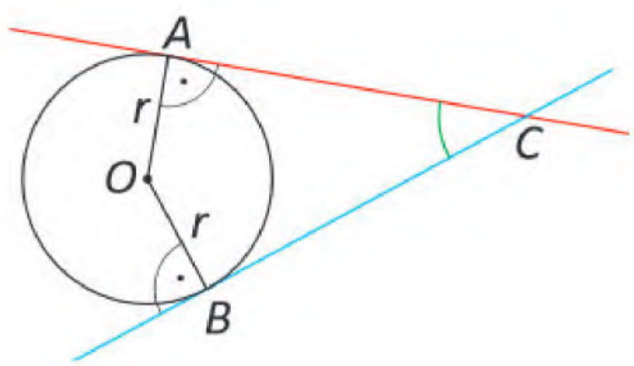
Prosta jest styczną do okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa promieniowi tego okręgu.

Z punktu, którego odległość od środka okręgu jest mniejsza niż promień, nie można poprowadzić żadnej stycznej. Z punktu leżącego na okręgu można poprowadzić jedną styczną do okręgu.

Ćwiczenie 3. Za pomocą cyrkla i linijki skonstruuj styczną do okręgu w danym punkcie A należącym do okręgu o środku O. Pomogą Ci następujące wskazówki:

1. Poprowadź prostą OA.
2. Na prostej OA wyznacz punkt B tak, aby punkt A był środkiem odcinka OB.
3. Poprowadź symetralną odcinka OB. Jest to szukana styczna.
4. Poprawność konstrukcji wynika bezpośrednio z własności symetralnej odcinka i z twierdzenia 3.

Z punktu, którego odległość od środka okręgu jest większa niż promień, można poprowadzić dwie styczne. Konstrukcję tych stycznych poznasz w temacie „Wybrane konstrukcje geometryczne” na str. 218 i 219.



Proste AC i BC są styczne do okręgu $o(O, r)$.

Kąt wypukły ACB nazywamy **kątem, pod którym widać okrąg** $o(O, r)$ z punktu C.

Twierdzenie 5. *O odcinkach stycznych*

Odcinki dwóch stycznych, poprowadzonych do okręgu z punktu, którego odległość od środka okręgu jest większa niż promień – wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności – mają tę samą długość.

Założenie:

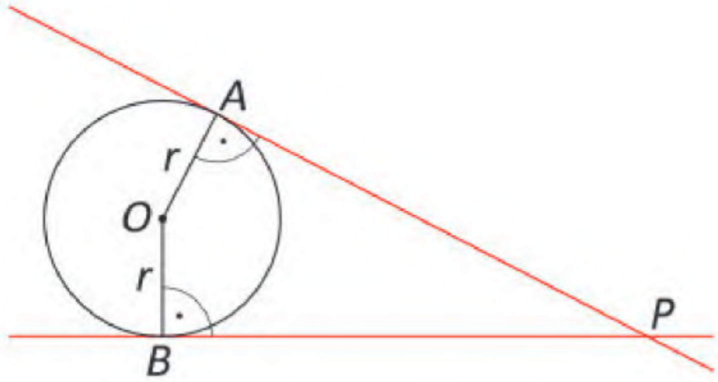
$o(O, r)$ – dany okrąg

$|OP| > r$

PA, PB – styczne do okręgu $o(O, r)$ w punktach A, B

Teza:

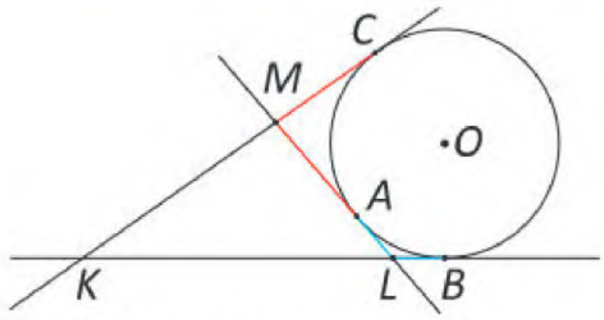
$|AP| = |BP|$



Ćwiczenie 4. Przepisz powyższe twierdzenie do zeszytu i poprowadź na swoim rysunku odcinek OP. Następnie udowodnij to twierdzenie.

Przykład 2.

Proste LM, KL i KM są styczne do okręgu, odpowiednio w punktach A, B, C, jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|KC| = 23$ cm, obliczymy obwód trójkąta KLM.



Stosujemy trzy razy twierdzenie o odcinkach stycznych i otrzymujemy:

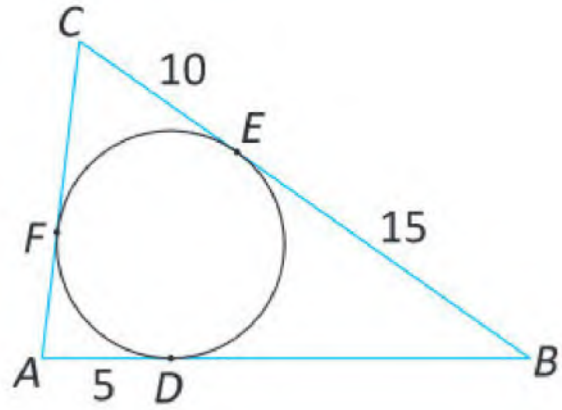
$|KC| = |KB| \qquad |MA| = |MC| \qquad |LA| = |LB|.$

Obliczamy obwód trójkąta KLM:

$$|KL| + |LM| + |KM| = |KL| + |LA| + |MA| + |KM| =$$
$$= |KL| + |LB| + |MC| + |KM| = |KB| + |KC| = 2|KC|.$$
$$2|KC| = 2 \cdot 23 = 46.$$

Obwód trójkąta KLM jest równy 46 cm.

Ćwiczenie 5. Okrąg na rysunku obok jest styczny do każdego boku trójkąta ABC, odpowiednio w punktach D, E, F. Wiedząc, że $|AD| = 5$, $|BE| = 15$ i $|EC| = 10$, wyznacz obwód trójkąta ABC.

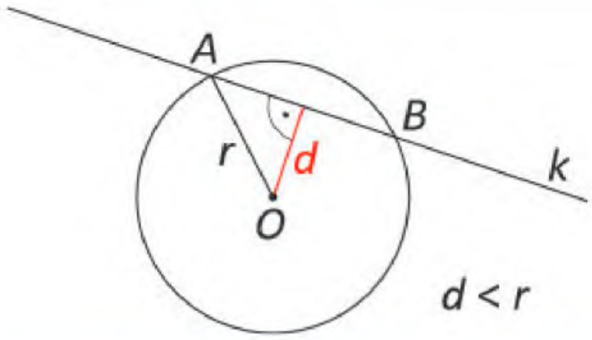


Definicja 3.

Sieczną okręgu nazywamy prostą, która ma dwa punkty wspólne z danym okręgiem.

Twierdzenie 6.

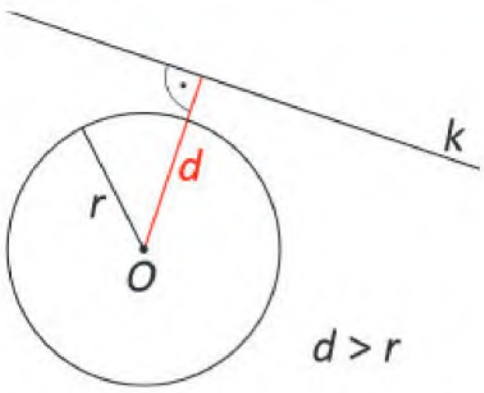
Prosta jest sieczną okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest mniejsza od promienia okręgu.



Prosta jest rozłączna z okręgiem wtedy, gdy nie ma z nim punktów wspólnych.

Twierdzenie 7.

Prosta jest rozłączna z okręgiem wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest większa od promienia okręgu.



Ćwiczenie 6. Dany jest okrąg $o(O,\sqrt{5})$ oraz prosta k, której odległość od punktu O jest równa d. Ustal położenie prostej k względem okręgu o, jeśli:

a) $d = 2{,}5$ b) $d = \pi - 1$ c) $d = 0{,}5\sqrt{20}$

Przykład 3.

Dany jest okrąg o środku O i promieniu a oraz prosta k, której odległość d od punktu O jest równa $12 - 2a$. Wyznaczymy wszystkie wartości a, dla których prosta k jest:

a) styczną do okręgu b) sieczną okręgu c) rozłączna z tym okręgiem.

Aby istniał okrąg $o(O, a)$ i żeby prosta k znajdowała się w odległości $12 - 2a$ od punktu O, muszą być spełnione dwie nierówności:

$r > 0$ i $d \geqslant 0$, stąd mamy:

$a > 0$ i $12 - 2a \geqslant 0$.

Zatem określanie położenia prostej k i okręgu o ma sens tylko wtedy, gdy $a \in (0, 6\rangle$.

Ad a) Prosta k jest styczna do okręgu, jeśli $d = r$. Rozwiązujemy równanie:

$a = 12 - 2a$ i $a \in (0, 6\rangle$

$a = 4$

Prosta k jest styczną do okręgu tylko wtedy, gdy $a = 4$.

Ad b) Prosta k jest sieczną danego okręgu, jeśli $d < r$. Otrzymujemy:

$12 - 2a < a$ i $a \in (0, 6\rangle$

$a > 4$

$a \in (4, +\infty)$ i $a \in (0, 6\rangle$

Częścią wspólną przedziałów $(4, +\infty)$ i $(0, 6\rangle$ jest przedział $(4, 6\rangle$.

Prosta k jest sieczną okręgu tylko wtedy, gdy $a \in (4, 6\rangle$.

Ad c) Prosta k jest rozłączna z okręgiem, jeśli $d > r$. Mamy:

$12 - 2a > a$ i $a \in (0, 6\rangle$

$a < 4$

Zatem $a \in (-\infty, 4) \cap (0, 6\rangle$, czyli $a \in (0, 4)$.

Prosta k jest rozłączna z okręgiem tylko wtedy, gdy $a \in (0, 4)$.

Sprawdź, czy rozumiesz.
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Okrąg podzielono na 6 równych łuków, każdy długości $1{,}5\pi$. Wyznacz promień tego okręgu.

2. Łuk okręgu o promieniu r ma długość l. Wyraź w procentach, z dokładnością do 1%, jaką część okręgu stanowi ten łuk, jeśli:

   a) $r = 5,\ l = 3\pi$ b) $r = 10,\ l = 30$

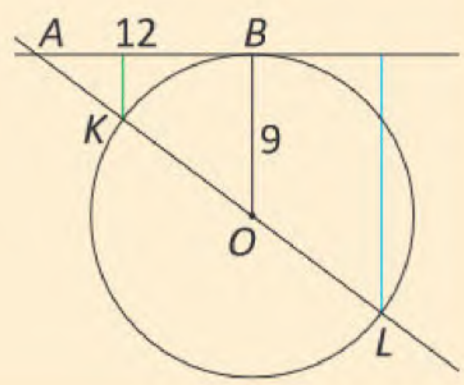
3. Odległość cięciwy AB od środka okręgu jest mniejsza o 2 cm od promienia okręgu. Wyznacz promień, wiedząc, że cięciwa ma długość 12 cm.

4. Cięciwa okręgu ma długość $2\sqrt{3}$ i dzieli promień prostopadły do niej na połowy. Oblicz długość okręgu.

5. Średnica okręgu jest równa $\sqrt{8}$. Ustal, czy prosta k jest sieczną okręgu, styczną do okręgu, czy jest rozłączna z okręgiem, jeśli odległość prostej k od środka okręgu jest równa:

   a) 1 b) $3^{0,5}$ c) $\pi - 2$ d) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6. Na rysunku obok prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o promieniu 9. Z punktu A, odległego od punktu B o 12, poprowadzono sieczną przez środek okręgu, która przecięła okrąg w dwóch punktach: K i L. Wyznacz odległości tych punktów od stycznej AB.

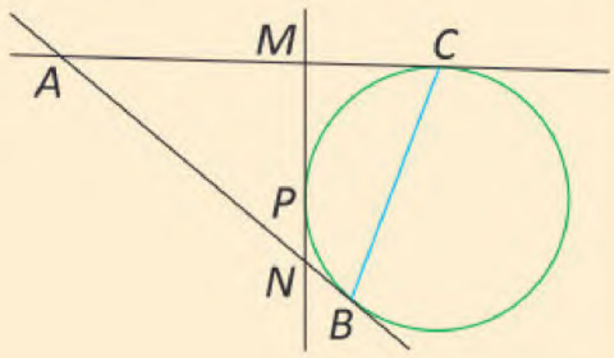


D 7. Odcinki AB i BC są cięciwami okręgu o środku O i promieniu r. Wykaż, że jeśli $|AB| = |BC| = r$, to sieczne AB i OC są równoległe.

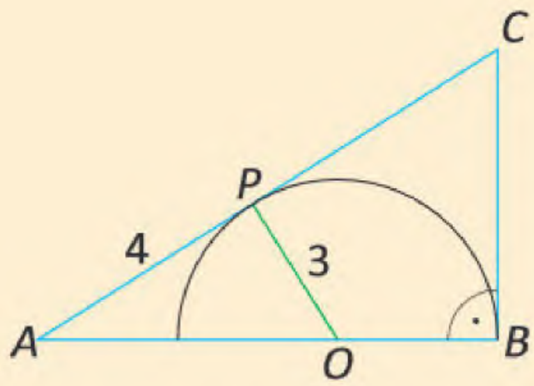
8. Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu wynosi 150°. Pod jakim kątem widać ten okrąg z punktu przecięcia stycznych poprowadzonych z końców tych promieni?

D 9. Z punktu zewnętrznego A poprowadzono styczne AB i AC do okręgu o środku w punkcie O, przy czym punkty B i C to punkty styczności. Wykaż, że jeśli miara kąta między stycznymi równa się mierze kąta zawartego między promieniami poprowadzonymi ze środka okręgu do punktów styczności, to czworokąt $ABOC$ jest kwadratem.

10. Na rysunku obok prosta AB jest styczna do okręgu w punkcie B, prosta AC jest styczna do okręgu w punkcie C i prosta MN jest styczna do okręgu w punkcie P. Wiedząc, że obwód trójkąta ABC jest równy 15 cm, zaś obwód trójkąta ANM jest równy 11 cm, oblicz długość cięciwy BC.



11. Na rysunku obok dany jest trójkąt prostokątny ABC, $|\sphericalangle ABC| = 90°$, oraz półokrąg o środku w punkcie O i promieniu równym 3. Przeciwprostokątna AC zawiera się w stycznej do okręgu w punkcie P. Wiedząc, że $|AP| = 4$, oblicz obwód trójkąta ABC.



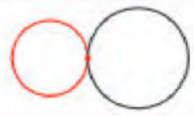
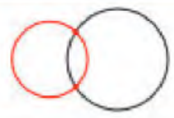
12. Dany jest okrąg o promieniu 3 cm oraz trzy proste k, l, m równoległe do siebie. Prosta k jest sieczną okręgu, prosta l – styczną do okręgu, zaś prosta m jest rozłączna z okręgiem. Odległość między prostymi k, l jest równa 2 cm, a odległość między prostymi k i m wynosi 7 cm. Oblicz odległość prostej m od środka okręgu. Rozważ dwa przypadki położenia prostej m.

13. Dany jest okrąg $o(O, a)$ i prosta k, której odległość od punktu O jest równa $2a - 3$. Wyznacz wzajemne położenie prostej i okręgu w zależności od wartości a.

14. Dany jest okrąg o promieniu $9 + a$ i prosta k, której odległość od środka okręgu jest równa $8 - 2a$. Wyznacz wszystkie wartości a, dla których prosta k ma co najmniej jeden punkt wspólny z okręgiem.

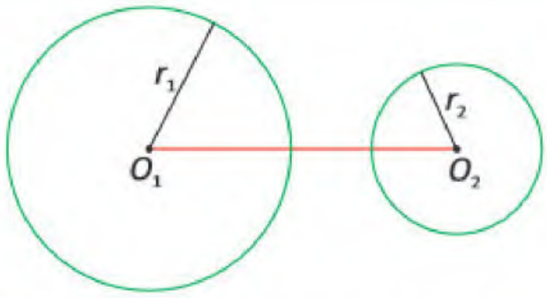
Wzajemne położenie dwóch okręgów

Omówimy wzajemne położenie dwóch okręgów. Dwa okręgi leżące na płaszczyźnie mogą mieć następujące położenie względem siebie:

a) Okręgi są rozłączne zewnętrznie.	
b) Okręgi są styczne zewnętrznie.	
c) Okręgi się przecinają.	
d) Okręgi są styczne wewnętrznie.	
e) Okręgi są rozłączne wewnętrznie.	

Okręgi nazywamy **rozłącznymi zewnętrznie** wtedy, gdy koła wyznaczone przez te okręgi nie mają punktów wspólnych.

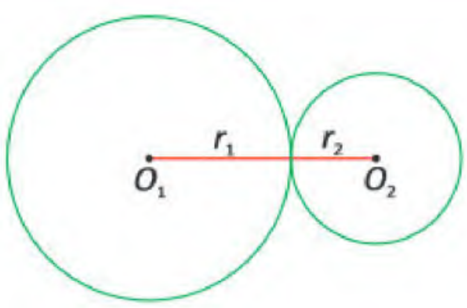
Twierdzenie 1.
Okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$ są rozłączne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|O_1O_2| > r_1 + r_2$.



$|O_1O_2| > r_1 + r_2$

Okręgi nazywamy **stycznymi zewnętrznie** wtedy, gdy koła wyznaczone przez te okręgi mają tylko jeden punkt wspólny.

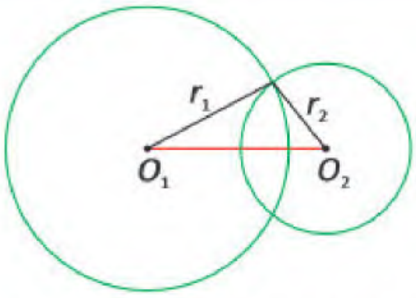
Twierdzenie 2.
Okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$ są styczne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|O_1O_2| = r_1 + r_2$.



$|O_1O_2| = r_1 + r_2$

Okręgi nazywamy **przecinającymi się** wtedy, gdy mają tylko dwa punkty wspólne.

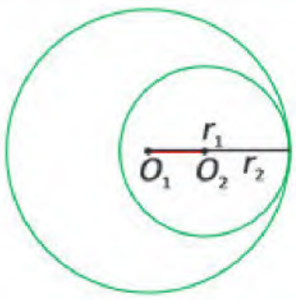
Twierdzenie 3.
Okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$ przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy $|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$.



$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$

Okręgi nazywamy **stycznymi wewnętrznie** wtedy, gdy mają tylko jeden punkt wspólny i jeden z okręgów zawiera się w kole wyznaczonym przez drugi okrąg.

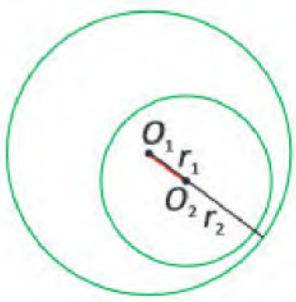
Twierdzenie 4.
Okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$ są styczne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$.



$|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$

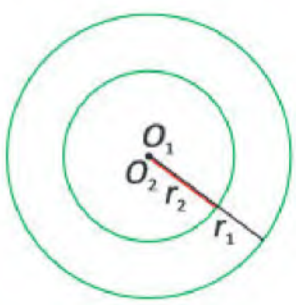
Okręgi nazywamy **rozłącznymi wewnętrznie** wtedy, gdy nie mają punktów wspólnych i jeden okrąg zawiera się w kole wyznaczonym przez drugi okrąg.

Twierdzenie 5.
Okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$ są rozłączne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$.



$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$

Jeśli okręgi mają wspólny środek, to mówimy, że są to **okręgi współśrodkowe**. Okręgi o_1 i o_2 się pokrywają wtedy, gdy są współśrodkowe i mają równe promienie.



Przykład 1.

Ustalimy położenie okręgów $o(A, r_1)$ oraz $o(B, r_2)$ względem siebie jeśli:

a) $|AB| = 1, r_1 = 2, r_2 = 3$ b) $|AB| = 3, r_1 = 4, r_2 = 2.$

Ad a) Zauważamy, że $r_2 - r_1 = 3 - 2 = 1$ oraz $|AB| = 1$. Zatem $|AB| = |r_1 - r_2|$.
Okręgi są styczne wewnętrznie.

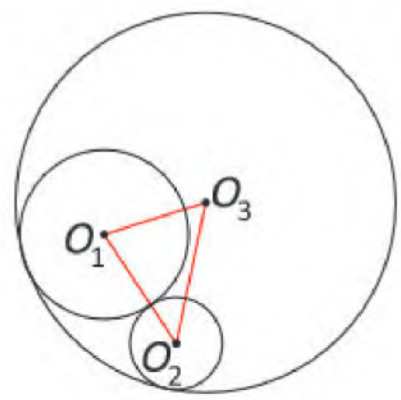
Ad b) Obliczamy sumę i różnicę promieni: $r_1 + r_2 = 6$ oraz $r_1 - r_2 = 2$. Stwierdzamy, że $|r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$.
Okręgi się przecinają.

Ćwiczenie 1. Jak są położone względem siebie okręgi $o(P, r_1)$ oraz $o(Q, r_2)$, jeśli:

a) $|PQ| = \sqrt{12}, r_1 = \sqrt{3} - 1, r_2 = \sqrt{3} + 1$ b) $|PQ| = 1, r_1 = 3, r_2 = 5$?

Przykład 2.

Dwa okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$ są styczne zewnętrznie do siebie i oba są styczne wewnętrznie do okręgu $o(O_3, r_3)$ – jak na rysunku obok. Obwód trójkąta $O_1O_2O_3$ jest równy 14 cm. Obliczymy r_3.



Wyznaczamy długości boków trójkąta $O_1O_2O_3$:

$|O_1O_2| = r_1 + r_2$ – okręgi są styczne zewnętrznie

$|O_1O_3| = r_3 - r_1$ – okręgi są styczne wewnętrznie, $r_3 > r_1$

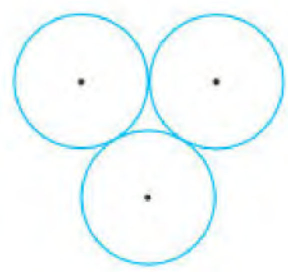
$|O_2O_3| = r_3 - r_2$ – okręgi są styczne wewnętrznie, $r_3 > r_2$

Obliczamy obwód trójkąta $O_1O_2O_3$:

$$|O_1O_2| + |O_2O_3| + |O_1O_3| = (r_1 + r_2) + (r_3 - r_2) + (r_3 - r_1) = 2r_3.$$

Zatem $2r_3 = 14$, stąd $r_3 = 7$.
Największy okrąg ma promień równy 7 cm.

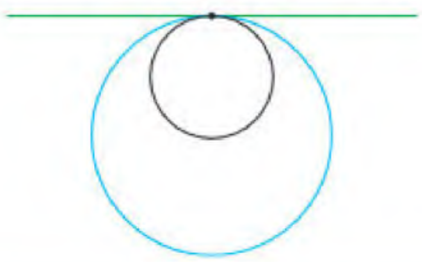
Ćwiczenie 2. Trzy okręgi o promieniu r są parami styczne zewnętrznie, jak na rysunku obok. Odległość środka każdego okręgu od punktu styczności dwóch pozostałych okręgów jest równa 3. Wyznacz ich promienie.



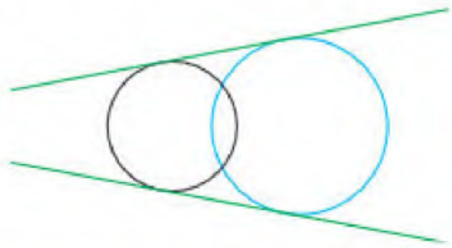
Zastanowimy się teraz, ile wspólnych stycznych można poprowadzić do dwóch okręgów, w zależności od położenia tych okręgów względem siebie.

Jeśli okręgi są rozłączne wewnętrznie, to dowolna styczna mniejszego okręgu jest jednocześnie sieczną większego okręgu. W tym przypadku okręgi nie mają wspólnej stycznej. Pozostałe przypadki są przedstawione na poniższych ilustracjach:

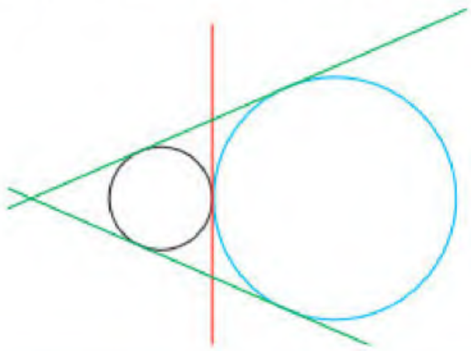
a) Okręgi styczne wewnętrznie mają tylko jedną wspólną styczną.



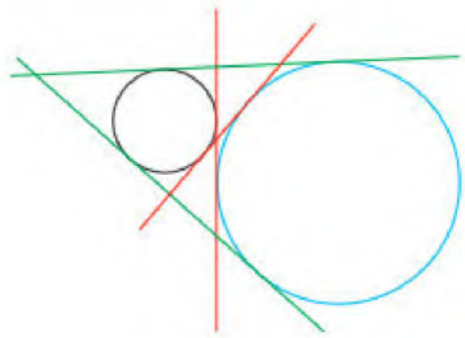
b) Okręgi, które się przecinają, mają dwie wspólne styczne.



c) Okręgi styczne zewnętrznie mają trzy wspólne styczne: dwie zewnętrzne i jedną wewnętrzną.

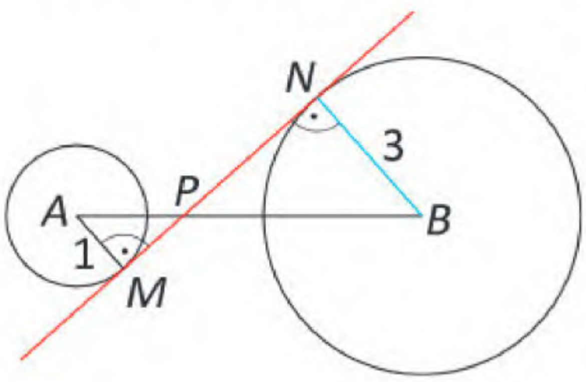


d) Okręgi rozłączne zewnętrznie mają cztery wspólne styczne: dwie zewnętrzne i dwie wewnętrzne



Przykład 3.

Do dwóch okręgów $o(A,\ 1)$ oraz $o(B,\ 3)$ rozłącznych zewnętrznie poprowadzono wspólną styczną wewnętrzną, jak na rysunku poniżej. Wiedząc, że $|AB| = 6$, obliczymy odległość między punktami styczności tej stycznej i danych okręgów.



Niech odcinek AB przecina się ze styczną wewnętrzną dwóch danych okręgów w punkcie P, punkty M i N to odpowiednio punkty styczności tej stycznej z danymi okręgami.

Zauważ, że $|\sphericalangle AMP| = |\sphericalangle BNP| = 90°$, więc promienie AM i BN są równoległe.

Wyznaczamy najpierw długość odcinka PA, korzystając z wniosku z twierdzenia Talesa:

$$\frac{|AM|}{|NB|} = \frac{|PA|}{|PB|}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{1}{3} = \frac{|PA|}{6-|PA|}$$

$$3|PA| = 6 - |PA|, \qquad \text{stąd} \qquad |PA| = 1{,}5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie PAM mamy

$$|PM|^2 = 1{,}5^2 - 1^2, \quad \text{stąd} \quad |PM| = 0{,}5\sqrt{5}.$$

Na koniec obliczamy $|MN|$. Możemy, na przykład, zastosować twierdzenie Talesa:

$$\frac{|MN|}{|PM|} = \frac{|AB|}{|AP|}, \text{ stąd otrzymujemy: } \frac{|MN|}{0{,}5\sqrt{5}} = \frac{6}{1{,}5}, \qquad \text{więc} \qquad |MN| = 2\sqrt{5}.$$

Szukana odległość jest równa $2\sqrt{5}$.

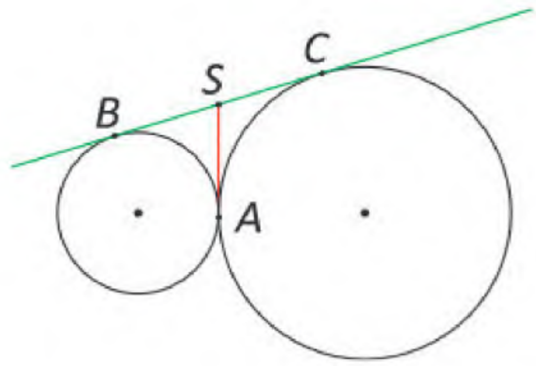
Przykład 4.

Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie w punkcie A oraz styczna zewnętrzna do tych dwóch okręgów, przy czym punkty B i C są punktami styczności stycznej z tymi okręgami. Wykażemy, że środek odcinka BC leży w takiej samej odległości od punktu A, jak od punktów B i C.

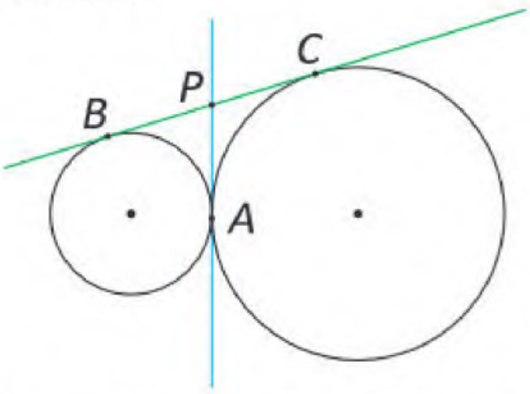
Założenie:

o_1, o_2 – okręgi styczne zewnętrznie w punkcie A
BC – styczna zewnętrzna do okręgów o_1, o_2 w punktach B i C
S – środek odcinka BC, $|BS| = |CS|$

Teza: $|BS| = |AS|$



Dowód:



Przez punkt A prowadzimy styczną wewnętrzną do obu okręgów, która przecina się ze styczną zewnętrzną w punkcie P.
Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że
$|BP| = |AP|$ i $|PC| = |AP|$. W szczególności
$|BP| = |PC|$.

Zatem punkt S pokrywa się z punktem P, więc prawdziwa jest równość:
$|BS| = |SC| = |AS|$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 3. Czy kąt BAC na rysunku powyżej jest prosty? Odpowiedź uzasadnij.

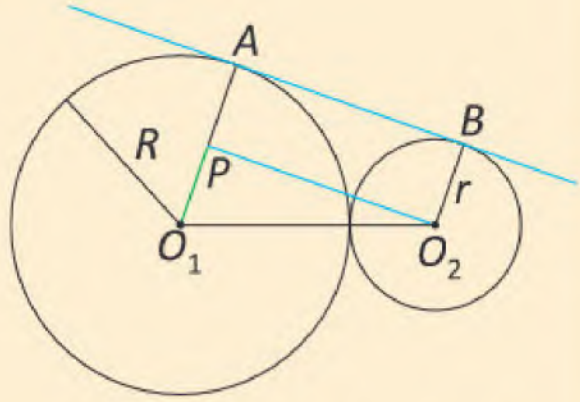
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Określ wzajemne położenie okręgów $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$, jeśli $|AB| = 10$ cm oraz dane są promienie r_1 i r_2.
   a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 6$ cm
   b) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 5$ cm
   c) $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 5$ cm
   d) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 14$ cm
   e) $r_1 = 13$ cm, $r_2 = 3$ cm
   f) $r_1 = (10 + \sqrt{5})$ cm, $r_2 = (10 - \sqrt{5})$ cm
2. Dane są dwa okręgi współśrodkowe $o_1(O, R)$ oraz $o_2(O, r)$, gdzie $R > r$. Wiedząc, że $R^2 - r^2 = 9$, oblicz długość cięciwy okręgu o_1 wyznaczonej przez styczną do okręgu o_2.
3. Dane są dwa okręgi o promieniach R i r, gdzie $R > r$. Gdyby te okręgi były styczne zewnętrznie, to odległość między ich środkami byłaby równa 11 cm. Gdyby te okręgi były styczne wewnętrznie, to odległość między ich środkami wynosiłaby 3 cm. Oblicz promienie R i r.
4. Dwa okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$ są styczne zewnętrznie do siebie i oba są styczne wewnętrznie do okręgu $o(O_3, r_3)$, jak w przykładzie 2. Wiedząc, że $|O_1O_2| = 7$ cm, $|O_2O_3| = 6$ cm i $|O_1O_3| = 5$ cm, oblicz r_1, r_2, r_3.

5. Dwa okręgi o środkach A, B mają równe promienie. Wiadomo, że środek każdego z tych okręgów należy do drugiego okręgu. Co można powiedzieć o trójkącie, którego wierzchołkami są punkty A, B oraz jeden z punktów wspólnych tych okręgów? Odpowiedź uzasadnij.

D 6. Dane są dwa okręgi o środkach A i B, styczne zewnętrznie w punkcie P. Wspólna styczna zewnętrzna tych okręgów wyznacza punkty C i D. Wykaż, że jeśli punkt S jest środkiem odcinka CD, to $|\sphericalangle ASB| = 90°$.

7. Okręgi $o(O_1, R)$ oraz $o(O_2, r)$ na rysunku obok są styczne zewnętrznie oraz $R > r$. Punkty A i B są punktami styczności wspólnej stycznej do tych okręgów. Na promieniu O_1A zaznaczono punkt P w taki sposób, że odcinek PO_2 jest równoległy do prostej AB. Wiedząc, że $|PO_1| = 5$ cm i $|PO_2| = 12$ cm, oblicz R i r.



D 8. Dany jest okrąg $o_1(A, 8)$. Punkt B znajduje się w odległości 17 od środka tego okręgu. Kreślimy okrąg o_2 o środku w punkcie B i promieniu 15, który przecina się z okręgiem o_1 w punktach K i L. Wykaż, że proste BK i BL są stycznymi do okręgu o_1. Czy proste AK i AL są styczne do okręgu o_2?

9. Dane są dwa okręgi $o(O_1, a)$ i $o(O_2, 5 - 0{,}5a)$ oraz odległość między środkami tych okręgów: $|O_1O_2| = 7$. Wyznacz wartość a, dla której te okręgi są:
a) styczne zewnętrznie b) styczne wewnętrznie.
Dla wyznaczonej wartości a podaj promień mniejszego okręgu.

10. Dane są dwa okręgi: $o_1(A, 2)$ oraz $o_2(B, 1 - m)$. Odległość między środkami tych okręgów jest równa 5. Wyznacz wartość m, dla której okręgi mają tylko jeden punkt wspólny. Dla wyznaczonej wartości m, oblicz promień okręgu o_2 i narysuj te okręgi.

11 Dane są dwa okręgi $o(O_1, 4 - a)$ i $o(O_2, 4 + a)$ oraz $|O_1O_2| = 3 - a$.
a) Określ położenie tych okręgów w przypadku, jeśli $a = 1$ oraz $a = -2$.
D b) Wykaż, że nie istnieje wartość a, dla której te okręgi byłyby rozłączne zewnętrznie.

12. Dane są dwa okręgi $o(O_1, 8 - a)$ i $o(O_2, 2a - 1)$. Wiedząc, że $|O_1O_2| = 3$, wyznacz wszystkie wartości a, dla których te okręgi mają co najmniej jeden punkt wspólny.

13. Dane są dwa okręgi $o(O_1, 2a)$ i $o(O_2, 1 + a)$, gdzie $a > 0$. Wiedząc, że $|O_1O_2| = 16$, ustal wzajemne położenie tych okręgów w zależności od wartości a.

14. Dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach 5 cm i 12 cm są rozłączne zewnętrznie. Styczna wewnętrzna tych okręgów przecina odcinek O_1O_2 w punkcie P. Wiedząc, że odległość punktu P od punktu O_1 jest o 9 cm mniejsza niż odległość punktu P od punktu O_2, oblicz $|O_1O_2|$.

Koła i kąty

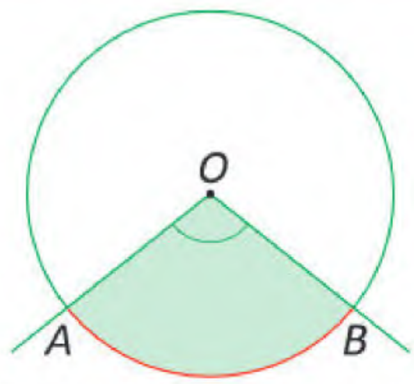
Definicja 1.

Kołem o środku w punkcie O i promieniu r, $r > 0$, nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza od r lub równa r. Takie koło oznaczamy symbolem $k(O, r)$.

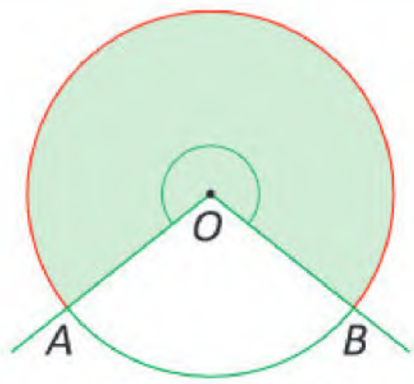
W kole możemy zaznaczać kąty środkowe.

Definicja 2.

Kątem środkowym koła nazywamy kąt, którego wierzchołek znajduje się w środku koła.



kąt środkowy wypukły



kąt środkowy wklęsły

W dalszych rozważaniach będziemy uwzględniać tylko części wspólne kątów środkowych z kołem. Na rysunkach powyżej są one zaznaczone kolorem zielonym.

Częścią wspólną kąta środkowego i okręgu koła jest łuk. Mówimy, że dany kąt środkowy opiera się na tym łuku. Na rysunku powyżej kąt środkowy AOB jest oparty na łuku AB zaznaczonym kolorem czerwonym.

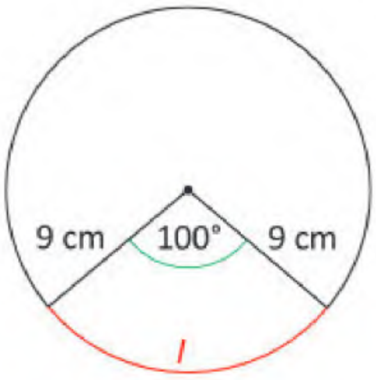
Miara kąta środkowego jest wprost proporcjonalna do długości łuku, na którym oparty jest ten kąt. To znaczy, że tyle razy kąt środkowy jest mniejszy od kąta pełnego, ile razy odpowiadający mu łuk jest krótszy od okręgu.

Jeśli α jest miarą kąta środkowego koła o promieniu r, natomiast l jest długością łuku, na którym ten kąt jest oparty, to prawdziwa jest równość:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{l}{2\pi r}.$$

Przykład 1.

Obliczymy, z dokładnością do 1 mm, długość łuku okręgu o promieniu 9 cm, na którym oparty jest kąt środkowy równy 100°.



Niech l oznacza szukaną długość łuku. Na podstawie wzoru podanego wyżej otrzymujemy:

$$\frac{100^\circ}{360^\circ}=\frac{l}{2\pi\cdot 9},\quad \text{stąd}$$

$$\frac{l}{18\pi}=\frac{5}{18}$$

$l=5\pi$ stąd $l\approx 5\cdot 3{,}1415$, czyli $l\approx 15{,}7075$

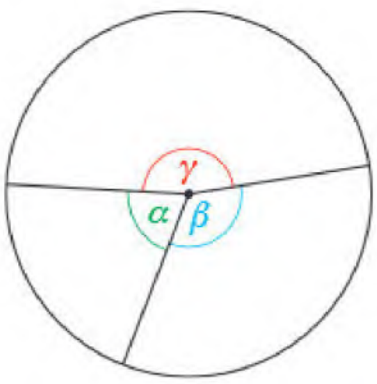
$l\approx 15{,}7$

Długość łuku jest równa 15,7 cm.

Ćwiczenie 1. Kąt środkowy koła o promieniu 2 jest oparty na łuku długości $\frac{\pi}{2}$. Ile stopni ma ten kąt?

Przykład 2.

Trzy punkty podzieliły okrąg na trzy łuki, których długości pozostają w stosunku 3 : 5 : 7. Obliczymy miary kątów środkowych opartych na tych łukach.



Niech α, β, γ oznaczają miary kątów środkowych opartych na tych łukach. Wówczas, tak jak w przypadku łuków, mamy:

$$\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 7.$$

Miary kątów α, β, γ można przedstawić jako $3x$, $5x$, $7x$, gdzie x jest miarą pewnego kąta. Suma kątów α, β, γ jest kątem pełnym, stąd

$$3x + 5x + 7x = 360^\circ, \text{ czyli } x = 24^\circ.$$

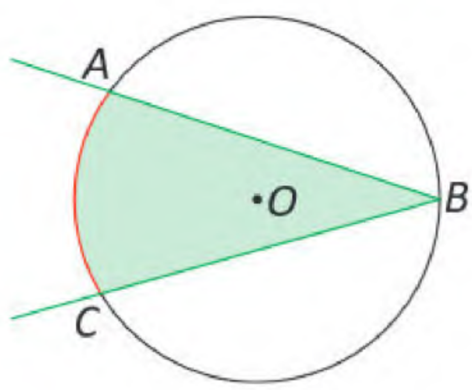
Kąty środkowe mają miary: $\alpha = 72^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 168^\circ$.

Definicja 3.

Kątem wpisanym w koło nazywamy kąt wypukły, wyznaczony przez dwie cięciwy o wspólnym końcu, będącym wierzchołkiem kąta.

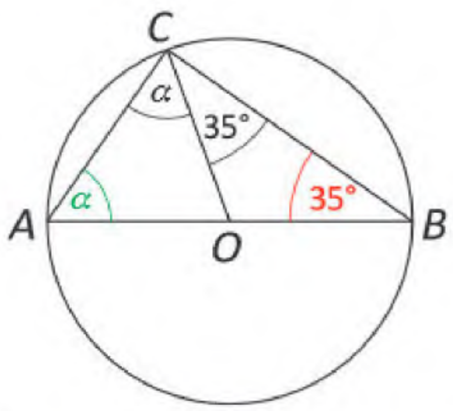
Na rysunku obok kąt *ABC* wpisany w koło o środku *O* jest oparty na łuku *AC*, zaznaczonym kolorem czerwonym.

Wskaż na rysunku obok łuki, na których oparte są kąty wpisane *BAC* i *ACB*.



Przykład 3.

Średnica *AB* i cięciwa *BC* okręgu o środku *O* wyznaczają kąt wpisany *ABC*, równy 35°. Ile stopni ma kąt wpisany *BAC*, a ile kąt wpisany *ACB*?



Niech $|\sphericalangle BAC| = \alpha$. Prowadzimy promień *OC*.

Trójkąty *AOC* i *OBC* są równoramienne, zatem

$|\sphericalangle OCB| = |\sphericalangle OBC| = 35°$ oraz

$|\sphericalangle CAO| = |\sphericalangle ACO| = \alpha$.

Suma kątów w trójkącie *ABC* jest równa 180°, czyli

$\alpha + (\alpha + 35°) + 35° = 180°$

$\alpha = 55°$ $\quad$ $55° + 35° = 90°$

Kąt *BAC* ma miarę 55°, a kąt *ACB* ma miarę 90°.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.
Jeżeli kąt wpisany i kąt środkowy są oparte na tym samym łuku, to kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego.

Dowód tego twierdzenia składa się z trzech części.

I przypadek

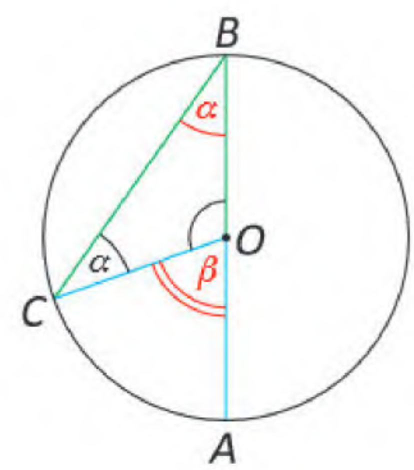
Założenie:

Środek *O* koła należy do cięciwy *AB*, jak na rysunku obok.

$|\sphericalangle CBA| = \alpha,$

$|\sphericalangle COA| = \beta$

Teza: $\beta = 2\alpha$



Dowód:

$|BO| = |OC|$, więc trójkąt *BCO* jest równoramienny. Zatem:

$|\sphericalangle CBO| = |\sphericalangle BCO| = \alpha,$ stąd

$|\sphericalangle COB| = 180° - 2\alpha.$

Kąt *COA* jest przyległy do kąta *COB*, stąd

$|\sphericalangle COA| + |\sphericalangle COB| = 180°$

Obliczamy β:

$\beta = |\sphericalangle COA| = 180° - |\sphericalangle COB| = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha.$

<u>II przypadek</u>

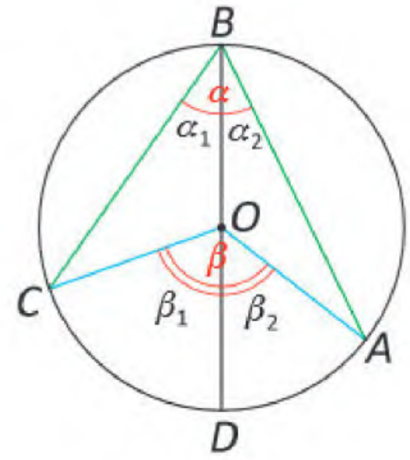
Założenie:

Środek O koła leży wewnątrz kąta CBA, jak na rysunku obok.

$$|\sphericalangle CBA| = \alpha,\ |\sphericalangle COA| = \beta$$

BD – średnica koła dzieląca oba kąty

$$|\sphericalangle CBD| = \alpha_1\ |\sphericalangle DBA| = \alpha_2$$
$$|\sphericalangle COD| = \beta_1\ |\sphericalangle DOA| = \beta_2$$



Teza: $\beta = 2\alpha$

Dowód:

Na podstawie przypadku I otrzymujemy:

$\beta_1 = 2\alpha_1$ – kąty COD i CBD oparte na łuku CD

$\beta_2 = 2\alpha_2$ – kąty DOA i DBA oparte na łuku DA

$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha.$

<u>III przypadek</u>

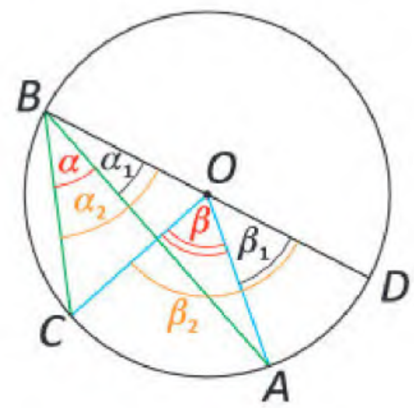
Założenie:

Środek O koła nie należy do kąta CBA

$$|\sphericalangle CBA| = \alpha,\ |\sphericalangle COA| = \beta$$

BD – średnica koła

$$|\sphericalangle ABD| = \alpha_1\quad |\sphericalangle CBD| = \alpha_2$$
$$|\sphericalangle AOD| = \beta_1\quad |\sphericalangle COD| = \beta_2$$



Teza: $\beta = 2\alpha$

Dowód:

Z przypadku I otrzymujemy:

$\beta_1 = 2\alpha_1$ – kąty AOD i ABD oparte na łuku AD

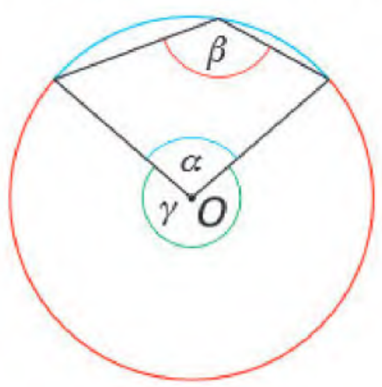
$\beta_2 = 2\alpha_2$ – kąty COD i CBD oparte na łuku CD

$\beta = \beta_2 - \beta_1 = 2(\alpha_2 - \alpha_1) = 2\alpha$

Rozpatrzyliśmy wszystkie możliwe przypadki, więc twierdzenie zostało udowodnione.

Przykład 4.

Kąt środkowy α na rysunku poniżej ma miarę 100°. Wyznaczymy kąt wpisany β.



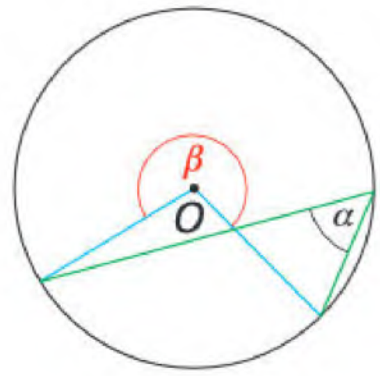
Kąt α jest kątem środkowym, opartym na łuku zaznaczonym kolorem niebieskim. Kąt β jest kątem wpisanym w koło, opartym na łuku w kolorze czerwonym. Również na łuku czerwonym jest oparty kąt środkowy γ.

Z twierdzenia 1. wynika, że $\gamma = 2\beta$. Obliczamy:

$$\gamma = 360° - \alpha = 360° - 100° = 260° \qquad \beta = \frac{1}{2}\gamma = 130°$$

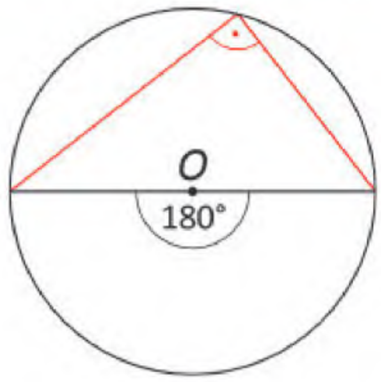
Kąt wpisany β ma miarę 130°.

Ćwiczenie 2. Na rysunku obok kąt wpisany α ma 52°. Ile stopni ma kąt środkowy β?

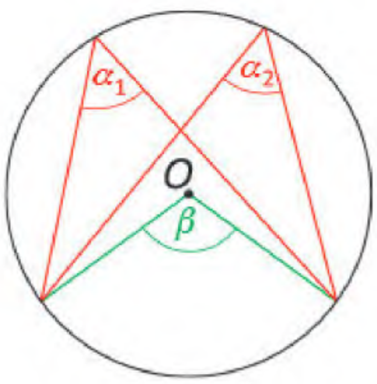


Ćwiczenie 3. Zastanów się, jaką miarę ma kąt środkowy oparty na półokręgu. Ile stopni ma wówczas kąt wpisany oparty na tym samym łuku?

Twierdzenie 2.
Kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.



Przyjrzyjmy się teraz dwóm kątom wpisanym, opartym na tym samym łuku.



Z twierdzenia 1. wynika, że

$$\beta = 2\alpha_1 \quad \text{oraz} \quad \beta = 2\alpha_2,$$

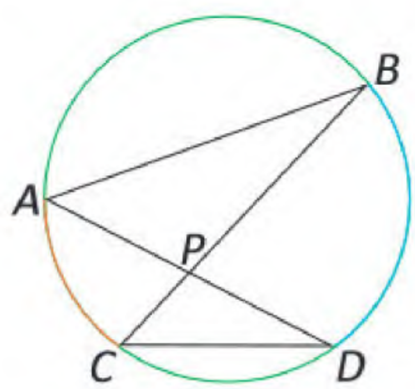
zatem

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie:

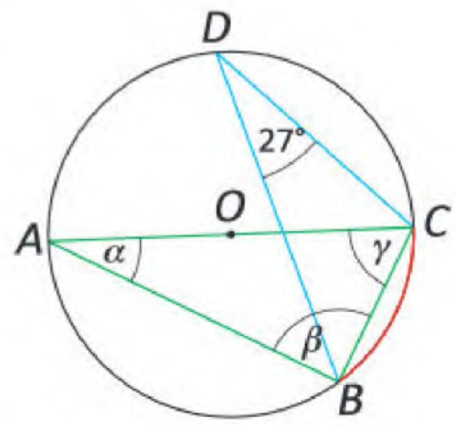
Twierdzenie 3.
Kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, są równe.

Ćwiczenie 4. Na rysunku obok wskaż kąty wpisane oparte na łuku *AC*, a następnie kąty wpisane, oparte na łuku *BD*. Czy trójkąty *APB* i *CDP* są podobne?



Przykład 5.

Na rysunku obok punkty A, B, C, D należą do okręgu o środku w punkcie O, cięciwa AC jest średnicą tego okręgu. Wyznaczymy kąty α, β, γ w trójkącie ABC, wiedząc, że $|\sphericalangle BDC| = 27^\circ$.



Kąty BAC i BDC to kąty wpisane, oparte na tym samym łuku BC okręgu, zaznaczonym kolorem czerwonym. Z twierdzenia 3. wynika, że

$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$, stąd
$\alpha = 27^\circ$.

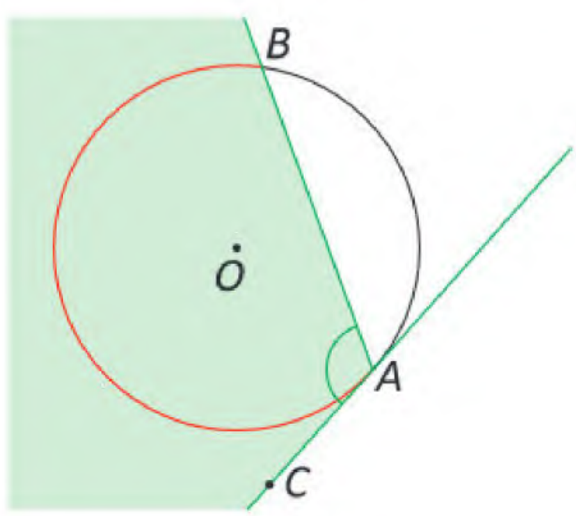
Kąt wpisany ABC jest oparty na półokręgu. Z twierdzenia 2. mamy:

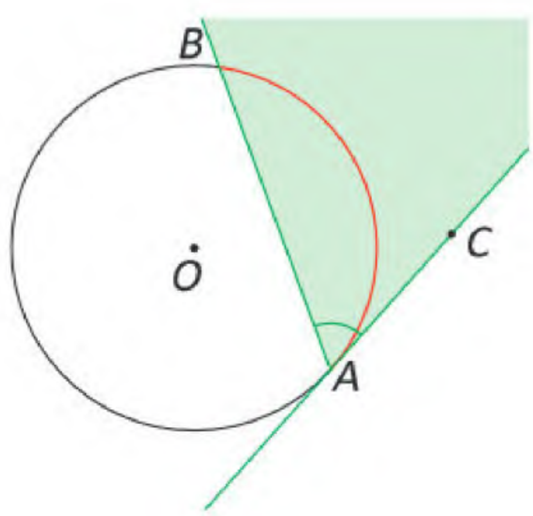
$\beta = 90^\circ$, więc
$\gamma = 90^\circ - \alpha$, czyli
$\gamma = 63^\circ$.

Kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe: 27°, 90°, 63°.

Definicja 4.

Kątem dopisanym do okręgu w punkcie A należącym do okręgu nazywamy kąt wypukły, wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie A oraz półprostą zawierającą cięciwę o końcu w punkcie A.





Częścią wspólną kąta dopisanego i okręgu jest łuk. Mówimy, że kąt dopisany jest oparty na tym łuku.

Twierdzenie 4.

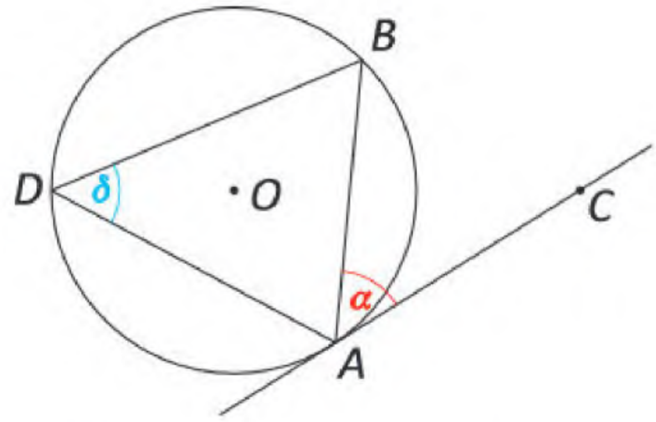
Kąty dopisany i wpisany, oparte na tym samym łuku, są równe.

Założenie:

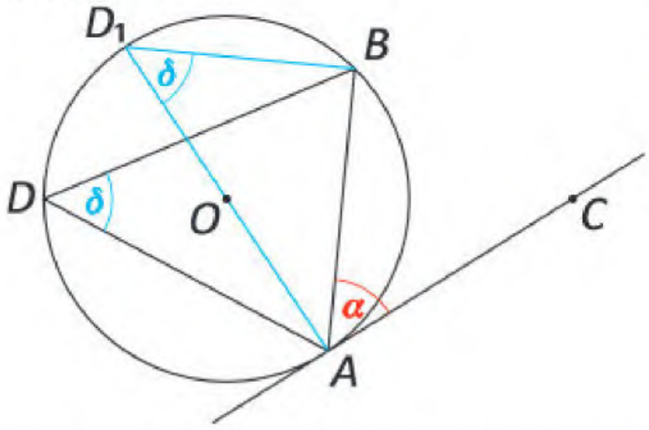
Kąt CAB – kąt dopisany, oparty na łuku AB, równy α

Kąt ADB – kąt wpisany, oparty na łuku AB, równy δ

Teza: $\alpha = \delta$



Dowód:



Znajdujemy kąt wpisany AD_1B taki, że odcinek AD_1 jest średnicą okręgu. Kąt AD_1B jest oparty na tym samym łuku, co kąt ADB. Wyznaczamy kąty trójkąta AD_1B:

$|\sphericalangle AD_1B| = \delta$ – z twierdzenia 3.

$|\sphericalangle D_1BA| = 90^\circ$ – z twierdzenia 2.

$|\sphericalangle BAD_1| = 90^\circ - \delta$ – z własności sumy kątów w trójkącie

Prosta AC jest styczna do okręgu w punkcie A, więc

$|\sphericalangle D_1AC| = 90^\circ$.

Otrzymujemy:

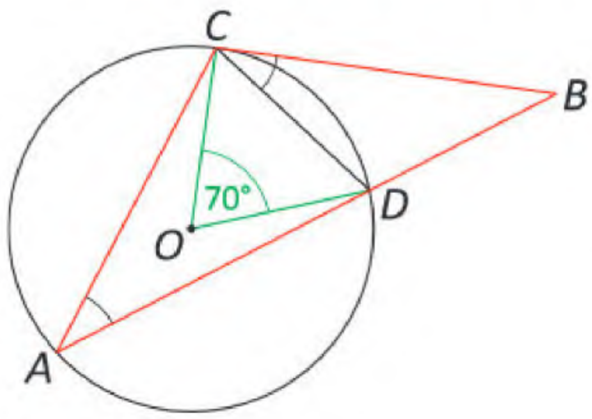
$|\sphericalangle BAD_1| + \alpha = 90^\circ$, czyli $90^\circ - \delta + \alpha = 90^\circ$,

zatem

$\alpha = \delta$, co kończy dowód.

Przykład 6.

Na rysunku poniżej prosta BC jest styczna do okręgu w punkcie C, $|\sphericalangle DOC| = 70^\circ$ oraz $|CD| = |DB|$. Obliczymy miary kątów trójkąta ABC.



Kąt DAC jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy DOC, więc

$$|\sphericalangle DAC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle DOC|$$ – z twierdzenia 1.

Kąt BCD jest kątem dopisanym, opartym na tym samym łuku co kąt wpisany DAC, więc

$|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DAC|$ – z twierdzenia 4.

Obliczamy:

$$|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCB| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle DOC| = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$$

Z założenia wiemy, że $|CD| = |DB|$. Trójkąt DBC jest równoramienny, stąd

$|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle BCD| = 35^\circ$

Na koniec wyznaczamy trzeci kąt w trójkącie ABC:

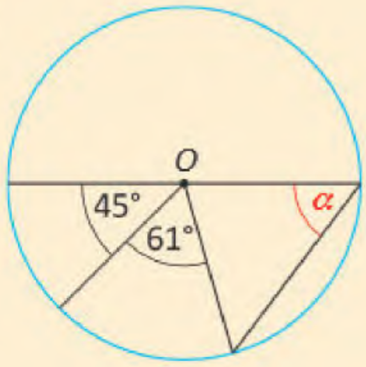
$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - (|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CBA|)$

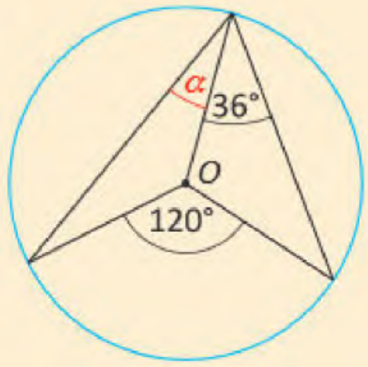
$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - (35^\circ + 35^\circ) = 110^\circ$

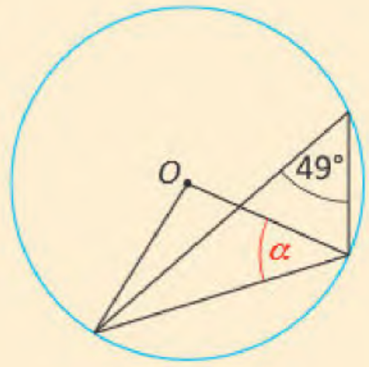
Kąty trójkąta ABC są równe odpowiednio: 35°, 35°, 110°.

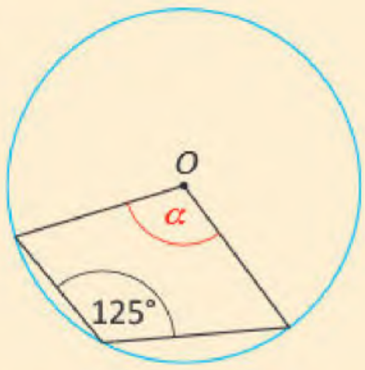
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

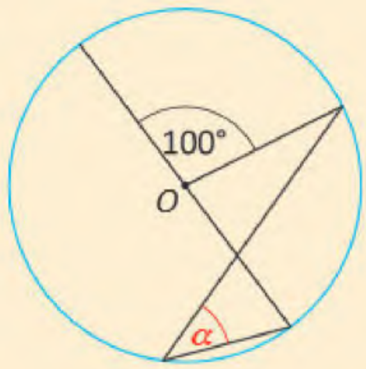
1. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Korzystając z danych na rysunku poniżej, wyznacz kąt α.

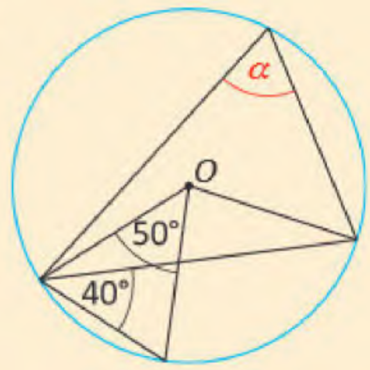
a)


b)


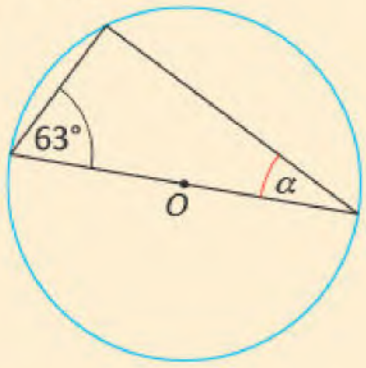
c)


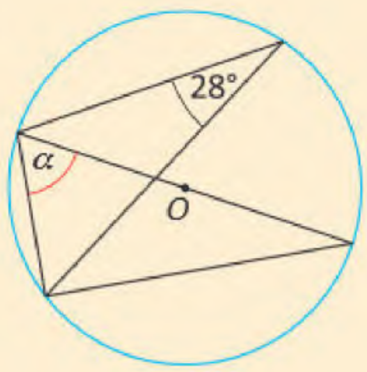
d)


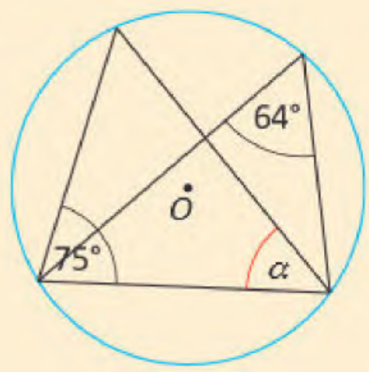
e)


f)


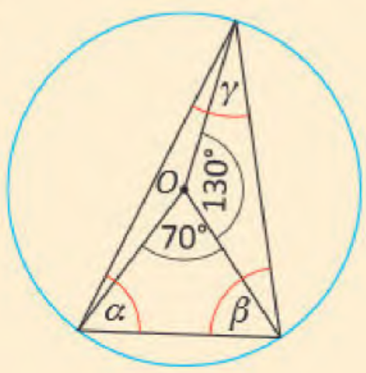
2. Punkt O jest środkiem okręgu. Korzystając z danych na rysunku poniżej, wyznacz kąt α.

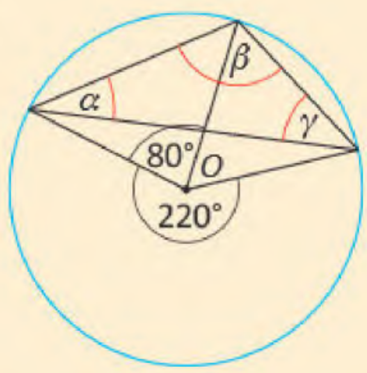
a)


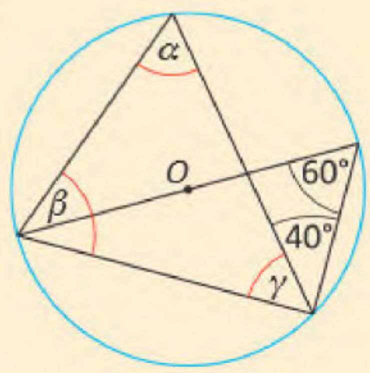
b)


c)


3. Wyznacz kąty α, β, γ:

a)


b)


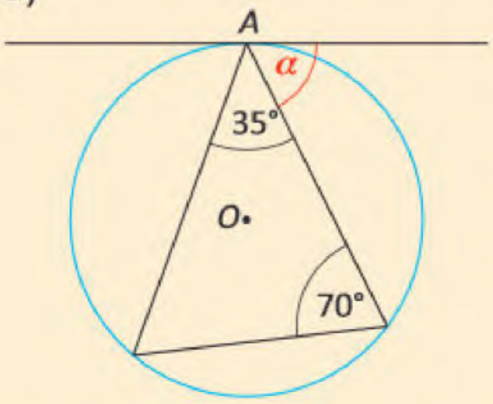
c)


4. Jaką część okręgu stanowi łuk, na którym jest oparty:
   a) kąt wpisany równy 60°
   b) kąt wpisany równy 100°?

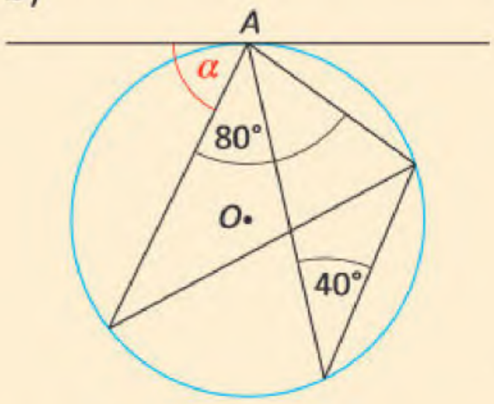
5. Punkty A, B, C dzielą okrąg na trzy łuki, których stosunek długości jest równy $2:3:4$. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

6. Wyznacz kąt α dopisany do okręgu w punkcie A:

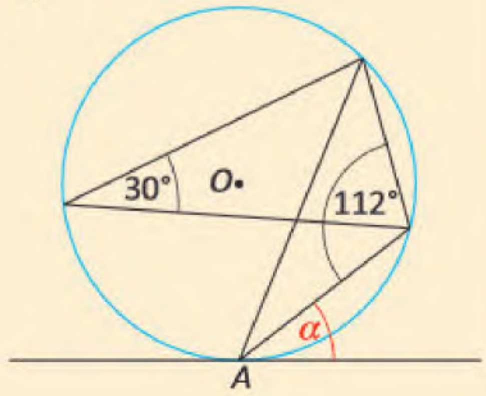
a)



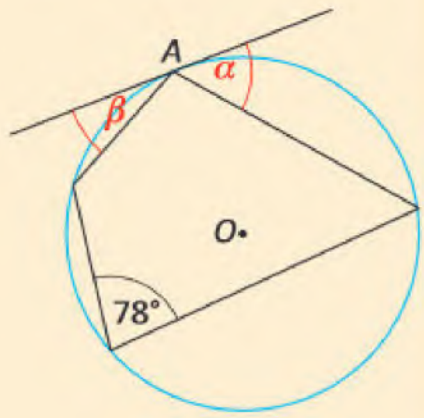
b)



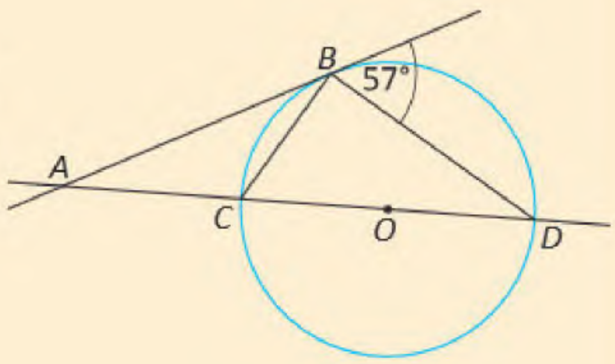
c)



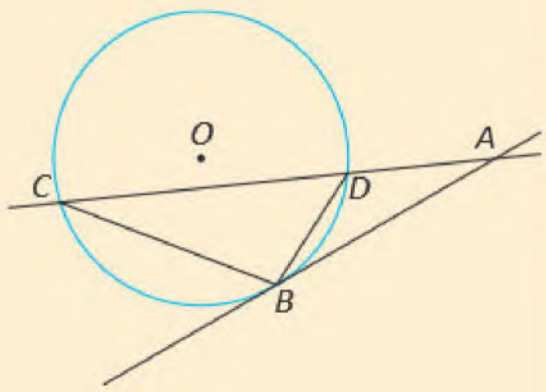
7. Punkt O jest środkiem okręgu. Korzystając z danych na rysunku obok, wyznacz kąty α i β dopisane do okręgu w punkcie A, jeśli $\alpha = 2\beta$.



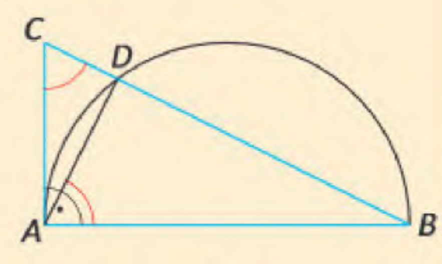
8. Na rysunku obok dany jest okrąg o środku O, styczna AB do okręgu w punkcie B i kąt dopisany równy 57°. Wyznacz kąty trójkątów ACB i BCD.



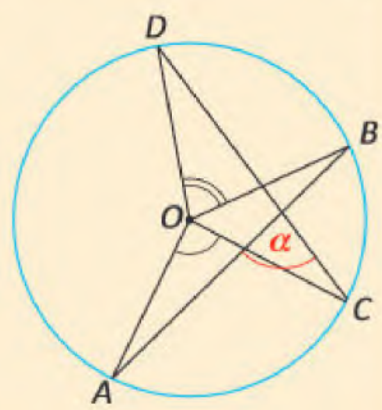
9. Na rysunku obok prosta AB jest styczna do okręgu w punkcie B. Wykaż, że jeśli $|BD| = |DA|$, to $|CB| = |BA|$.



10. W trójkącie prostokątnym ABC na przyprostokątnej AB zbudowano półokrąg, który przeciął przeciwprostokątną CB w punkcie D. Wykaż, że $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ACB|$.



11. Cięciwy AB i CD okręgu o środku w punkcie O przecinają się pod kątem ostrym α. Wykaż, że jeśli wypukłe kąty środkowe DOB i AOC są równe odpowiednio β i γ, to $\alpha = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$.

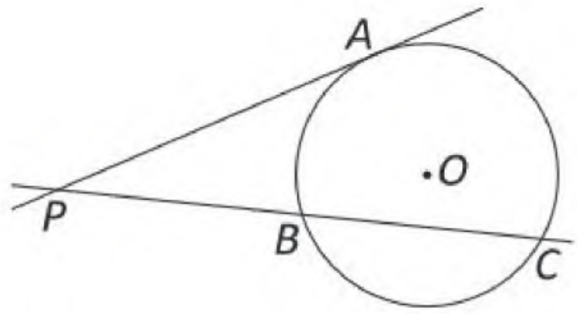


Twierdzenie o stycznej i siecznej

Twierdzenie 1. Twierdzenie o stycznej i siecznej
Jeżeli przez punkt P, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, poprowadzimy styczną do okręgu w punkcie A i sieczną przecinającą okrąg w punktach B i C, to $|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$.

Założenie:

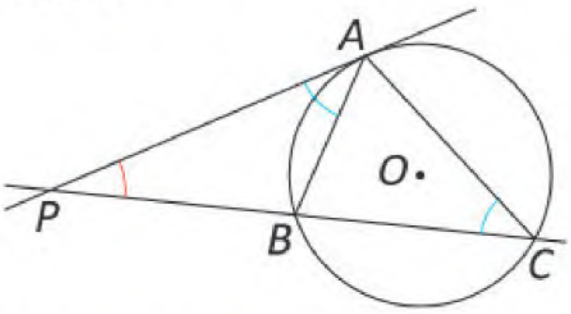
Dany jest okrąg $o(O, r)$ i punkt P, $|OP| > r$.
pr. PA – styczna do okręgu o w punkcie A
B, C – punkty wspólne okręgu i siecznej



Teza:

$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$

Dowód:



Rozważmy dwa trójkąty APB i APC:

$|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ – kąt wpisany BCA i kąt dopisany PAB oparte na tym samym łuku są równe

Kąt BPA jest wspólnym kątem trójkątów APB i APC

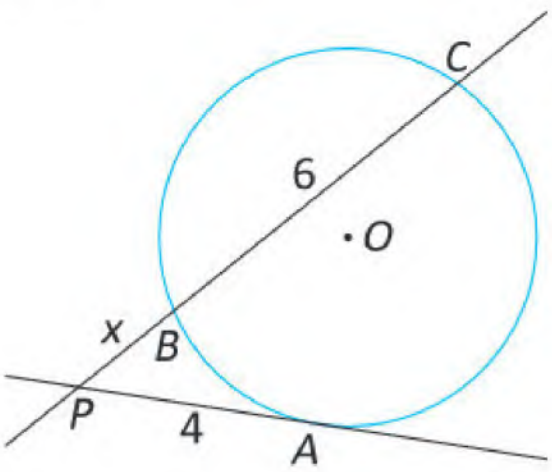
Na mocy cechy (kkk) podobieństwa trójkątów mamy:

$\Delta APB \sim \Delta APC$. Zatem

$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|}$, stąd $|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$, co kończy dowód.

Przykład 1.

Z punktu P poprowadzono sieczną, przecinającą dany okrąg kolejno w punktach B i C oraz styczną do okręgu w punkcie A. Wiedząc, że $|PA| = 4$ oraz $|BC| = 6$, obliczymy $|PB|$.



Niech $|PB| = x$, $x > 0$.

Z twierdzenia 1. otrzymujemy:

$|PB| \cdot |PC| = |PA|^2$

$x \cdot (x+6) = 4^2$

$x^2 + 6x = 16 \quad / +9$

$x^2 + 6x + 9 = 25$ – stosujemy wzór na kwadrat sumy

$(x+3)^2 = 25$, stąd

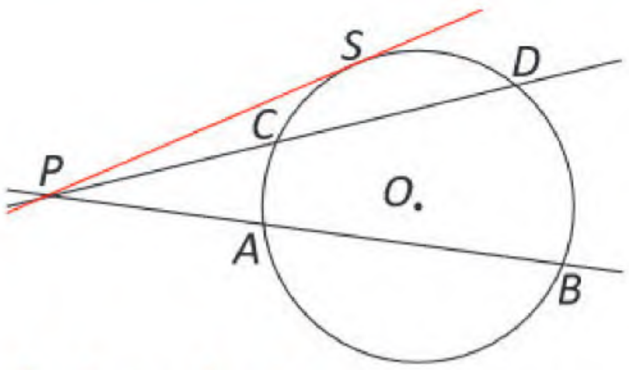
$x + 3 = 5$ lub $x + 3 = -5$

$x = 2$ lub $x = -8$ Odrzucamy rozwiązanie ujemne.

Długość odcinka PB jest równa 2.

Ćwiczenie 1. Przez punkt P poprowadzono styczną i sieczną do okręgu jak w przykładzie 1. Wyznacz $|PA|$, jeśli $|PB| = 8$, $|BC| = 2$.

Twierdzenie 2. Twierdzenie o siecznych
Jeśli dwie proste przecinają okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D, a także przecinają się w punkcie P, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, to $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.



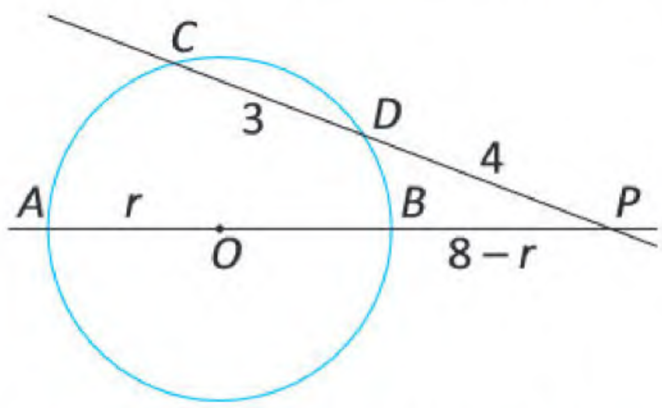
Zauważ, że twierdzenie 2. jest prostym wnioskiem z twierdzenia 1. Jeżeli poprowadzimy przez punkt P styczną do okręgu w punkcie S, to mamy dwie równości

$|PS|^2 = |PA| \cdot |PB|$ oraz $|PS|^2 = |PC| \cdot |PD|$,
a to znaczy, że $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

Ćwiczenie 2. Udowodnij twierdzenie 2., korzystając z podobieństwa trójkątów PBC i PAD.

Przykład 2.

Punkt P jest oddalony od środka okręgu $o(O, r)$ o 8, gdzie $r < 8$. Z punktu P poprowadzono dwie sieczne: jedną zawierającą średnicę okręgu AB oraz sieczną CD. Wiedząc, że $|CD| = 3$ i $|CP| = 7$, obliczymy promień r tego okręgu.

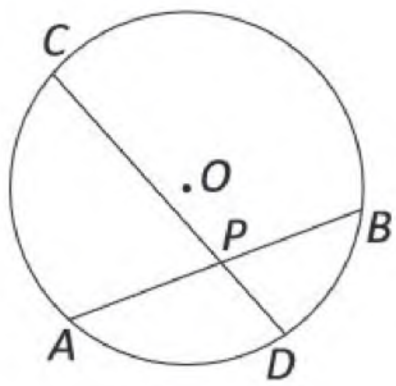


Zauważamy, że $|AP| = 8 + r$, $|BP| = 8 - r$, $r > 0$.
oraz $|PD| = 7 - 3 = 4$
Z twierdzenia 2. otrzymujemy:

$|PB| \cdot |PA| = |PD| \cdot |PC|$, czyli
$(8 - r) \cdot (8 + r) = 4 \cdot 7$
$64 - r^2 = 28$ stąd $r^2 = 36$, więc
$r = 6$, bo $r > 0$.

Promień okręgu jest równy 6.

Twierdzenie 3. Twierdzenie o cięciwach
Jeśli cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie P, to $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.



Założenie:
Dany jest okrąg $o(O, r)$ i punkt P, $|OP| < r$
AB, CD – cięciwy okręgu przecinające się w punkcie P

Teza:
$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$

Ćwiczenie 3. Udowodnij twierdzenie 3. korzystając z podobieństwa trójkątów *APC* i *BPD*.

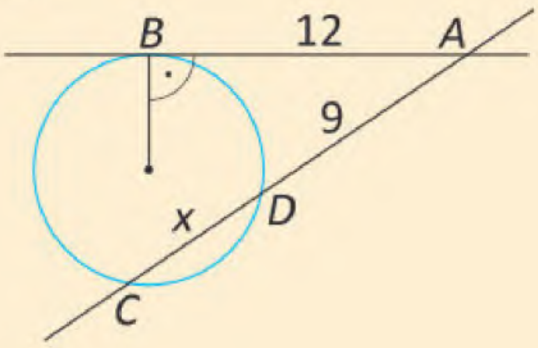
Ćwiczenie 4. W okręgu poprowadzono cięciwy *AB* i *CD*, które przecięły się w punkcie *E*. Wiedząc, że $|AE| = 7$, $|EB| = 3$ i $|CE| = 2$, oblicz długość odcinka *DE*.

Sprawdź, czy rozumiesz.

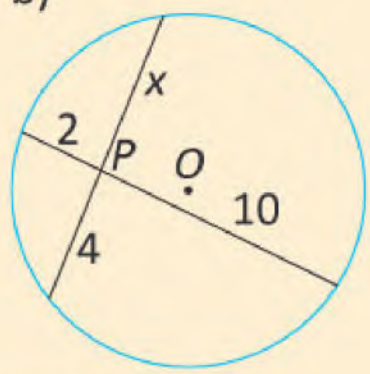
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Na podstawie danych na rysunkach poniżej oblicz x.

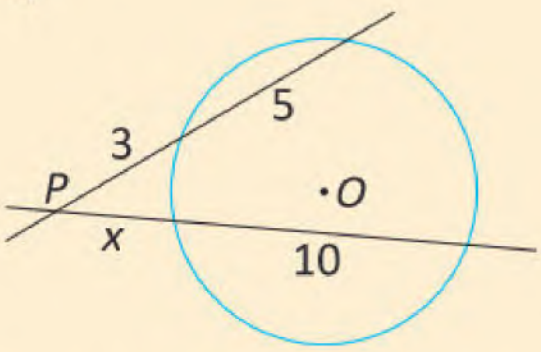
a)



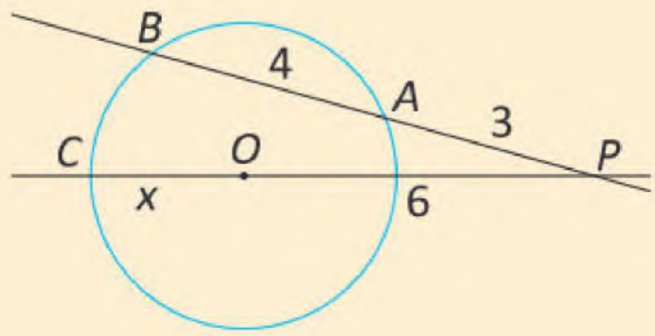
b)



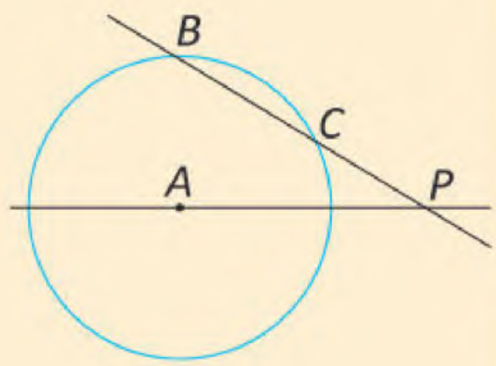
c)



d) $|OP| = 6$

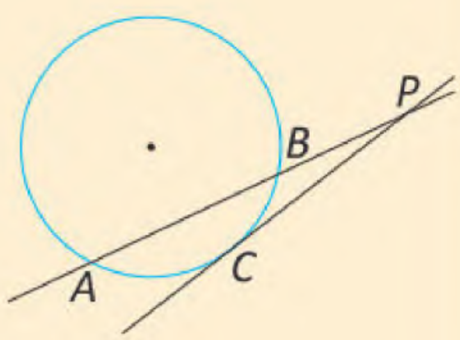


2. Dany jest okrąg o środku w punkcie *A* i promieniu 9 cm. Przez punkt *P* odległy od punktu *A* o 15 cm poprowadzono prostą przecinającą dany okrąg w punktach *B* i *C* w taki sposób, że $|PC| = |BC|$. Oblicz $|BP|$.



D 3. Dwa okręgi przecinają się w punktach *A* i *B*. Prosta *PQ* jest wspólną styczną do tych okręgów, odpowiednio w punktach *P* i *Q*. Wykaż, że prosta *AB* dzieli odcinek *PQ* na połowy.

D 4. Na rysunku obok prosta *PC* jest styczną do danego okręgu w punkcie *C*. Sieczna tego okręgu przechodzi przez punkt *P* i przecina okrąg w punktach *A* i *B*. Wykaż, że jeśli $|AB| : |PB| = 5 : 4$, to $|AP| : |PC| = 3 : 2$



5. Cięciwy *AB* i *CD* mają długość: $|AB| = 19$ cm, $|CD| = 15{,}5$ cm i przecinają się w punkcie *P*. Wiedząc, że $|AP| : |CP| = 2$, oblicz długości odcinków *AP*, *PB*, *PC*, *PD*.

Wybrane konstrukcje geometryczne

Przypomnijmy: wykonanie konstrukcji klasycznej polega na narysowaniu figury geometrycznej spełniającej podane warunki, przy użyciu cyrkla i linijki bez podziałki. Ograniczenie środków konstrukcyjnych tylko do cyrkla i linijki wprowadził Platon, filozof grecki, żyjący w IV i III w. przed Chrystusem. Ze względu na duży autorytet Platona, ograniczenia te przyjęły się powszechnie.

Rozwiązanie zadania konstrukcyjnego składa się z czterech etapów:

I. Analiza zadania – szkicujemy rysunek tak, jakby zadanie było rozwiązane, zaznaczamy elementy dane i szukane. Następnie określamy, jak od danych przejść do szukanych.

II. Konstrukcja i jej opis – konstruujemy szukaną figurę, używając wyłącznie cyrkla i linijki, oraz opisujemy wykonywane czynności.

III. Dowód poprawności konstrukcji – wykazujemy, że uzyskane przez nas rozwiązanie spełnia warunki zadania.

IV. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań – ustalamy warunki, dla których istnieje rozwiązanie, oraz stwierdzamy, ile istnieje rozwiązań tego zadania.

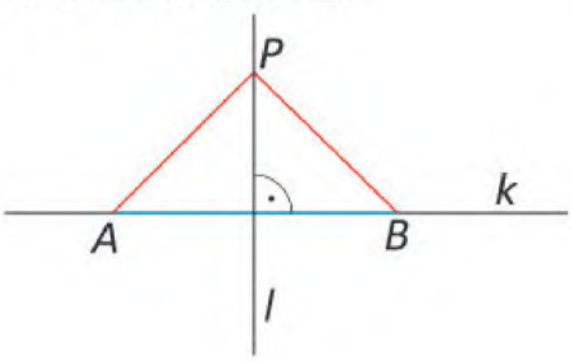
Aby rozwiązania zadań konstrukcyjnych były czytelne, a opisy niezbyt długie, często posługujemy się konstrukcjami elementarnymi. Należą do nich konstrukcje: symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta, prostej prostopadłej do danej prostej przechodzącej przez dany punkt, prostej równoległej do danej prostej i leżącej w danej odległości od tej prostej.

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie dwie konstrukcje: symetralnej danego odcinka i dwusiecznej danego kąta, które omówiliśmy w klasie 1.

Przykład 1.

Skonstruujemy prostą, prostopadłą do danej prostej k, przechodzącą przez dany punkt P.

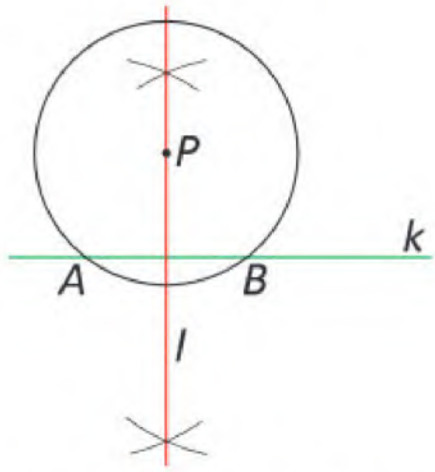
I. Analiza zadania:



Niech l będzie szukaną prostą, $l \perp k$, $P \in l$.
Jeśli znajdziemy dwa dowolne punkty, leżące na danej prostej k w jednakowej odległości od punktu P, to szukana prosta l będzie symetralną odcinka AB.

II. Konstrukcja i jej opis:

1. Kreślimy okrąg o środku w punkcie P i promieniu większym niż odległość punktu P od prostej k. Przecina on prostą k w punktach A i B.
2. Kreślimy symetralną l odcinka AB, która jest szukaną prostą.



III. Dowód poprawności konstrukcji:

$|PA| = |PB|$ – z konstrukcji okręgu

Punkt P należy do symetralnej l odcinka AB. Z definicji symetralnej odcinka wiemy, że jest ona prostopadła do tego odcinka, więc jest również prostopadła do prostej k.
Mamy:

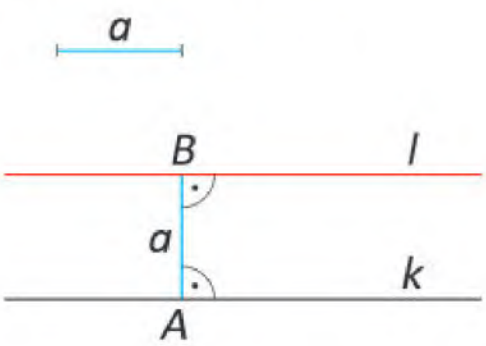
$l \perp k$ i $P \in l$,

IV. Zadanie ma tylko jedno rozwiązanie.

Przykład 2.

Dana jest prosta k i odcinek długości a. Skonstruujemy prostą l, równoległą do prostej k i położoną w odległości a od prostej k.

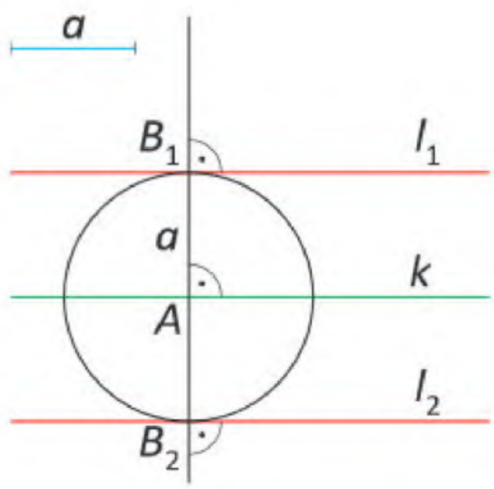
I. Analiza zadania:



Niech l będzie szukaną prostą. Niech punkt A należy do prostej k i punkt B należy do prostej l oraz $|AB| = a$. Wówczas odcinek AB jest prostopadły do prostej k i do prostej l.

II. Konstrukcja i jej opis:

1. Na prostej k zaznaczamy dowolny punkt A.
2. Kreślimy prostą prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt A.
3. Kreślimy okrąg o środku w punkcie A i promieniu a, który przecina prostą prostopadłą do l w punktach B_1 i B_2.
4. Kreślimy proste l_1 i l_2 prostopadłe do prostej B_1B_2 i przechodzące odpowiednio przez punkty B_1, B_2. Są to szukane proste.



III. Dowód poprawności konstrukcji:

$|AB_1| = |AB_2| = a$ – z konstrukcji okręgu

$B_1B_2 \perp k$ i $B_1B_2 \perp l_1$ i $B_1B_2 \perp l_2$ – z konstrukcji

Zatem $l_1 \parallel k$ i $l_2 \parallel k$ i odległość prostych l_1, l_2 od prostej k jest równa a.

IV. Zadanie ma dwa rozwiązania.

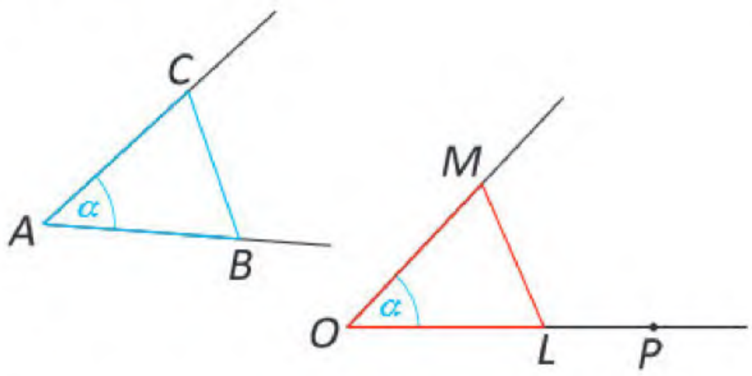
Ćwiczenie 2. Dana jest prosta k i punkt A, leżący poza tą prostą. Skonstruuj prostą l równoległą do prostej k i przechodzącą przez punkt A.

Ważną konstrukcją jest przeniesienie danego kąta w dowolne miejsce płaszczyzny.

Przykład 3.

Dany jest kąt α i półprosta $OP^{\rightarrow}$. Skonstruujemy kąt o mierze α, którego jednym z ramion jest półprosta $OP^{\rightarrow}$.

I. Analiza zadania:



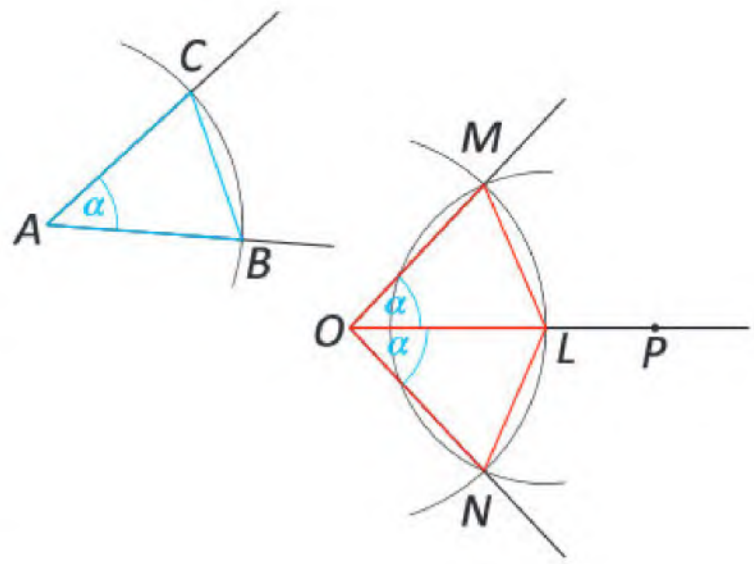
Jeśli wyznaczymy punkty B, C, L, M (zobacz rysunek obok) takie, że

$$|OL| = |OM| = |AB| = |AC| \text{ oraz}$$
$$|LM| = |BC|,$$

to trójkąty ABC, OLM będą przystające. Wówczas $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LOM| = \alpha$.

II. Konstrukcja i jej opis:

1. Kreślimy łuk okręgu o środku A i wybranym promieniu r, przecinający ramiona kąta α w punktach B i C.
2. Kreślimy łuk okręgu $o(O, r)$, przecinający półprostą $OP^{\rightarrow}$ w punkcie L.
3. Kreślimy łuk okręgu o środku L i promieniu $|BC|$, który przecina się z łukiem okręgu $o(O, r)$ w punktach M i N.
4. Kreślimy półproste $OM^{\rightarrow}$ i $ON^{\rightarrow}$. Kąty LOM i NOL są równe α.



III. Dowód poprawności konstrukcji:

$|OL| = |OM| = |ON| = |AB| = |AC|$ – z konstrukcji

$|BC| = |LM| = |LN|$ – z konstrukcji

Trójkąty ABC, OLM, ONL są przystające, na podstawie cechy bbb. Zatem

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LOM| = |\sphericalangle NOL| = \alpha.$$

IV. Zadanie ma dwa rozwiązania.

Ćwiczenie 3. Dany jest kąt α. Skonstruuj kąt równy 2α.

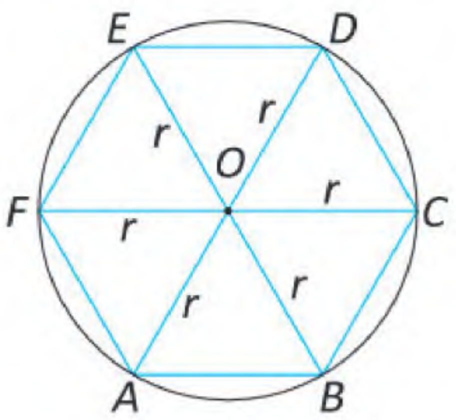
Ćwiczenie 4. Skonstruuj kąt, którego miara jest równa sumie miar dwóch danych kątów α i β.

Ciekawą konstrukcję ma sześciokąt foremny.

Przykład 4.

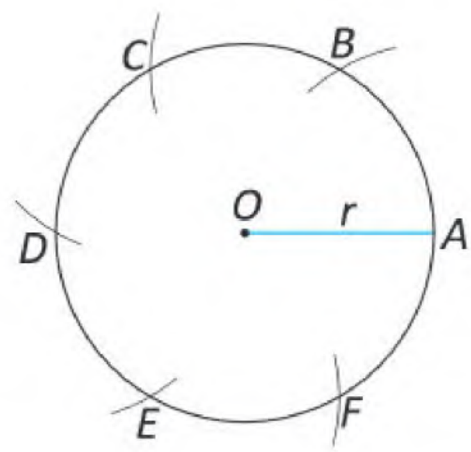
Dany jest okrąg o promieniu r i punkt A leżący na tym okręgu. Skonstruujemy sześciokąt foremny, którego wszystkie wierzchołki należą do tego okręgu i jednym z nich jest punkt A.

I. Analiza zadania:



Niech punkty A, B, C, D, E, F należące do okręgu $o(O, r)$ będą wierzchołkami sześciokąta foremnego. Prowadzimy sześć promieni: OA, OB, OC, OD, OE i OF, które wyznaczają sześć przystających trójkątów równoramiennych (cecha bbb). Zauważ, że kąty między ramionami w tych trójkątach są równe 60° (360° : 6 = 60°). Zatem trójkąty: ABO, BCO, CDO, DEO, EFO, FAO są równoboczne, a ich boki mają długość r.

II. Konstrukcja i jej opis:



1. Zakreślamy łuk o środku w punkcie A i promieniu r, przecinający okrąg w punkcie B.
2. Zakreślamy łuk o środku B i promieniu r, przecinający okrąg w punkcie C, różnym od A.
3. Zakreślamy w taki sam sposób następne łuki, wyznaczające punkty D, E, F.
4. Otrzymane punkty, wraz z punktem A, to wierzchołki szukanego sześciokąta.

III. Dowód poprawności konstrukcji:

Z konstrukcji wynika, że trójkąty OAB, OBC, OCD, ODE i OEF są równoboczne o bokach długości r. Pokażemy, że trójkąt OFA też jest równoboczny. Zauważamy, że:

$$|OA| = |OF| = r$$

$$|\sphericalangle FOA| = 360° - 5 \cdot 60° = 360° - 300° = 60°$$

Z własności trójkąta równoramiennego wynika, że pozostałe kąty trójkąta FOA też są równe 60°. To znaczy, że trójkąt OFA jest równoboczny, stąd $|FA| = r$.

Wszystkie boki sześciokąta $ABCDEF$ mają długość r. Ponadto każdy kąt wewnętrzny tego sześciokąta jest równy 2 · 60°, czyli 120°. Zatem sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny.

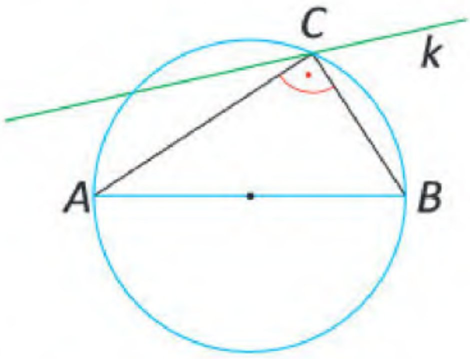
IV. Zadanie ma tylko jedno rozwiązanie.

Ćwiczenie 5. Dany jest okrąg o promieniu r i punkt A należący do tego okręgu. Skonstruuj dwa punkty należące do tego okręgu tak, aby wraz z punktem A były wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Przykład 5.

Dana jest prosta k oraz punkty A i B leżące poza tą prostą. Skonstruujemy na prostej k punkt C, dla którego $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$.

I. Analiza zadania:

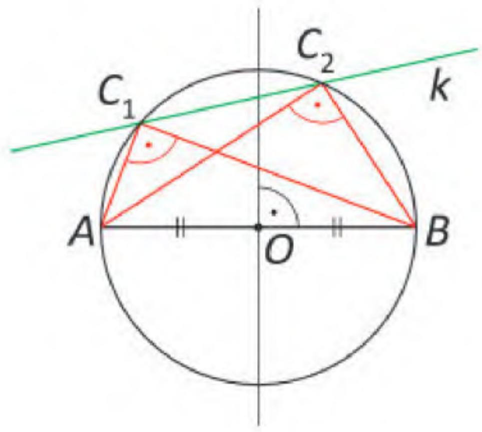


Jeśli $|ACB| = 90^\circ$, to punkt C należy do okręgu, którego średnicą jest odcinek AB.

Korzystamy z własności: kąt wpisany w okrąg, oparty na półokręgu, jest kątem prostym.

II. Konstrukcja i jej opis:

1. Konstruujemy symetralną odcinka AB, która przecina odcinek AB w punkcie O.
2. Kreślimy okrąg $o(O, |AO|)$.
3. Punkty C_1 i C_2 przecięcia okręgu z prostą k to punkty spełniające warunki zadania.



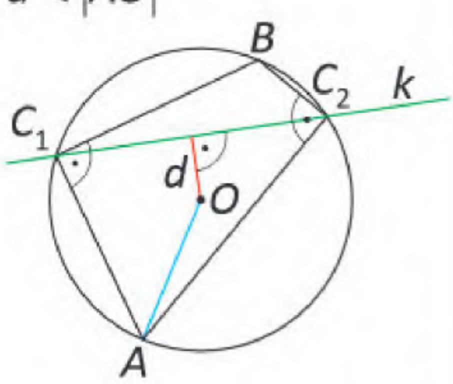
III. Dowód poprawności konstrukcji:

Punkty C_1, C_2 należą do prostej k
i do okręgu $o(O, |AO|)$ – z konstrukcji
Punkt O jest środkiem odcinka AB – z własności symetralnej odcinka
AB – średnica okręgu $o(O, |AO|)$, więc
$|\sphericalangle AC_1B| = |\sphericalangle AC_2B| = 90^\circ$ – kąty wpisane, oparte na półokręgu

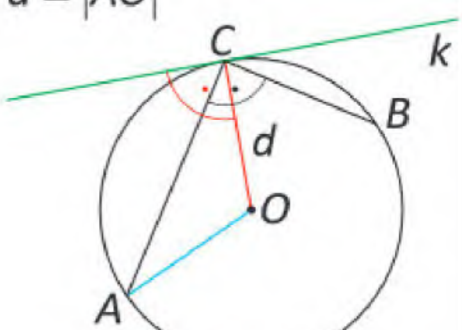
IV. Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań:

Niech d oznacza odległość punktu O od prostej k, $d \geqslant 0$. Zadanie:

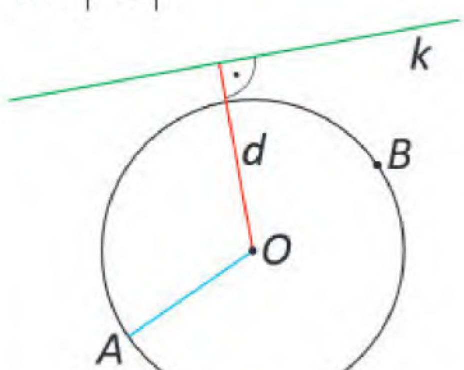
a) ma dwa rozwiązania, jeśli $d < |AO|$



b) ma jedno rozwiązanie, jeśli $d = |AO|$



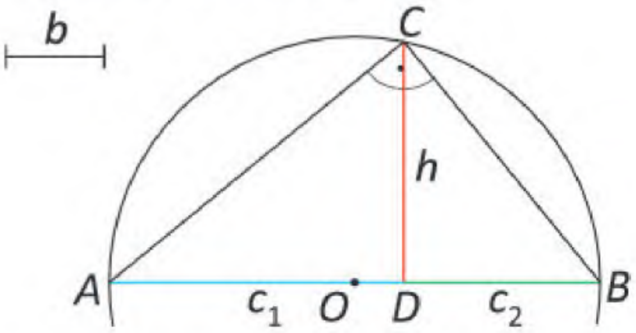
c) nie ma rozwiązań, jeśli $d > |AO|$



Przykład 6.

Dany jest odcinek długości b. Skonstruujemy odcinek mający długość $\sqrt{6}b$.

I. Analiza zadania:



Korzystamy z własności: W trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości c_1 i c_2 w taki sposób, że $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$.

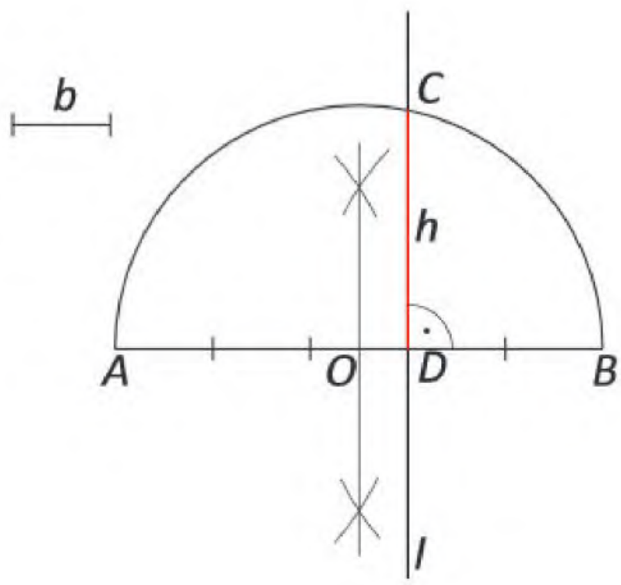
W trójkącie ABC mamy: $|\sphericalangle ACB| = 90°$.
Jeżeli $c_1 = 3b$, $c_2 = 2b$, to

$$h = \sqrt{3b \cdot 2b} = \sqrt{6}b,\ b > 0$$

Wówczas punkt C należy do łuku okręgu, którego średnicą jest bok AB.

II. Konstrukcja i jej opis:

1. Na dowolnej prostej zaznaczamy kolejno takie odcinki AD i DB, że $|AD| = 3b$, $|DB| = 2b$.
2. Kreślimy symetralną odcinka AB i wyznaczamy jego środek O.
3. Kreślimy półokrąg o środku O i promieniu $|AO|$.
4. Kreślimy prostą l prostopadłą do prostej AB i przechodzącą przez punkt D. Ta prosta przecina półokrąg w punkcie C.
5. Odcinek CD spełnia warunki zadania.



III. Dowód poprawności konstrukcji:

$D \in AB$ oraz $CD \perp AB$ – z konstrukcji prostej l

Odcinek CD jest wysokością w trójkącie ABC,

$|\sphericalangle ACB| = 90°$ – z konstrukcji półokręgu

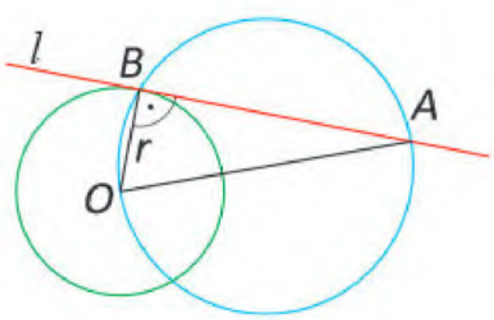
Zatem $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |DB|}$. Ponieważ $|AD| = 3b$, $|DB| = 2b$, więc $|CD| = \sqrt{6}b$.

IV. Zadanie ma jedno rozwiązanie.

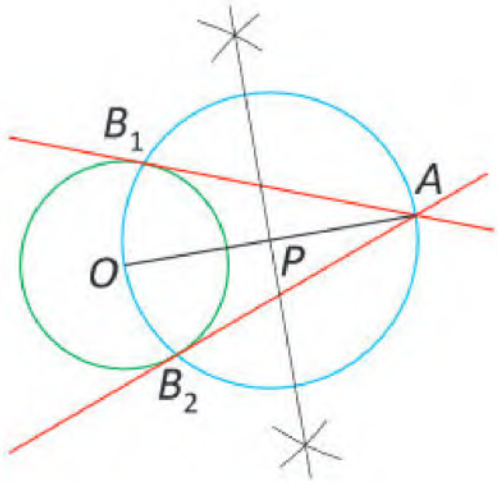
Przykład 7.

Skonstruujemy styczną do danego okręgu $o(O, r)$, która przechodzi przez punkt A leżący na zewnątrz koła wyznaczonego przez ten okrąg.

I. Analiza zadania:



Niech punkt B będzie punktem styczności szukanej prostej i okręgu $o(O, r)$. Wówczas $|\sphericalangle OBA| = 90°$. Punkt B należy do okręgu, którego średnicą jest dany odcinek OA.



II. Konstrukcja i jej opis
1. Kreślimy odcinek OA.
2. Konstruujemy środek P odcinka OA.
3. Kreślimy okrąg $o(P, |PA|)$.
4. Wyznaczamy punkty B_1 i B_2 przecięcia okręgu $o(O, r)$ i okręgu $o(P, |PA|)$.
5. Proste AB_1 i AB_2 to szukane styczne.

III. Dowód poprawności konstrukcji:

$|OP| = |PA|$ – z konstrukcji

$|\sphericalangle OB_1A| = |\sphericalangle OB_2A| = 90°$ – kąty wpisane w okrąg $o(P, |PA|)$, oparte na półokręgu

Promienie OB_1 i OB_2 okręgu $o(O, r)$ są prostopadłe odpowiednio do prostej AB_1 i AB_2, więc te proste są stycznymi do okręgu, poprowadzonymi z punktu A.

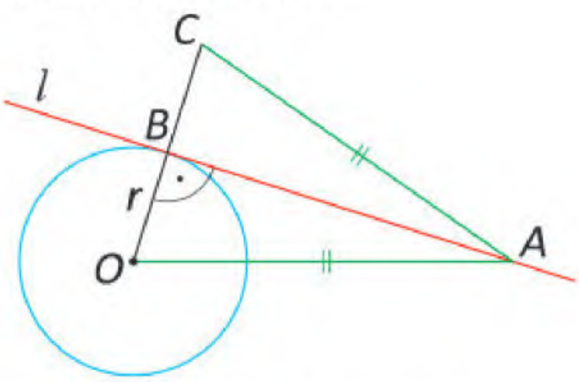
IV. Zadanie ma dwa rozwiązania.

Konstrukcję stycznych do danego okręgu możemy wykonać również innym sposobem, na przykład korzystając z własności trójkąta równoramiennego.

Przykład 8.

Wyznaczymy styczne do okręgu, korzystając z własności trójkąta równoramiennego.

I. Analiza zadania:

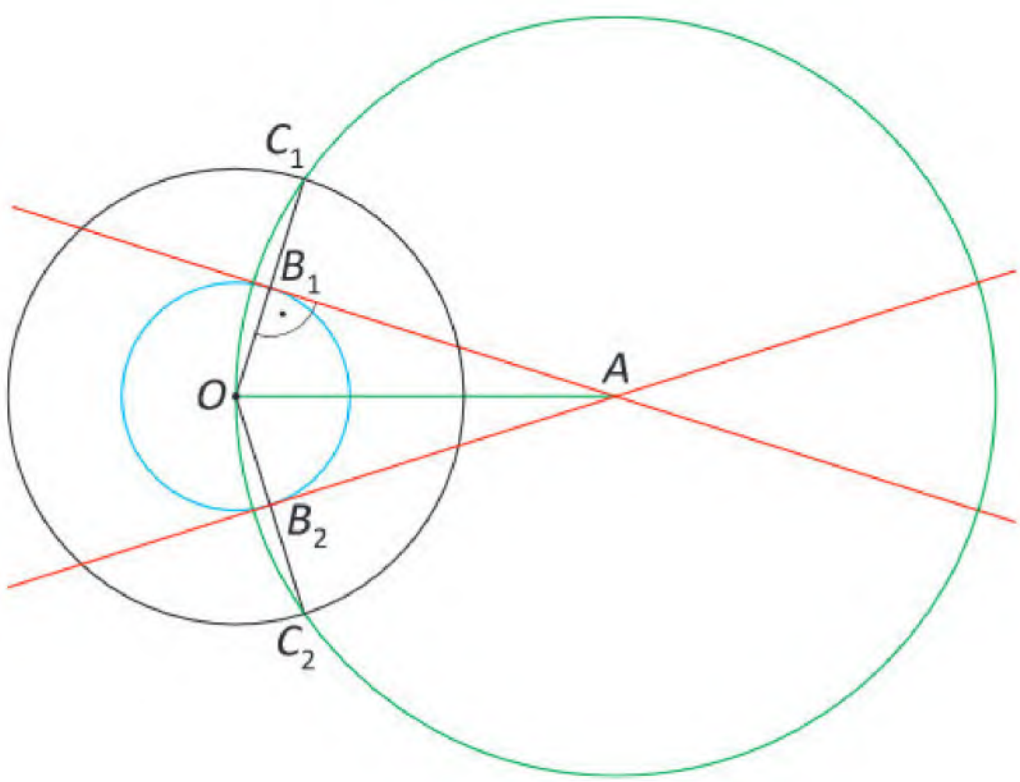


Styczna l jest osią symetrii trójkąta równoramiennego OAC i zawiera środkową AB tego trójkąta. Mamy:

$|CO| = 2r$ oraz $|CA| = |OA|$.

Punkt C jest punktem wspólnym okręgu $o(O, 2r)$ i okręgu $o(A, |OA|)$.

II. Konstrukcja i jej opis:
1. Zakreślamy dwa okręgi: $o(O, 2r)$ oraz $o(A, |OA|)$, które przecinają się w punktach C_1 i C_2.
2. Kreślimy odcinki OC_1 i OC_2, które przecinają okrąg $o(O, r)$ odpowiednio w punktach B_1 i B_2.
3. Kreślimy proste AB_1 i AB_2, które są szukanymi stycznymi.



III. Dowód poprawności konstrukcji:

$|AC_1| = |AO|$ – z konstrukcji okręgu o $o(A, |AO|)$

$|OB_1| = |B_1C_1|$ – z konstrukcji okręgu $o(O, 2r)$

Odcinek AB_1 to środkowa trójkąta OAC_1, w którym $|AC_1| = |AO|$, więc

$AB_1 \perp OB_1$ – z własności trójkąta równoramiennego

Zatem prosta AB_1 jest styczną do tego okręgu w punkcie B_1. Analogicznie pokazujemy, że prosta AB_2 jest styczną do okręgu w punkcie B_2.

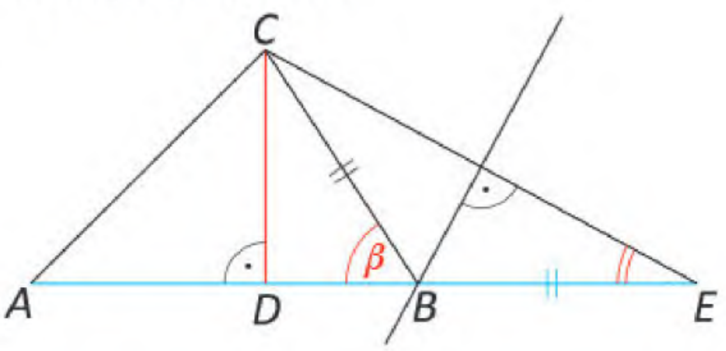
IV. Zadanie ma dwa rozwiązania.

Konstrukcje omówione w poprzednich przykładach często wykorzystujemy w konstrukcjach trójkątów o danych własnościach.

Przykład 9.

Skonstruujemy trójkąt ABC, mając dane: sumę długości boków $|AB| + |BC|$, kąt β przy wierzchołku B i wysokość CD.

I. Analiza zadania:



Odcinek AE ma długość $|AB| + |BC|$.
Szkicujemy trójkąt ABC tak, że $B \in AE$.
Wówczas $|BE| = |BC|$.
Wyznaczamy kąt BEC trójkąta BEC:

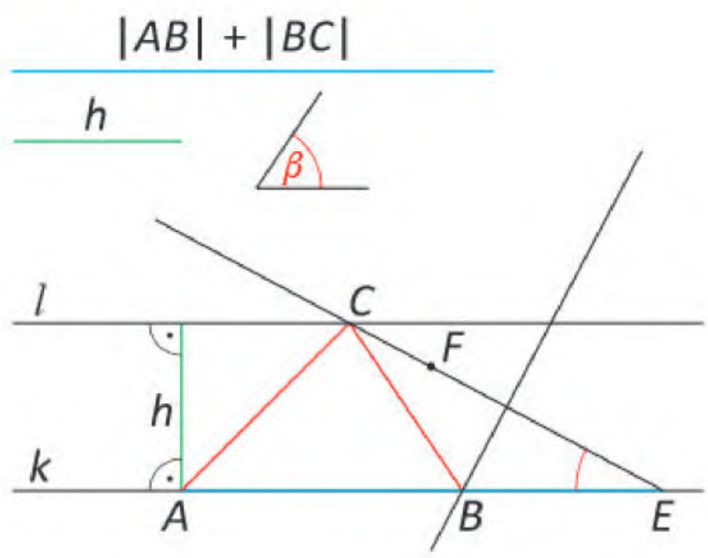
$$|\sphericalangle BEC| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Mając dany kąt β, potrafimy skonstruować kąt $\frac{\beta}{2}$. Następnie możemy skonstruować trójkąt AEC, znając jego bok AE, kąt AEC oraz wysokość poprowadzoną z wierzchołka C. Wierzchołek B trójkąta ABC jest punktem wspólnym odcinka AE i symetralnej odcinka EC.

Korzystamy z własności: Symetralna odcinka jest zbiorem punktów równoodległych od końców tego odcinka.

II. Konstrukcja i jej opis:

1. Kreślimy odcinek AE o długości $|AB| + |BC|$.
2. Konstruujemy kąt o mierze $\frac{\beta}{2}$, którego jednym z ramion jest półprosta $EA^{\rightarrow}$, a drugim półprosta $EF^{\rightarrow}$.
3. Kreślimy prostą l, równoległą do odcinka AE, leżącą w odległości h od tego odcinka, która przecina półprostą $EF^{\rightarrow}$ w punkcie C.



4. Kreślimy symetralną odcinka EC, która przecina odcinek AE w punkcie B.
5. Trójkąt ABC to szukany trójkąt.

III. Dowód poprawności konstrukcji:

Punkt B należy do odcinka AE i do symetralnej odcinka EC. – z konstrukcji

Zatem

$$|BC| = |BE| \quad \text{oraz} \quad |AE| = |AB| + |BC|$$

Trójkąt BEC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BEC| = \frac{\beta}{2}$$ – z konstrukcji kąta BEC

$$|\sphericalangle ABC| = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$$ – kąt zewnętrzny trójkąta BEC

Punkt C należy do prostej l, równoległej do prostej k i leżącej w odległości h od prostej k. Zatem wysokość CD jest równa h.

IV. Zadanie ma jedno rozwiązanie.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dane są odcinki długości a, b, c, gdzie $a < b < c$. Skonstruuj trójkąt o bokach mających długość: $2a$, b, $\frac{c}{2}$.
2. Dana jest prosta k i punkty A, B, które nie należą do tej prostej. Skonstruuj na prostej k punkt C leżący w jednakowej odległości od punktów A i B.
3. Dane są odcinki długości a i b, $a < b$. Skonstruuj odcinek, którego długość jest równa:
   a) $\sqrt{a^2 + b^2}$ b) $\sqrt{b^2 - a^2}$ c) $\sqrt{2a^2 + b^2}$
4. Skonstruuj kąt, którego miara jest równa:
   a) $60°$ b) $45°$ c) $105°$
5. Dany jest odcinek długości a. Skonstruuj:
   a) trójkąt prostokątny równoramienny, o przeciwprostokątnej długości a,
   b) kwadrat, którego bok ma długość a.
6. Dany jest odcinek długości a. Skonstruuj ośmiokąt foremny, którego najdłuższa przekątna ma długość $2a$.
7. Dany jest odcinek długości a. Skonstruuj odcinek mający długość:
   a) $\frac{a}{3}$ b) $\frac{2a}{5}$ c) $\frac{5a}{6}$
8. Dany jest odcinek długości 1. Skonstruuj odcinek mający długość:
   a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{15}$

9. Dany jest kąt ostry α. Skonstruuj kąt, którego miara jest równa:

   a) 3α b) $\frac{\alpha}{4}$ c) $90° - \frac{\alpha}{4}$

10. Skonstruuj trójkąt prostokątny *ABC*, mając daną długość przeciwprostokątnej *AB* i wysokość *CD* poprowadzoną na przeciwprostokątną.
11. Skonstruuj trójkąt prostokątny *ABC*, mając daną długość przyprostokątnej *AC* i wysokość *CD* poprowadzoną na przeciwprostokątną.
12. Skonstruuj równoległobok, mając dane wierzchołki *A*, *B* oraz punkt *S* przecięcia się przekątnych.
13. Skonstruuj równoległobok, mając dane: długości boków *a*, *b* oraz wysokość *h* poprowadzoną na bok długości *a*.
14. Skonstruuj trapez równoramienny, mając dane długości podstaw *a*, *b* i wysokość *h*.
15. Skonstruuj trapez prostokątny, mając dane: długość dłuższej podstawy *a*, wysokość *h* i kąt ostry α.
16. Skonstruuj trójkąt *ABC*, mając dane: długość boku *AB* oraz długości środkowych *AD* i *BE*.
17. Skonstruuj trójkąt równoboczny, jeśli dana jest jego wysokość *h*.
18. Skonstruuj trójkąt *ABC*, mając dane: długość boku *AB* oraz wysokości *BD* i *CE*.
19. Dana jest prosta *k*, punkt *A* leżący poza tą prostą oraz odcinek długości *r*. Skonstruuj okrąg o promieniu *r*, styczny do prostej *k* i przechodzący przez punkt *A*.
20. Skonstruuj trójkąt prostokątny *ABC*, mając daną sumę długości przyprostokątnych $|AC| + |BC|$ i miarę α kąta ostrego trójkąta *ABC*.
21. Skonstruuj trójkąt prostokątny *ABC*, mając daną sumę długości przyprostokątnych $|AC| + |BC|$ i długość przeciwprostokątnej *AB*.
22. Skonstruuj trójkąt *ABC*, mając dane trzy odcinki, których długości są odpowiednio równe: $|AB| + |BC|$, $|BC| + |CA|$, $|CA| + |AB|$.
23. Skonstruuj trójkąt prostokątny *ABC*, mając daną różnicę długości przyprostokątnych $|AC| - |BC|$ i miarę α kąta ostrego, przyległego do boku *BC*.
24. Skonstruuj trójkąt prostokątny *ABC*, mając daną różnicę długości przyprostokątnych $|AC| - |BC|$ i długość przeciwprostokątnej *AB*.

Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie

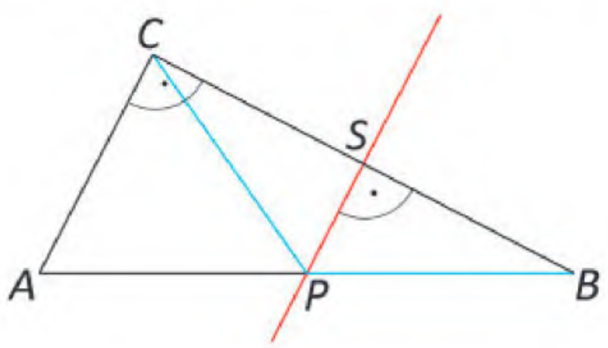
Ćwiczenie 1. Narysuj trzy trójkąty różnoboczne: trójkąt ostrokątny, prostokątny i rozwartokątny. Następnie w każdym trójkącie poprowadź wysokości i środkowe. Czy punkt przecięcia się wysokości jest punktem przecięcia się środkowych? W jakich trójkątach środkowe pokrywają się z wysokościami?

Ćwiczenie 2. Sformułuj twierdzenie o środkowych w trójkącie. Czy środek ciężkości trójkąta prostokątnego równoramiennego znajduje się w jednakowej odległości od wszystkich wierzchołków tego trójkąta? Oblicz te odległości w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3.

W poniższym przykładzie przypomnimy i zastosujemy własności symetralnej odcinka.

Przykład 1.

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AC i BC mają długość odpowiednio 6 i 8. Obliczymy odległość punktu P przecięcia symetralnej boku BC z przeciwprostokątną AB od wierzchołków B i C.



Niech PS – symetralna odcinka BC, $P \in AB$.

$|\sphericalangle PSB| = 90°$ oraz $|CS| = |SB|$ – Symetralna odcinka BC jest prostą prostopadłą do tego odcinka i przechodzącą przez jego środek.

Ponadto, $|CP| = |PB|$ – Symetralna odcinka jest zbiorem punktów równoodległych od jego końców.

$|\sphericalangle ACB| = 90° = |\sphericalangle PSB|$, więc odcinki AC i PS są równoległe. – z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą

Zatem:

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|CS|}{|SB|}$$ – z twierdzenia Talesa

Ponieważ $|CS| = |SB|$, więc $|AP| = |PB|$. Punkt P jest środkiem przeciwprostokątnej.
Obliczamy $|AB|$, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

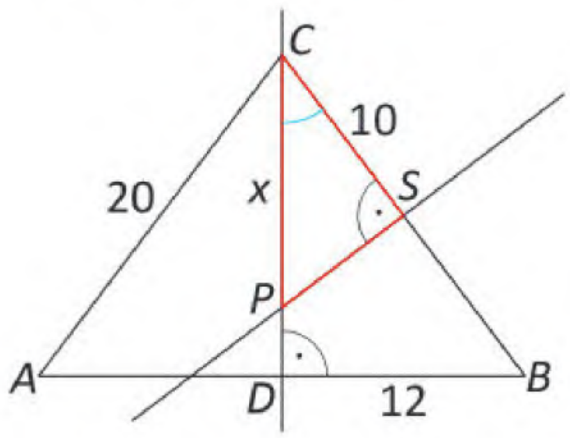
$|AB|^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, zatem $|AB| = 10$, stąd

$|PB| = 5$

Punkt P leży w odległości 5 cm od punktów B i C. Zauważ, że punkt P jest równoodległy od wszystkich wierzchołków trójkąta prostokątnego ABC.

Przykład 2.

W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości boków: $|AB| = 24$, $|BC| = |AC| = 20$. Symetralne boków AB i BC przecinają się w punkcie P. Obliczymy długości odcinków, na jakie punkt P podzielił wysokość CD.



Niech S będzie środkiem boku BC, x – długością odcinka CP, $x > 0$. Z własności trójkąta równoramiennego wynika, że wysokość CD zawiera się w symetralnej boku AB, $|AD| = |DB| = 12$.

Obliczamy wysokość CD:

$|CD|^2 = 20^2 - 12^2$ $\quad$ $|CD|^2 = 256$, $\quad |CD| > 0$

$|CD| = 16$

Rozpatrzmy teraz kąty w trójkątach CDB i CPS:

$|\sphericalangle PSC| = |\sphericalangle BDC| = 90°$ – z definicji symetralnej odcinka

$|\sphericalangle PCS| = |\sphericalangle BCD|$ – wspólny kąt trójkątów CDB i CPS

Na podstawie cechy (kkk) podobieństwa trójkątów mamy:

$\Delta CDB \sim \Delta CPS$. Wówczas:

$$\frac{|CP|}{|BC|} = \frac{|CS|}{|CD|}, \text{ więc } \frac{x}{20} = \frac{10}{16} \text{ stąd}$$

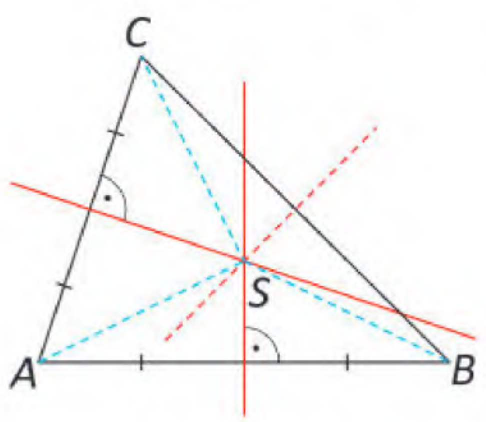
$x = 12{,}5$

Zatem $|PD| = 16 - 12{,}5$ czyli $|PD| = 3{,}5$

Punkt przecięcia symetralnych boków AB i BC dzieli wysokość CD na odcinki długości 12,5 oraz 3,5.

Ćwiczenie 3. Czy w powyższym przykładzie punkt P jest środkiem ciężkości trójkąta ABC? Czy punkt P jest punktem przecięcia wysokości w tym trójkącie?

Poprowadźmy teraz symetralne boków AB i AC w dowolnym trójkącie ABC. Symetralne przetną się w punkcie, który oznaczymy S.



Wiemy, że

$|SA| = |SB|$ – ponieważ S należy do symetralnej odcinka AB

$|SA| = |SC|$ – ponieważ S należy do symetralnej odcinka AC

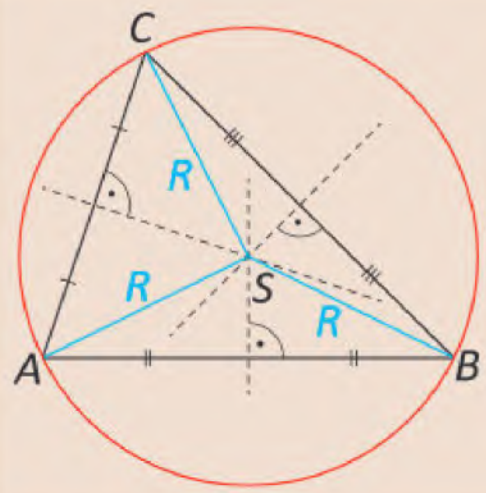
Lewe strony powyższych równości są równe, zatem prawe strony też są równe, czyli:

$|SB| = |SC|$.

To znaczy, że punkt S należy również do symetralnej odcinka BC.

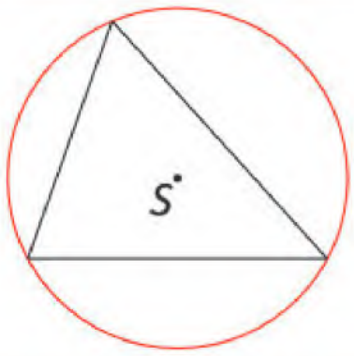
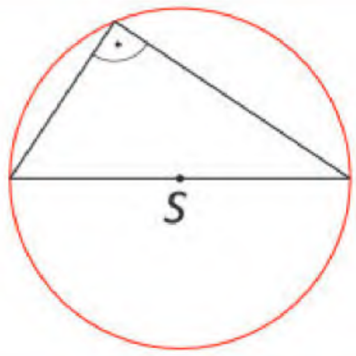
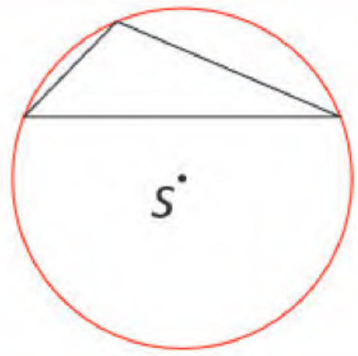
Twierdzenie 1.

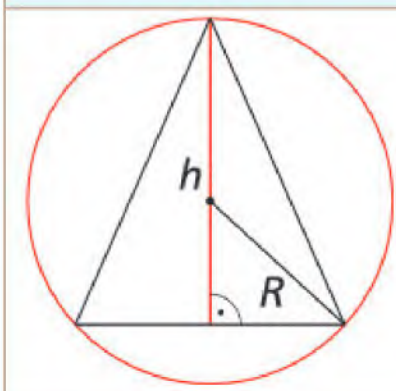
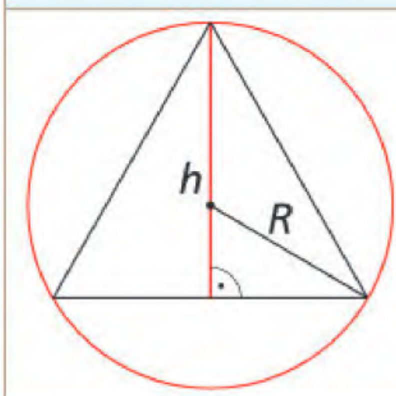
Symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

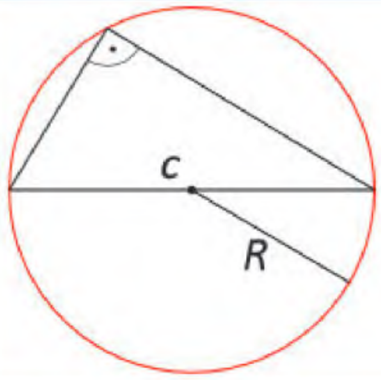


Punkt S przecięcia symetralnych boków trójkąta ABC leży w równej odległości od wierzchołków tego trójkąta. Przez wierzchołki A, B, C można poprowadzić okrąg o środku w punkcie S i promieniu $|SA|$. Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki trójkąta, nazywamy **okręgiem opisanym na trójkącie**. Wówczas o trójkącie mówimy, że jest to **trójkąt wpisany w okrąg**.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że na każdym trójkącie można opisać okrąg.

		
Środek S okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.	Środek S okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na boku trójkąta.	Środek S okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

okręgi opisane na wybranych trójkątach		
trójkąt równoramienny		
	R – promień okręgu opisanego na trójkącie h – wysokość opuszczona na podstawę	W trójkącie równoramiennym symetralna podstawy zawiera wysokość poprowadzoną na podstawę. Zatem środek okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym leży na prostej zawierającej wysokość poprowadzoną na podstawę.
trójkąt równoboczny		
	R – promień okręgu opisanego na trójkącie h – wysokość $R = \frac{2}{3}h$	W trójkącie równobocznym symetralne boków zawierają wysokości. Tak więc środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest punktem przecięcia wysokości w tym trójkącie.

trójkąt prostokątny	
 R – promień okręgu opisanego na trójkącie c – przeciwprostokątna $R = \frac{1}{2}c$	Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.

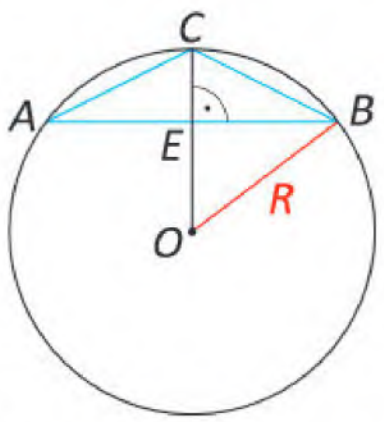
Ćwiczenie 4. Wyznacz promień okręgu opisanego na trójkącie

a) równobocznym o boku długości 3,

b) prostokątnym równoramiennym o przyprostokątnej długości 2.

Przykład 3.

Wyznaczymy promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC, którego boki mają długość: $|AB| = 24$, $|AC| = |BC| = 13$.



Zauważmy, że $|AC|^2 + |BC|^2 = 13^2 + 13^2 = 338$

Ponadto $|AB|^2 = 24^2 = 576$

Zatem $|AC|^2 + |BC|^2 < |AB|^2$

To znaczy, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży poza trójkątem.

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc wysokość zawiera się w promieniu CO oraz

$|AE| = |EB| = 12$

Obliczamy wysokość CE z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AEC:

$|CE|^2 = 13^2 - 12^2$, stąd $|CE| = 5$

Wyznaczamy boki trójkąta prostokątnego OBE:

$|OB| = R \qquad |EO| = R - 5 \qquad |EB| = 12$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OBE:

$(R - 5)^2 + 12^2 = R^2$

$R^2 - 10R + 25 + 144 = R^2$

$R = 16{,}9$

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 16,9.

Ćwiczenie 5. Wyznacz promień okręgu R z przykładu 3. – korzystając z metody przedstawionej w przykładzie 2.

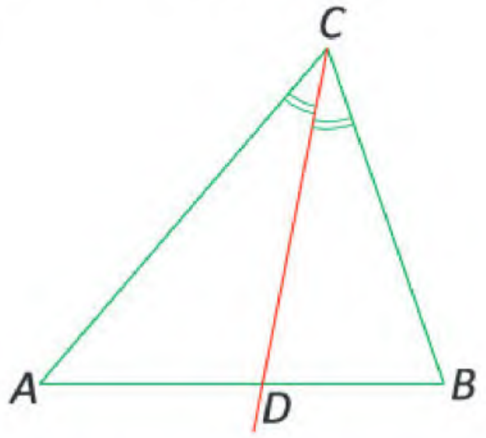
W dalszej części nauki dowiesz się, jak obliczyć promień okręgu opisanego na dowolnym trójkącie.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. W trójkącie ostrokątnym ABC boki AC i BC mają odpowiednio długość 13 cm i 15 cm, a wysokość CD jest równa 12 cm. Oblicz odległość punktu D od symetralnej boku AB.
2. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ oraz $|AC| = 6$ cm i $|AB| = 10$ cm. Wyznacz długości odcinków, na jakie symetralna boku AB dzieli bok BC.
3. Boki trójkąta mają długość: 10 cm, 17 cm, 21 cm.
   a) Jak jest położony względem tego trójkąta środek okręgu opisanego na nim?
   b) Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $10\frac{5}{8}$ cm, oblicz odległości środka tego okręgu od boków tego trójkąta.
4. Wyznacz długość boku trójkąta równobocznego, jeśli promień okręgu opisanego na tym trójkącie:
   a) jest o 1 cm krótszy od wysokości b) jest o 2 cm krótszy od boku.
5. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym jest równy 1. Oblicz obwód tego trójkąta.
6. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długość 15 cm i 20 cm.
7. Średnica okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równa 12 cm. Oblicz odległość punktu przecięcia się środkowych tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.
8. W trójkącie prostokątnym środek ciężkości znajduje się w odległości 1 cm od środka okręgu opisanego na tym trójkącie. Wyznacz promień tego okręgu.
9. Dane są długości boków trójkąta równoramiennego. Sprawdź, czy jest to trójkąt ostrokątny, czy rozwartokątny. Następnie oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
   a) 13 cm, 13 cm, 10 cm b) 17 cm, 17 cm, 30 cm
10. Boki trójkąta równoramiennego mają długość: 10 cm, 10 cm, 12 cm. Oblicz:
    a) odległość środka okręgu opisanego na tym trójkącie od jego podstawy,
    b) odległość środka ciężkości od podstawy tego trójkąta.
11. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna BC ma długość 12 cm, a wysokość CD poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 7,2 cm. Wyznacz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
12. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła tę przeciwprostokątną na odcinki mające długość 1 cm i 9 cm. Oblicz:
    a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
    b) długość odcinka symetralnej przeciwprostokątnej, zawartego w tym trójkącie.

Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt

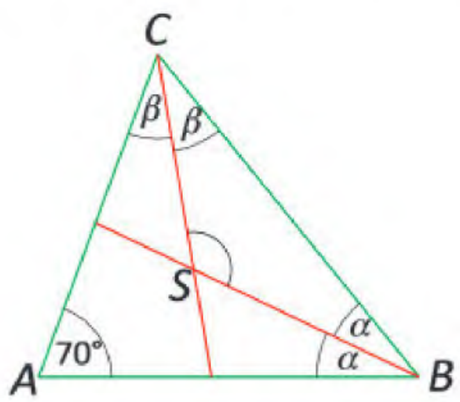
W klasie 1. określiliśmy dwusieczną kąta jako półprostą dzielącą kąt na dwa kąty równe. Wiesz też, że dwusieczna kąta jest zbiorem punktów równoodległych od ramion kąta.



Przyjmujemy następującą umowę dotyczącą dwusiecznej kąta w trójkącie. Sformułowanie „odcinek dwusiecznej" będzie oznaczać odcinek, który jest częścią wspólną trójkąta i dwusiecznej kąta w tym trójkącie; „odcinek *CD* dwusiecznej" będzie oznaczać odcinek dwusiecznej kąta przy wierzchołku *C*.

Przykład 1.

Kąt przy wierzchołku *A* trójkąta *ABC* ma 70°. Dwusieczne kątów trójkąta przy wierzchołkach *B* i *C* przecinają się w punkcie *S*. Wyznaczymy miarę kąta rozwartego *CSB*.



Dwusieczna kąta *ABC* podzieliła ten kąt na dwa kąty równe α, a dwusieczna kąta *ACB* – na dwa kąty równe β. Obliczamy sumę miar kątów w trójkącie *ABC*:

$$70^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta = 55^\circ.$$

Wyznaczamy miarę kąta *CSB*:

$$|\sphericalangle CSB| = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad \text{czyli}$$
$$|\sphericalangle CSB| = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ.$$

Miara kąta rozwartego *CSB* jest równa 125°.

Ćwiczenie 1. Czy istnieje trójkąt *ABC*, dla którego kąt *CSB* z przykładu 1. jest prosty? Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 2. Wykaż, że w trójkącie równoramiennym:

a) dwusieczna kąta między ramionami jest prostopadła do podstawy,

b) odcinki dwusiecznych kątów trójkąta przy podstawie mają jednakową długość.

Twierdzenie 1.
W dowolnym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie.

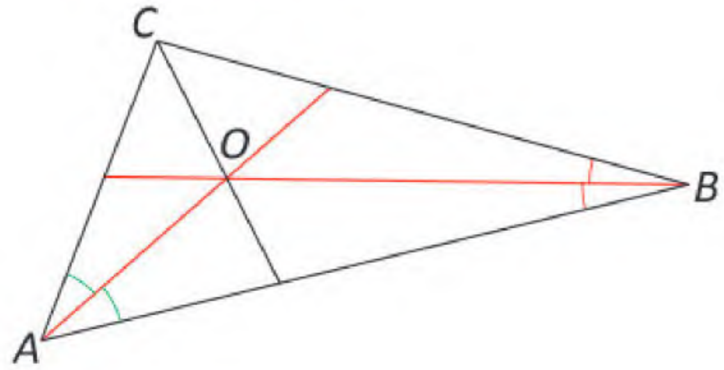
Założenie:

ΔABC – dowolny trójkąt

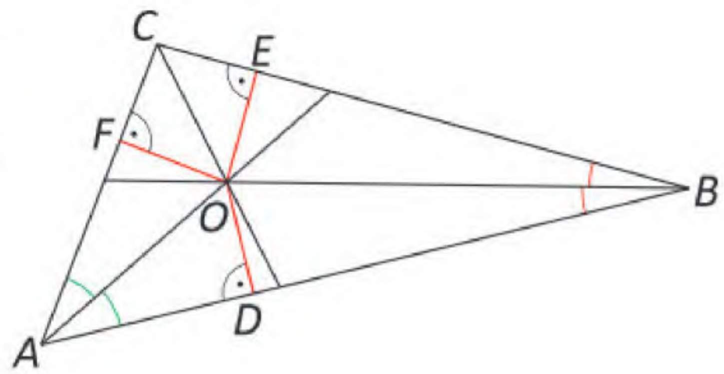
O – punkt przecięcia dwusiecznych kątów CAB i ABC.

Teza:

Punkt O należy do dwusiecznej kąta ACB.



Dowód: Dwusieczna kąta jest zbiorem punktów równoodległych od ramion kąta. Przez punkt O prowadzimy proste prostopadłe do boków AB, BC i AC, które przecinają te boki odpowiednio w punktach D, E, F.



Z własności dwusiecznej $\overrightarrow{AO}$ mamy:

$|OF| = |OD|$.

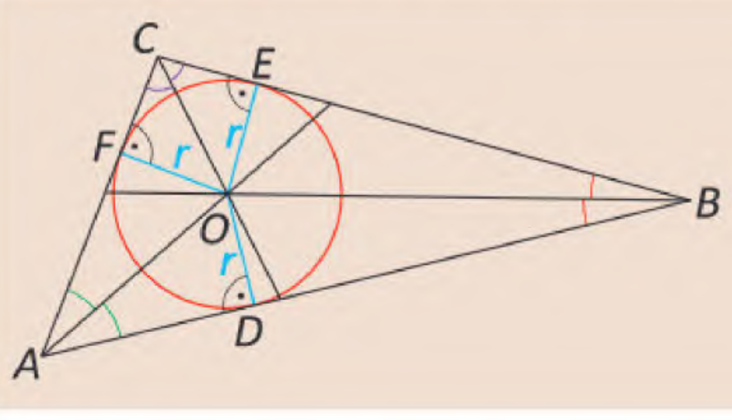
Podobnie z własności dwusiecznej $\overrightarrow{BO}$ wynika, że

$|OD| = |OE|$, zatem $|OE| = |OF|$.

To znaczy, że punkt O jest równoodległy od ramion kąta ACB, czyli punkt O należy do dwusiecznej kąta ACB,

co kończy dowód.

Z dowodu ostatniego twierdzenia wynika, że przez punkty D, E, F można poprowadzić okrąg o środku w punkcie O, styczny do boków tego trójkąta. Odcinki OD, OE, OF są promieniami tego okręgu.



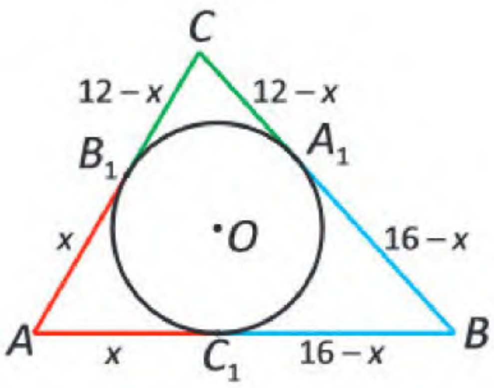
Okrąg, który jest styczny do wszystkich boków trójkąta, nazywamy **okręgiem wpisanym w trójkąt**. Wówczas o trójkącie powiemy, że jest to **trójkąt opisany na okręgu**.

Z twierdzenia 1. wynika, że w każdy trójkąt można wpisać okrąg. Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży zawsze we wnętrzu trójkąta.

Ćwiczenie 3. Narysuj dowolny trójkąt różnoboczny. Skonstruuj za pomocą cyrkla i linijki dwusieczne dwóch kątów tego trójkąta, a następnie narysuj okrąg wpisany w ten trójkąt.

Przykład 2.

W trójkąt ABC o bokach mających długość 12 cm, 14 cm, 16 cm wpisano okrąg. Obliczymy długości odcinków, na jakie podzieliły boki trójkąta punkty styczności z okręgiem.



Przyjmijmy oznaczenia:

$|AB| = 16$ cm

$|BC| = 14$ cm

$|CA| = 12$ cm

A_1, B_1, C_1 – punkty styczności okręgu z trójkątem ABC

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że

$|AB_1| = |AC_1|$, $\quad |BC_1| = |BA_1|$ oraz $\quad |CA_1| = |CB_1|$

Niech $|AB_1| = x$. Wówczas $|AC_1| = x$ oraz

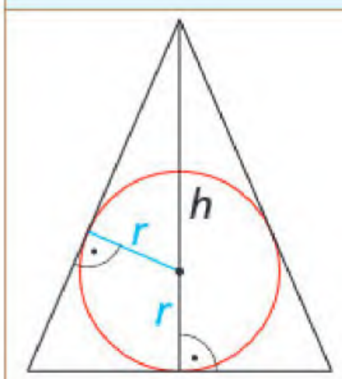
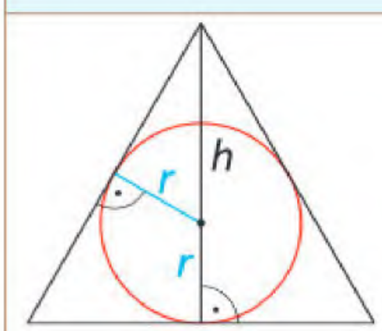
$|BA_1| = |BC_1| = 16 - x$ i $|CA_1| = |CB_1| = 12 - x$, więc

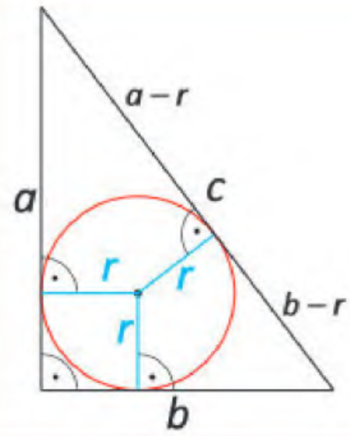
$|BC| = (16 - x) + (12 - x) = 28 - 2x$ oraz $|BC| = 14$, zatem

$28 - 2x = 14$, czyli $-2x = -14$, stąd $x = 7$

Mamy $|AB_1| = |AC_1| = 7$, $|BA_1| = |BC_1| = 9$, $|CA_1| = |CB_1| = 5$.

Punkty styczności podzieliły boki AB, BC i CA odpowiednio na odcinki mające długość: 7 cm i 9 cm, 9 cm i 5 cm oraz 5 cm i 7 cm.

okręgi wpisane w wybrane trójkąty	
trójkąt równoramienny	
 r – promień okręgu wpisanego w trójkąt h – wysokość opuszczona na podstawę	W trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta między ramionami zawiera wysokość opuszczoną na podstawę. Zatem środek okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny leży na wysokości poprowadzonej na podstawę (w przypadku trójkąta nierównobocznego – w innym miejscu niż środek okręgu opisanego na tym trójkącie).
trójkąt równoboczny	
 r – promień okręgu wpisanego w trójkąt h – wysokość $r = \frac{1}{3}h$	W trójkącie równobocznym dwusieczne kątów zawierają wysokości. Tak więc środek okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest punktem przecięcia wysokości w tym trójkącie (i jest też środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie).

trójkąt prostokątny		
	r – promień okręgu wpisanego w trójkąt a, b – przyprostokątne c – przeciwprostokątna $r = \dfrac{a+b-c}{2}$	Punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny z bokami tego trójkąta dzielą te boki w następujący sposób: przyprostokątne a, b na odcinki mające długość $(a-r)$ i r oraz $(b-r)$ i r, natomiast przeciwprostokątną c na odcinki mające długość $(a-r)$ i $(b-r)$.

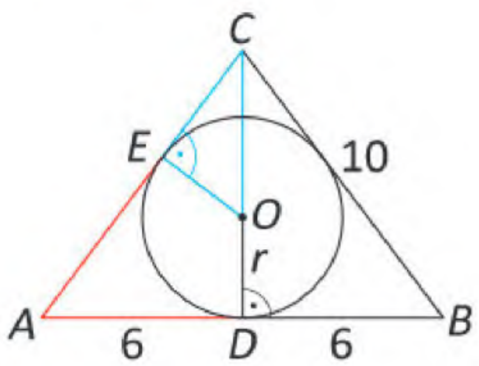
Ćwiczenie 4. Narysuj trójkąt równoramienny o kącie α między ramionami. Następnie ustal, jak są położone względem siebie i względem trójkąta środki okręgów: wpisanego w ten trójkąt i opisanego na tym trójkącie, jeśli:

a) $\alpha \in (0°, 60°)$ b) $\alpha \in (60°, 90°)$ c) $\alpha \in (90°, 180°)$.

Ćwiczenie 5. Wyznacz wysokość trójkąta równobocznego, wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest o 1 cm krótszy od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przykład 3.

Wyznaczymy promień okręgu wpisanego w trójkąt, którego długości boków są równe: 10, 10, 12.



Niech O będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, r – promieniem tego okręgu, D, E – punkty styczności odpowiednio boku AB i boku AC z tym okręgiem. Wówczas:

$|AD| = |DB|$ – z własności trójkąta równoramiennego

$|\sphericalangle BDC| = 90°$

$|\sphericalangle CEO| = 90°$ – z własności stycznej do okręgu

Obliczamy wysokość CD, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$|CD|^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, stąd $|CD| = 8$.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych mamy:

$|AE| = |AD| = 6$.

Wyznaczamy długości boków trójkąta prostokątnego EOC:

$|CE| = 10 - 6 = 4$, $|EO| = r$, $|CO| = 8 - r$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym EOC:

$r^2 + 4^2 = (8-r)^2$ czyli $r^2 + 16 = 64 - 16r + r^2$

$r = 3$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest równy 3.

Ćwiczenie 6. Zastosuj podobieństwo trójkątów ADC i EOC do wyznaczenia promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC w przykładzie 3.

Ćwiczenie 7. Wykaż, że promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a, b i przeciwprostokątnej długości c jest równy $\frac{a+b-c}{2}$.

Przykład 4.

W trójkącie prostokątnym ABC suma długości przyprostokątnych AC i BC jest równa 42 cm. Wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten okrąg jest o 9 cm krótszy od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, wyznaczymy te promienie.

Niech a, b oznaczają długości boków odpowiednio BC i AC, c – długość boku AB. Korzystamy ze wzoru na promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny:

$$r=\frac{a+b-c}{2}, \qquad \text{stąd} \qquad 2r=a+b-c$$

Przeciwprostokątna ma długość c, gdzie $c=2R$. Otrzymujemy:

$2r=a+b-2R$, czyli

$2r+2R=a+b$, zatem $2r+2R=42$.

Na podstawie danych zadania zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2r+2R=42 \\ R-r=9 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} R=15 \\ r=6 \end{cases}$$

Szukane promienie są równe 15 cm i 6 cm.

Twierdzenie 2. *O podziale boku przez dwusieczną kąta wewnętrznego trójkąta*

W dowolnym trójkącie ABC, w którym CD jest odcinkiem dwusiecznej kąta wewnętrznego tego trójkąta, prawdziwa jest równość:

$$\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|CB|}.$$

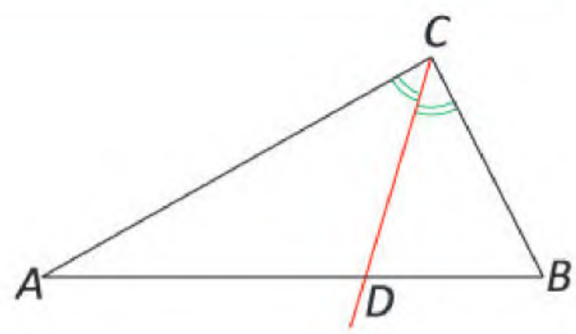
Założenie:

ABC – dowolny trójkąt,

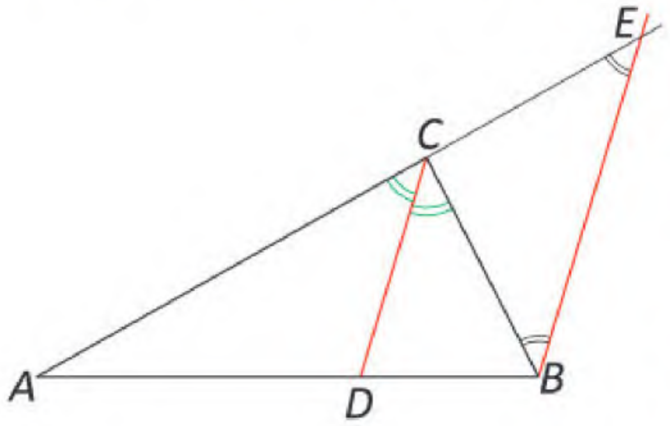
$CD^{\rightarrow}$ – dwusieczna kąta wewnętrznego tego trójkąta

Teza:

$$\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|CB|}$$



Dowód: Przez wierzchołek B trójkąta prowadzimy prostą równoległą do dwusiecznej $CD^{\rightarrow}$. Punkt wspólny tej prostej i prostej AC oznaczamy przez E.



Zauważamy, że:

$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB|$ – z założenia $CD^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ACB

$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CEB|$ – kąty odpowiadające dla pary prostych równoległych CD i EB przeciętych prostą AE

$|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CBE|$ – kąty naprzemianległe wewnętrzne dla pary prostych równoległych CD i EB przeciętych prostą CB.

Z powyższych trzech równości wynika, że

$|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle CBE|$.

Trójkąt CBE jest trójkątem równoramiennym, więc

$|CE| = |CB|$.

Z twierdzenia Talesa dla kąta EAB przeciętego prostymi równoległymi CD i EB otrzymujemy

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CE|}, \quad \text{ale} \quad |CE| = |CB|, \quad \text{więc} \quad \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|} \quad \text{co kończy dowód.}$$

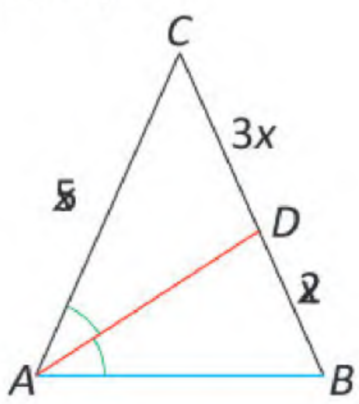
Przykład 5.

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 6 cm. Dwusieczna kąta przy wierzchołku A dzieli ramię BC na odcinki CD i DB, dla których $|CD| : |DB| = 3 : 2$.

a) Obliczymy długość ramienia AC.

b) Wykażemy, że punkt przecięcia dwusiecznych $AD^{\rightarrow}$ i $CE^{\rightarrow}$ dzieli odcinek CE dwusiecznej w stosunku 1 : 3 – licząc od punktu E.

Ad a)



Z warunku $|CD| : |DB| = 3 : 2$ wynika, że istnieje liczba x, $x > 0$, dla której:

$|CD| = 3x$ oraz $|DB| = 2x$.

Wówczas

$|AC| = 5x$, ponieważ $|AC| = |BC|$.

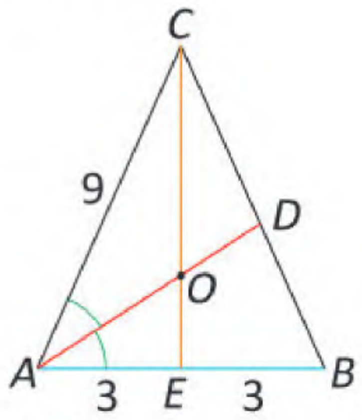
Na mocy twierdzenia 2. otrzymujemy:

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \quad \text{stąd} \quad \frac{3x}{2x} = \frac{5x}{6}, \quad \text{czyli} \quad \frac{3}{2x} = \frac{5}{6}$$

$10x = 18$, więc $x = 1{,}8$ $\qquad |AC| = 5 \cdot 1{,}8 = 9$

Ramię AC ma długość 9 cm.

Ad b)



Wiemy, że $|AB| = 6$, $|AC| = |BC| = 9$,
O – punkt przecięcia dwusiecznych AD i CE.

$|AC| = |BC|$, więc dwusieczna $\overrightarrow{CE}$ zawiera środkową trójkąta ABC. Stąd

$$|AE| = |EB| = 3.$$

Ponieważ $E \in AB$ oraz $O \in AD$, więc AO jest odcinkiem dwusiecznej kąta EAC w trójkącie AEC. Mamy:

$$\frac{|EO|}{|OC|} = \frac{|AE|}{|AC|}$$ – z twierdzenia o dwusiecznej

$$\frac{|EO|}{|OC|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Pokazaliśmy, że $|EO| : |OC| = 1 : 3$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

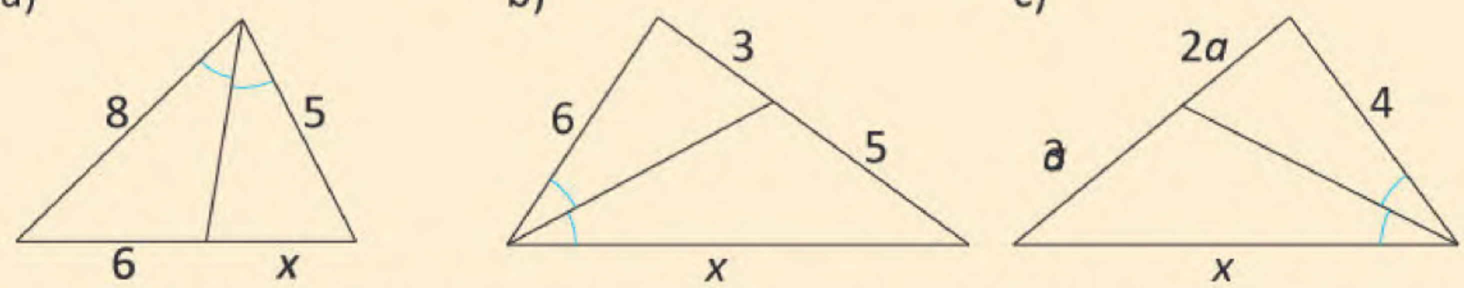
1. Jaką miarę ma kąt rozwarty między dwusiecznymi kątów ostrych w trójkącie prostokątnym?
2. W trójkącie równoramiennym dwusieczne równych kątów przecinają ramiona trójkąta pod kątem $120°$. Oblicz miary kątów tego trójkąta. Rozważ dwa przypadki.
3. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty A_1, B_1, C_1 są punktami styczności tego okręgu, odpowiednio z bokami BC, AC i AB. Wiedząc, że $|B_1C| = 4$ cm, $|C_1B| = 8$ cm i $|AC_1| = 6$ cm, oblicz obwód trójkąta ABC.
4. W trójkąt o bokach długości 4 cm, 5 cm, 6 cm wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności tego okręgu z bokami trójkąta podzieliły te boki.
5. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 15 cm.
6. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy 4 cm. Oblicz:
   a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie b) obwód tego trójkąta.
7. Oblicz dwoma sposobami promień okręgu wpisanego w trójkąt, jeśli jego boki mają długość:
   a) 15 cm, 15 cm, 18 cm b) 17 cm, 17 cm, 30 cm.
8. Wyznacz długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego, wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $2 - \sqrt{2}$.

9. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 9 cm i 12 cm. Oblicz:
   a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
   b) długości odcinków, na jakie punkt styczności tego okręgu z przeciwprostokątną dzieli tę przeciwprostokątną.

10. Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, wiedząc, że suma długości przyprostokątnych jest równa 23 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm.

11. W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych różnią się o 17 cm. Wiedząc, że suma promienia okręgu wpisanego w okrąg i promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 15,5 cm, oblicz:
   a) długości boków trójkąta
   b) promienie tych okręgów.

12. Kąty zaznaczone na rysunku poniżej są równe. Oblicz x.
   a) b) c)



13. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 7,2 cm. Dwusieczna kąta CAB przecina ramię BC w takim punkcie D, że $|BD| = 4$ cm. Oblicz obwód trójkąta ABC.

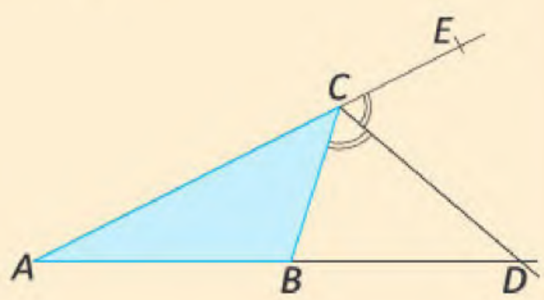
14. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 5 i 12. Jakie długości mają odcinki przeciwprostokątnej, wyznaczone przez dwusieczną kąta prostego?

15. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 5 i 10. Wyznacz długości przyprostokątnych.

16. W trójkącie ABC dwa boki mają długość: $|AB| = 10$, $|AC| = 8$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie E. Przez punkt E poprowadzono prostą równoległą do boku AB, przecinającą bok AC w punkcie D. Oblicz $|DE|$.

17. W trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, dwusieczna $BD^{\rightarrow}$ dzieli ramię AC na odcinki długości 6 i 9, licząc od punktu A.
   a) Oblicz długość podstawy AB.
   b) Niech O będzie punktem przecięcia się dwusiecznych trójkąta ABC. Czy dwusieczna kąta AOC zawiera się w dwusiecznej $BD^{\rightarrow}$?

D 18. Udowodnij twierdzenie: *W dowolnym trójkącie ABC, w którym $CD^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta zewnętrznego ECB i punkt D należy do prostej AB, prawdziwa jest równość* $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AC|}{|CB|}$

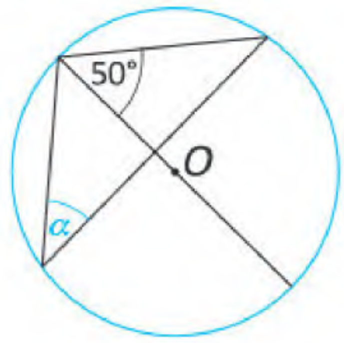


Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4.

Test

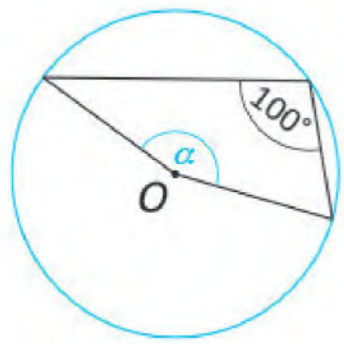
1. W okręgu o promieniu 61 cm poprowadzono cięciwę długości 1,2 m. Odległość cięciwy od środka okręgu jest równa:
   A. 9 cm B. 11 cm C. 21 cm D. 29 cm

2. Kąt α na rysunku obok jest równy:
   A. 40° B. 30°
   C. 25° D. 20°



3. Kąt środkowy wycinka koła o promieniu 5 jest równy 72°. Długość łuku tego wycinka jest równa:
   A. π B. $\pi + 10$ C. 2π D. $2\pi + 10$

4. Kąt α na rysunku obok jest równy:
   A. 100° B. 130°
   C. 160° D. 200°



5. Odcinek stycznej, poprowadzony z punktu A do punktu styczności z okręgiem o promieniu 8 cm, ma długość 15 cm. Odległość punktu A od środka tego okręgu jest równa:
   A. 9 cm B. 10 cm C. 13 cm D. 17 cm

6. Dane są okręgi: $o(A, 6)$ oraz $o(B, 4)$. Jeśli $|AB| = 3$, to te okręgi:
   A. są rozłączne wewnętrznie B. są styczne wewnętrznie
   C. się przecinają D. są styczne zewnętrznie

7. Punkty A, B, C należą do okręgu. Styczna do okręgu w punkcie C przecina się z sieczną AB w punkcie D, przy czym $|BD| < |AD|$. Jeśli $|AB| = 4$ oraz $|BD| = 9$, to:
   A. $|CD| = 3\sqrt{13}$ B. $|CD| = 2\sqrt{13}$ C. $|CD| = 12$ D. $|CD| = 6$

8. W trójkąt równoramienny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z ramieniem trójkąta podzielił to ramię na odcinki długości 3 cm i 4 cm, licząc od wierzchołka przy podstawie. Obwód tego trójkąta jest równy:
   A. 22 cm B. 21 cm C. 20 cm D. 18 cm

9. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 6 i 8 jest równy:
   A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

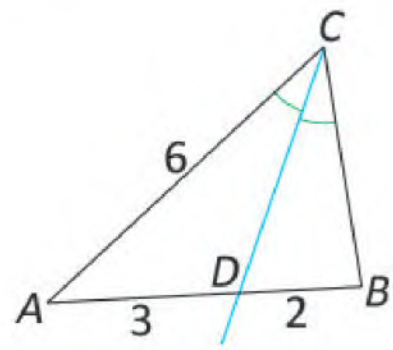
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

10. Różnica między promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, a promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa 1. Bok tego trójkąta ma długość:

A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{3}$

11. Półprosta $\overrightarrow{CD}$ na rysunku obok jest dwusieczną kąta ACB. Jeśli $|AC| = 6$, $|AD| = 3$ i $|DB| = 2$, to bok BC trójkąta ABC ma długość:

A. 3 B. 3,5
C. 4 D. 4,5



12. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12 jest równy:

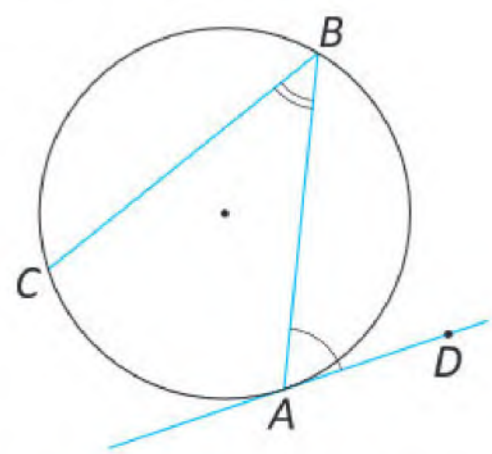
A. 2 B. 3 C. 5 D. 6,5

Zadania otwarte

13. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość $6\sqrt{3}$. Punkt C jest środkiem okręgu o promieniu 3, stycznego do podstawy AB w punkcie D. Oblicz:
   a) długość ramion trójkąta ABC,
   b) długość cięciwy, której końcami są punkty przecięcia okręgu z ramionami trójkąta ABC,
   c) długość łuku okręgu, zawartego w trójkącie ABC.

14. Dwa okręgi o promieniu 4 cm są styczne zewnętrznie do siebie i jednocześnie styczne wewnętrznie do trzeciego okręgu. Wiedząc, że środki tych okręgów są wierzchołkami trójkąta równobocznego, oblicz długość trzeciego okręgu.

15. Punkty A, B, C należą do okręgu, zobacz rysunek obok. Kąt DAB dopisany do okręgu jest równy $65°$, a kąt wpisany ABC jest równy $45°$. Wyznacz stosunek długości łuków, na jakie punkty A, B, C dzielą okrąg.



16. Przez punkt P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie C oraz sieczną okręgu przechodzącą przez środek O tego okręgu, która przecina okrąg w punktach A i B, kolejno od punktu P. Wiedząc, że $|\sphericalangle CPA| = 38°$, oblicz miary kątów trójkąta ABC.

17. Cięciwy AB i CD mają długość: $|AB| = 11$ cm, $|CD| = 10$ cm. Punkt P przecięcia tych cięciw dzieli je w taki sposób, że $|PD| = 2|PB|$. Oblicz $|AP|$, $|PB|$, $|CP|$, $|PD|$.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

18. Prosta PC jest styczna do okręgu w punkcie C. Z punktu P poprowadzono prostą, która przecina okrąg kolejno w punktach A i B. Wiedząc, że $|PC| = \sqrt{75}$ oraz $|PA| : |AB| = 3 : 2$, oblicz:
    a) długość odcinków PA i AB,
    b) stosunek długości cięciw BC i AC.

19. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 15 cm i 20 cm. Dłuższa przyprostokątna jest średnicą okręgu o. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez ten okrąg na przeciwprostokątnej tego trójkąta.

20. Punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta prostokątnego znajduje się w odległości odpowiednio 8 cm i 15 cm od przyprostokątnych. Oblicz:
    a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
    b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

21. Sprawdź, czy trójkąt o bokach 8, 5, 5 jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. Następnie wyznacz odległość środka okręgu opisanego na tym trójkącie od środka ciężkości tego trójkąta.

D 22. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Niech punkty A, B będą punktami styczności tego okręgu z przyprostokątnymi, a punkt C – z przeciwprostokątną tego trójkąta. Wykaż, że $|\sphericalangle ACB| = 45°$.

23. W trójkąt równoramienny ABC wpisano okrąg, który jest styczny do ramion w punktach D i E. Wiedząc, że $|AB| = 16$ cm, $|AC| = |BC| = 17$ cm, oblicz długość odcinka DE.

24. Boki trójkąta równoramiennego ABC mają długość: $|AB| = 18$ cm, $|AC| = |BC| = 15$ cm. W trójkąt wpisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu, równoległą do podstawy AB i przecinającą boki AC i BC w punktach D i E. Oblicz długość odcinka DE.

25. Przyprostokątne AB i AC trójkąta prostokątnego mają odpowiednio długość 8 i 6. Dwusieczna najmniejszego kąta przecina przeciwległy bok w punkcie D. Oblicz $|AD|$ i $|DC|$.

26. Skonstruuj kąt o mierze równej:
    a) 15°   b) 120°   c) 135°

27. Dany jest odcinek długości a. Skonstruuj odcinek mający długość:
    a) $a\sqrt{3}$ b) $a\sqrt{7}$ c) $\frac{\sqrt{2}a}{3}$

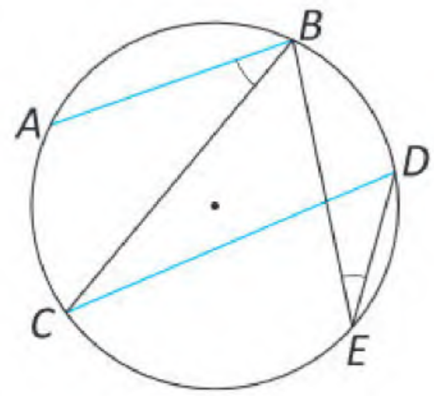
28. Dany jest odcinek długości a. Skonstruuj sześciokąt foremny, którego najdłuższa przekątna ma długość a.

29. Skonstruuj trójkąt ABC, mając długość boku AB i dwie wysokości AD i BE.

30. Skonstruuj romb, mając dane długości jego przekątnych a i b.

31. Długości boków trójkąta wyrażają się liczbami pierwszymi. Wiedząc, że obwód trójkąta jest równy 8, oblicz:
   a) długości poszczególnych boków,
   b) długości odcinków, na jakie punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt dzielą boki trójkąta.

D 32. Kąty ABC i BED są wpisane w ten sam okrąg, jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BED|$, to cięciwy AB i CD są równoległe.



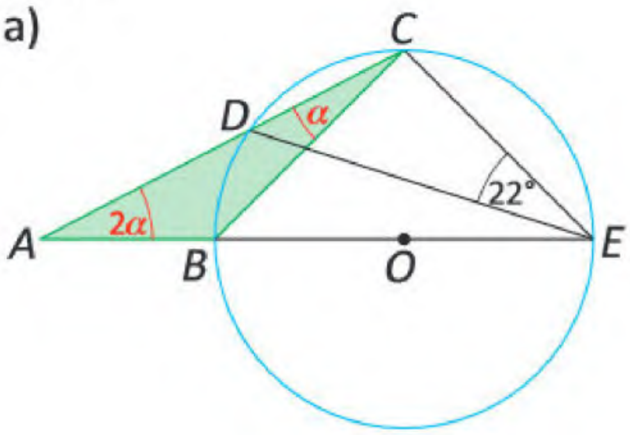
33. Odległość między środkami okręgów $o(A,\ 3)$ oraz $o(B,\ 5)$ jest równa $10 + 2a$, gdzie $a \geqslant -5$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi:
   a) są rozłączne zewnętrznie
   b) są rozłączne wewnętrznie.

34. Odległość między środkami okręgów $o(A, m+2)$ oraz $o(B, 10-2m)$ jest równa 3. Oblicz wartość m, dla której te okręgi mają tylko jeden punkt wspólny. Dla wyznaczonej wartości m podaj promienie tych okręgów.

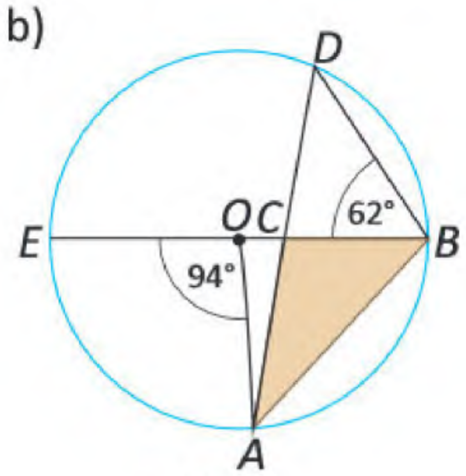
35. Odległość między środkami okręgów $o(A, 2m)$ oraz $o(B, 6-m)$ jest równa 9. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których te okręgi mają dwa punkty wspólne.

36. Punkt O jest środkiem okręgu. Wykorzystując dane na rysunku wyznacz kąty trójkąta ABC.

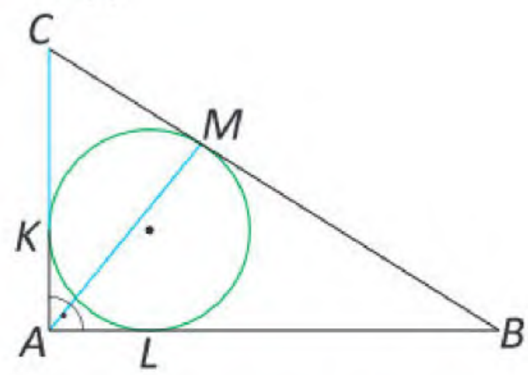
a)



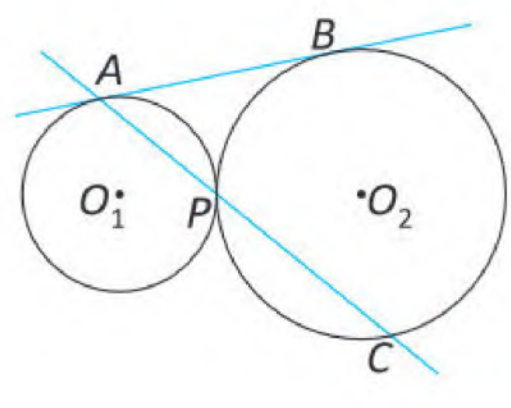
b)



D 37. Na rysunku obok trójkąt ABC jest prostokątny. Punkty K, L, M to punkty wspólne boków trójkąta ABC i okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykaż, że jeśli $|CK| = |AM|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.



38. Dwa okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta AB jest styczna do okręgu o_1 w punkcie A i do okręgu o_2 w punkcie B. Sieczna AP przecina okrąg o_2 w punktach P i C, jak na rysunku obok.
   D a) Wykaż, że cięciwa BC jest średnicą okręgu o_2.
   b) Wiedząc, że $|AB| = 10$ oraz $|PB| = 8$, oblicz promień okręgu o_2.

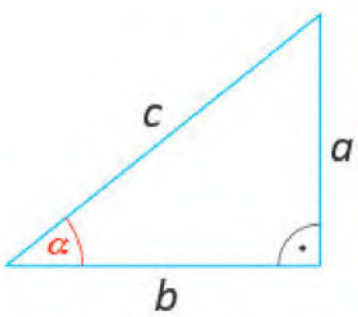


5. Trygonometria

Trygonometria kąta ostrego – powtórzenie wiadomości z klasy 1.

Definicja 1.
W trójkącie prostokątnym dany jest kąt ostry α.

a) **Sinusem kąta ostrego** α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej.
b) **Cosinusem kąta ostrego** α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej.
c) **Tangensem kąta ostrego** α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do drugiej przyprostokątnej.
d) **Cotangensem kąta ostrego** α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do drugiej przyprostokątnej.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

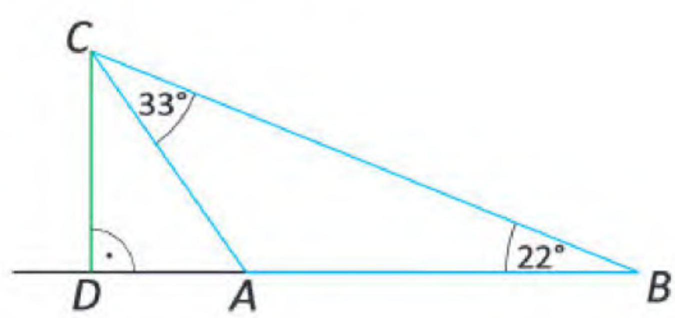
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

UWAGA: Definicja sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa nie zależy od wyboru trójkąta prostokątnego o kącie ostrym α, ponieważ wszystkie takie trójkąty są podobne i stosunki długości odpowiednich boków w tych trójkątach są równe.

Sinus i cosinus kąta ostrego to liczby z przedziału $(0, 1)$, natomiast tangens i cotangens kąta ostrego – to liczby z przedziału $(0, +\infty)$.

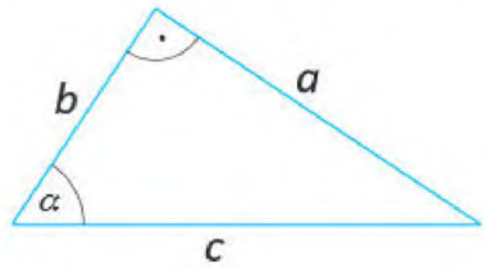
Ćwiczenie 1. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 8 cm i 15 cm. Oblicz funkcje trygonometryczne najmniejszego kąta w tym trójkącie.

Ćwiczenie 2. Oblicz długości boków trójkąta *ABC* na rysunku obok, wiedząc, że wysokość *CD* jest równa 8,19 cm. Skorzystaj z przybliżonych wartości odpowiednich funkcji trygonometrycznych danych na końcu podręcznika.



Przykład 1.

W trójkącie prostokątnym na rysunku obok tangens kąta α jest równy 1,5. Obliczymy wartość ułamka $\frac{4a-b}{a+2b}$.

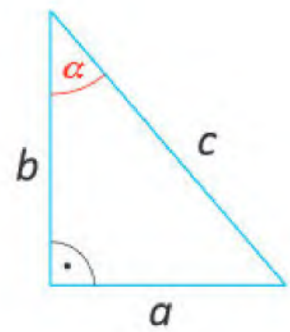


Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = 1{,}5$, czyli $a = 1{,}5b$. Obliczamy wartość wyrażenia, dokonując podstawienia $1{,}5b$ w miejsce a:

$$\frac{4a-b}{a+2b} = \frac{4\cdot 1{,}5b-b}{1{,}5b+2b} = \frac{5b}{3{,}5b} = \frac{10}{7}$$

Wartość ułamka jest równa $\frac{10}{7}$.

Ćwiczenie 3. Wiedząc, że sinus kąta α w trójkącie prostokątnym na rysunku obok jest równy $\frac{3}{5}$, oblicz wartość wyrażenia:



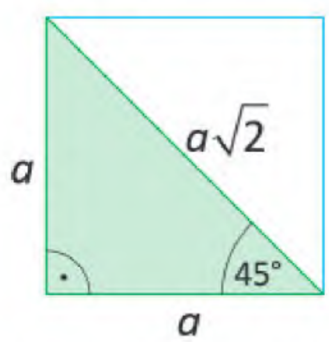
a) $\frac{c^2-a^2}{c^2}$ b) $\frac{b}{c}$ c) $\frac{11c-5a}{5a+c}$

Ćwiczenie 4. Skonstruuj w trójkącie prostokątnym kąt ostry α, jeśli:

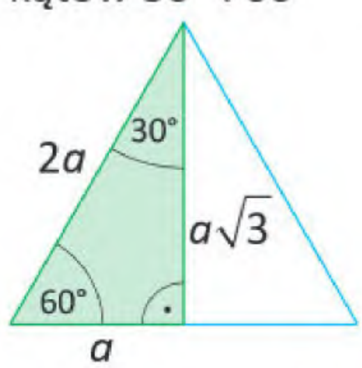
a) $\operatorname{tg}\alpha = 4$ b) $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}5$ c) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ d) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

Ćwiczenie 5. Korzystając z danych na rysunku poniżej, oblicz wartości funkcji trygonometrycznych:

a) kąta 45°



b) kątów 30° i 60°



Sporządź tabelę wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45°, 60°.

Ćwiczenie 6. Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 60°\cdot \operatorname{tg} 45°\cdot \cos 30°\cdot \operatorname{ctg} 45°\cdot \operatorname{tg}^2 30°$.

W klasie pierwszej ustaliliśmy, że wraz ze wzrostem kąta ostrego:

- rośnie wartość sinusa i tangensa,
- maleje wartość cosinusa i cotangensa.

Jeżeli $0° < \alpha < \beta < 90°$, to:
a) $\sin\alpha < \sin\beta$ i $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$,
b) $\cos\alpha > \cos\beta$ i $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$.

Przykład 2.

a) Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}9$ i α jest kątem ostrym, to $\alpha \in (30°, 45°)$, ponieważ $\operatorname{tg} 30° < 0{,}9 < \operatorname{tg} 45°$

b) $\cos 50° \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ponieważ $\cos 60° < \cos 50° < \cos 45°$

Ćwiczenie 7. Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 20°, \frac{1}{2}, \cos 85°$

b) $\sin 70°, \operatorname{tg} 45°, \cos 40°, \operatorname{ctg} 30°$.

Twierdzenie 1. *Podstawowe tożsamości trygonometryczne*

Jeśli α jest kątem ostrym, to:
1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,
4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Przykład 3.

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i α jest kątem ostrym, obliczymy $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$.

<u>I sposób</u> – Korzystamy z tożsamości trygonometrycznych.
Z jedynki trygonometrycznej obliczamy $\cos\alpha$:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \quad \vee \quad \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

Ale cosinus kąta ostrego jest dodatni, więc $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Wówczas

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$$ – z twierdzenia 1.2 i 1.4

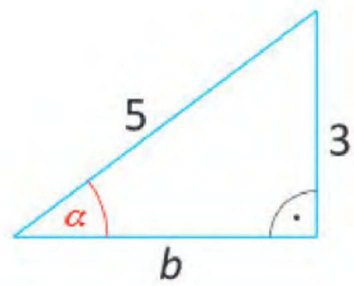
Otrzymaliśmy, że $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

<u>II sposób</u> – Korzystamy z konstrukcji trójkąta prostokątnego, którego jednym z kątów jest kąt ostry α.

Konstruujemy na przykład trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości 3 i przeciwprostokątnej długości 5. Wówczas kąt naprzeciw danej przyprostokątnej ma miarę α.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość drugiej przyprostokątnej:

$$b^2 = 25 - 9 = 16, \quad \text{stąd} \quad b = 4.$$



Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy:

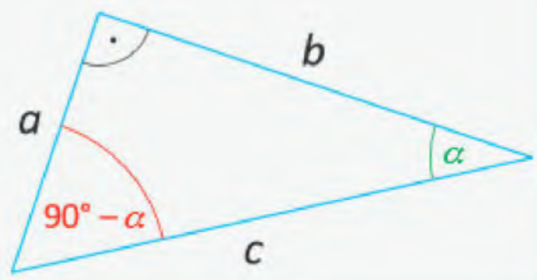
$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}.$$

Ćwiczenie 8. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, oblicz dwoma sposobami wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α.

Twierdzenie 2.

Jeśli α jest kątem ostrym, to:

1) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$,
2) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$,
3) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$,
4) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.



Przykład 4.

a) $\sin^2 41° + \sin^2 49° = \sin^2 41° + [\sin(90° - 41°)]^2 = \sin^2 41° + \cos^2 41° = 1$

b) $\operatorname{ctg} 77° \cdot \operatorname{ctg} 13° = \operatorname{ctg}(90° - 13°) \cdot \operatorname{ctg} 13° = \operatorname{tg} 13° \cdot \operatorname{ctg} 13° = 1$

Ćwiczenie 9. Oblicz:

a) $\cos^2 28° + \cos^2 62°$

b) $\operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 50° \cdot \operatorname{tg} 60°$

Przykład 5.

Wykażemy, że jeśli $\alpha \in (0°, 45°) \cup (45°, 90°)$, to zależność

$$\frac{\cos^2(90°-\alpha)-\cos^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2(90°-\alpha)}=\sin^2\alpha\cdot\sin^2(90°-\alpha)$$

jest tożsamością trygonometryczną.

$$L=\frac{\cos^2(90°-\alpha)-\cos^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2(90°-\alpha)}\underset{\substack{\text{tw. 2.2}\\ \text{tw. 2.3}}}{\overset{}{\downarrow}}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}\underset{\substack{\text{tw. 1.2}\\ \text{tw. 1.3}}}{\downarrow}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\frac{\sin^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}}\underset{\substack{\text{wzór}\\ \text{na różnicę}\\ \text{kwadratów}}}{\downarrow}=\frac{\cancelto{1}{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cancelto{1}{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}\underset{\text{tw. 1.1}}{\downarrow}=$$

$$=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot\sin^2(90°-\alpha)=P$$

Wykazaliśmy, że lewa strona równa się prawej dla dowolnego kąta α z podanego zakresu, więc rozpatrywana równość jest tożsamością trygonometryczną

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{6}{5}$, oblicz:

   a) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ b) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$

2. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{5}{6}$, oblicz:

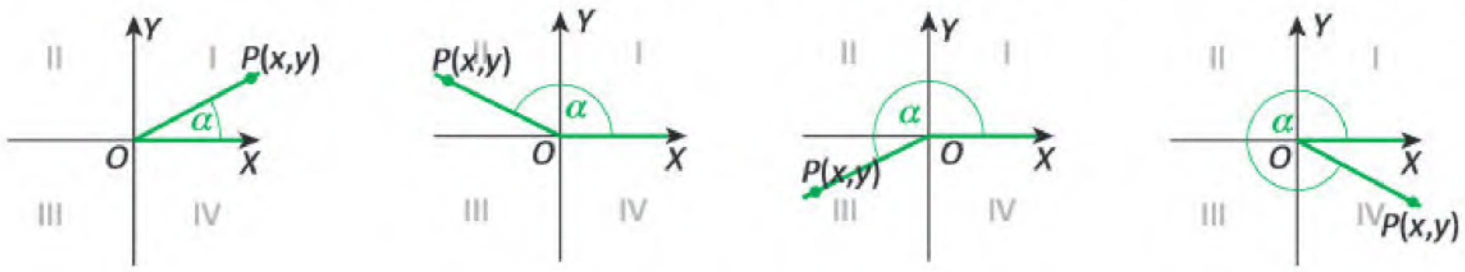
   a) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$ b) $\mathrm{tg}^4\alpha+\mathrm{ctg}^4\alpha$

D 3. Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość:
   a) $[\sin\alpha-\sin(90°-\alpha)]^2+[\cos\alpha+\cos(90°-\alpha)]^2=2$,
   b) $\mathrm{ctg}\,(90°-\alpha)-\mathrm{ctg}\,\alpha=(\mathrm{tg}\,\alpha-1)\cdot[\mathrm{tg}\,(90°-\alpha)+1]$.

4. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$, wiedząc, że $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{7}{5}$.

Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta płaskiego

Załóżmy, że mamy dany dowolny kąt płaski α. Umieszczamy ten kąt w układzie współrzędnych w następujący sposób. Jedno ramię kąta, które będziemy nazywać pierwszym ramieniem kąta, pokrywa się z dodatnią półosią *OX*. Drugie ramię znajduje się w pierwszej lub drugiej ćwiartce układu współrzędnych – jeśli kąt α jest wypukły – albo w trzeciej lub czwartej ćwiartce układu współrzędnych – jeśli kąt α jest wklęsły.



O tak umiejscowionym kącie powiemy, że jest w położeniu standardowym.

Definicja 1.

Niech dany będzie kąt α w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu tego kąta wybieramy dowolny punkt $P(x, y)$ różny od punktu $O(0, 0)$.

a) **Tangensem kąta α** nazywamy liczbę będącą ilorazem rzędnej punktu *P* przez odciętą tego punktu; jeśli odcięta punktu *P* jest równa 0, to tangens kąta α nie istnieje.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x} \qquad x \neq 0$$

b) **Cotangensem kąta α** nazywamy liczbę będącą ilorazem odciętej punktu *P* przez rzędną tego punktu; jeśli rzędna tego punktu jest równa 0, to cotangens kąta α nie istnieje.

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \qquad y \neq 0$$

c) **Sinusem kąta α** nazywamy liczbę będącą ilorazem rzędnej punktu *P* przez odległość punktu *P* od początku układu współrzędnych.

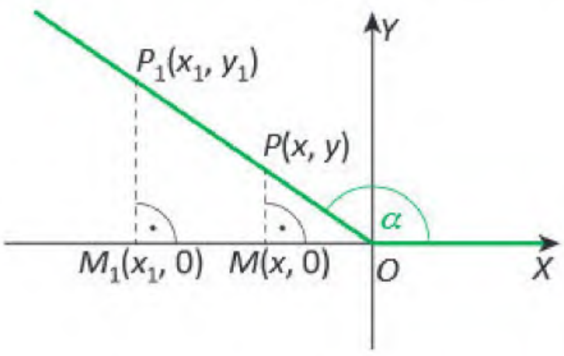
$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

d) **Cosinusem kąta α** nazywamy liczbę będącą ilorazem odciętej punktu *P* przez odległość punktu *P* od początku układu współrzędnych.

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Z definicji 1. wynika, że:
a) nie istnieje tangens 90° i tangens 270°,
b) nie istnieje cotangens 0° i cotangens 180°,
c) sinus i cosinus są określone dla dowolnego kąta.

UWAGA: Definicja sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kąta α nie zależy od wyboru punktu P na drugim ramieniu kąta.
Jeśli bowiem na końcowym ramieniu kąta α wybierzemy punkt $P_1(x_1, y_1)$, to:
1) liczby x, x_1 (podobnie y, y_1) mają takie same znaki,
2) rzuty prostokątne M i M_1 punktów P i P_1 na oś OX wyznaczają dwa odcinki PM i P_1M_1, równoległe do siebie. Z twierdzenia Talesa wynikają równości:

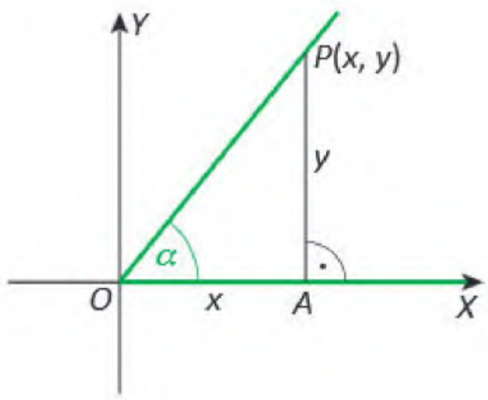


- $\frac{|PM|}{|OM|} = \frac{|P_1M_1|}{|OM_1|}$, więc $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$ oraz $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$
- $\frac{|PM|}{|OP|} = \frac{|P_1M_1|}{|OP_1|}$, więc $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$
- $\frac{|OM|}{|OP|} = \frac{|OM_1|}{|OP_1|}$, więc $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$.

UWAGA: Jeśli α jest kątem ostrym, większym od 0°, to definicja 1. jest równoważna definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

Załóżmy bowiem, że kąt ostry α jest w położeniu standardowym. Wówczas drugie ramię kąta znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Na drugim ramieniu kąta α wybieramy punkt $P(x, y)$ różny od punktu $O(0, 0)$. Rozważmy trójkąt prostokątny OAP, jak na rysunku obok. Wtedy:



$|OA| = x \qquad |AP| = y$ — $x > 0$ i $y > 0$

$|OP| = \sqrt{x^2+y^2}$ — z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OAP

Mamy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{|AP|}{|OA|} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{|OA|}{|AP|}$$

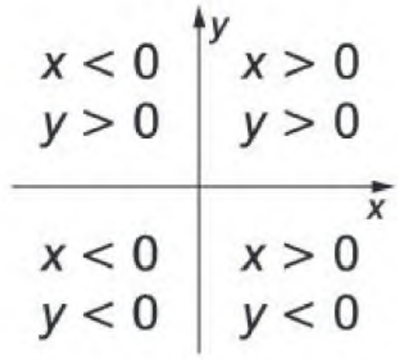
$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|AP|}{|OP|} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|OA|}{|OP|}$$

Możemy zatem powiedzieć, że podana w tym temacie definicja 1. rozszerza definicję funkcji trygonometrycznych kąta ostrego na przypadek dowolnego kąta płaskiego.

Ćwiczenie 1. Kąt α znajduje się w położeniu standardowym. Wiadomo, że na drugim ramieniu tego kąta leży punkt $P(-5, 12)$. Oblicz sinus, cosinus, tangens i cotangens kąta α.

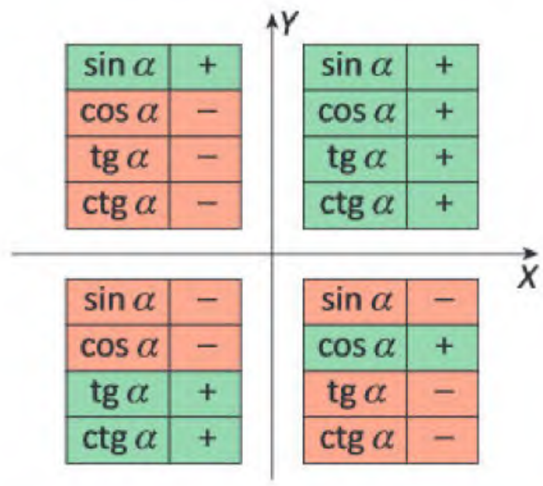
UWAGA: Znaki wartości funkcji trygonometrycznych kąta α zależą od tego, w której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się drugie ramię tego kąta.

Ponieważ dla dowolnego punktu $P(x, y)$ różnego od punktu $O(0, 0)$ wyrażenie $\sqrt{x^2 + y^2}$ jest liczbą dodatnią, to znaki wartości funkcji trygonometrycznych zależą od współrzędnych punktu P. Jeśli drugie ramię kąta α znajduje się:



a) w I ćwiartce układu współrzędnych, to $x > 0$ i $y > 0$.
   Wtedy wszystkie funkcje trygonometryczne kąta α są dodatnie.
b) w II ćwiartce układu współrzędnych, to $x < 0$ i $y > 0$.
   Wtedy sinus α jest dodatni, a pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α są ujemne.
c) w III ćwiartce układu współrzędnych, to $x < 0$ i $y < 0$.
   Wtedy tangens α i cotangens α są dodatnie, natomiast sinus α i cosinus α są ujemne.
d) w IV ćwiartce układu współrzędnych, to $x > 0$ i $y < 0$.
   Wtedy cosinus α jest dodatni, a pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych są ujemne.

Zapamiętanie, jakie są znaki wartości funkcji trygonometrycznych, ułatwia poniższa „rymowanka”:



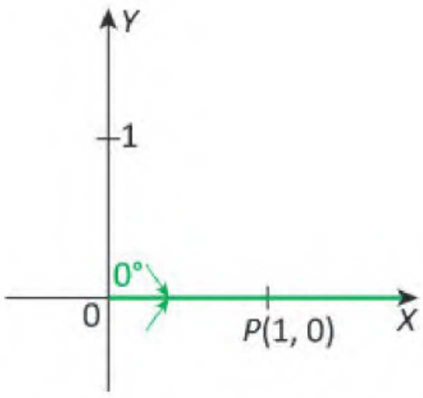
W pierwszej wszystkie są dodatnie
w drugiej – tylko sinus
w trzeciej tangens i cotangens
a w czwartej – cosinus.

Przykład 1.

Posługując się definicją 1. obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kątów:

a) $0°$ b) $90°$

Ad a) Niech kąt $0°$ będzie w położeniu standardowym. Wówczas oba ramiona kąta będą się pokrywać z dodatnią półosią OX. Na drugim ramieniu kąta, czyli na dodatniej półosi OX, wybieramy dowolny punkt, np. $P(1, 0)$. Wiesz już, że nie istnieje cotangens $0°$.

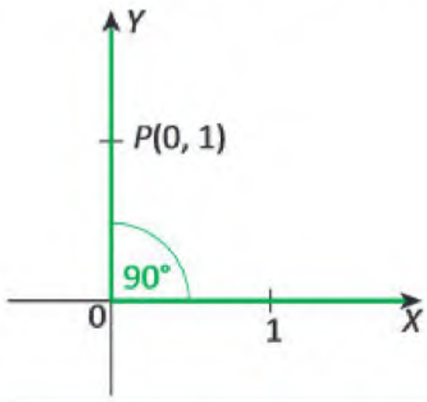


Obliczamy:

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin 0^\circ = \frac{0}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ad b) Kąt 90° umieszczamy w położeniu standardowym. Drugie ramię tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią *OY*. Wybieramy na nim dowolny punkt, np. $P(0, 1)$. Nie istnieje tangens 90°.



Mamy:

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin 90^\circ = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{0}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ćwiczenie 2. Posługując się definicją 1., oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów:

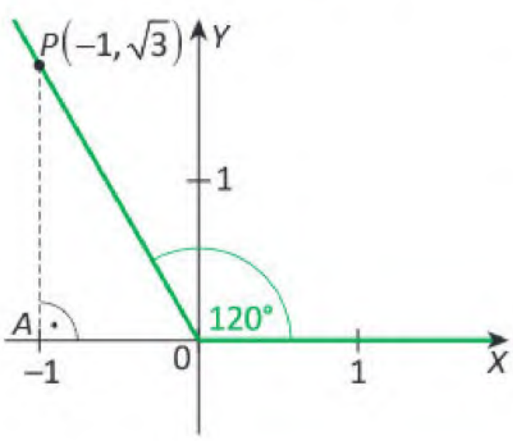
a) 180° b) 270°

Wniosek:
- sinus α oraz cosinus α to liczby należące do przedziału $\langle -1, 1\rangle$,
  $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ oraz $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$
- tangens α i cotangens α mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Przykład 2.

Posługując się definicją 1., obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.

Załóżmy, że kąt 120° jest w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu kąta wygodnie jest wybrać punkt *P* tak, aby jego pierwsza współrzędna była równa –1. Aby wyznaczyć drugą współrzędną tego punktu, rozważmy trójkąt prostokątny *AOP*, jak na rysunku poniżej.



Zauważamy, że $|\sphericalangle AOP| = 60^\circ$.
Trójkąt *AOP* jest „połową" trójkąta równobocznego, stąd

$$|PA| = \sqrt{3}\cdot|AO| = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$$

Otrzymujemy:

$$P\left(-1, \sqrt{3}\right).$$

Obliczamy:

$$\text{tg } 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \qquad \text{ctg } 120° = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 120° = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{-1}{2}$$

Ćwiczenie 3. Postępując analogicznie jak w przykładzie 2., wykaż, że $\text{tg } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg } 150° = -\sqrt{3}$, $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Ćwiczenie 4. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 135°, znajdującego się w położeniu standardowym.

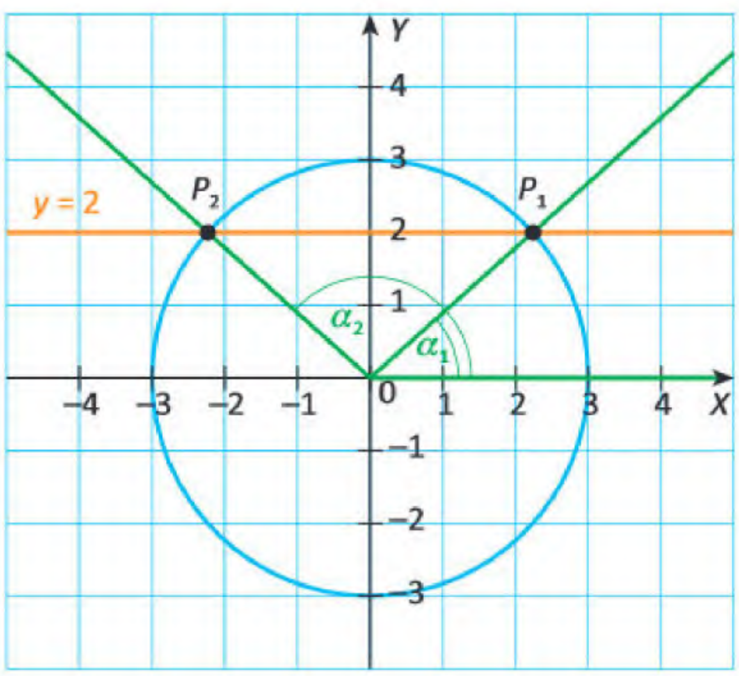
Przykład 3.

Skonstruujemy w układzie współrzędnych kąt α, dla którego:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ b) $\text{tg } \alpha = 2$

Ad a) Możemy skonstruować punkt P leżący na drugim ramieniu szukanego kąta, spełniający dwa warunki:

1) druga współrzędna punktu P jest równa 2,
2) odległość punktu P od punktu $O(0, 0)$ jest równa 3.



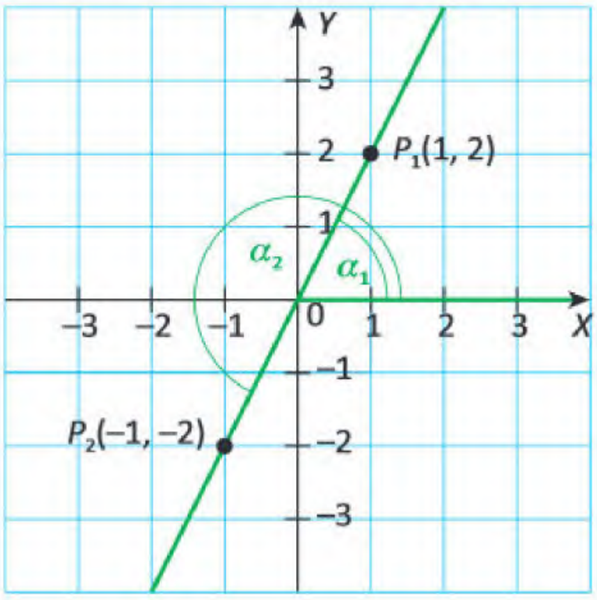
Punkty spełniające warunek 1) tworzą prostą $y = 2$. Punkty spełniające warunek 2) wyznaczają okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 3.

Kreślimy prostą i okrąg. Figury te przecinają się w punktach P_1 i P_2. Punkty P_1 i P_2 wyznaczają dwa kąty w położeniu standardowym: jeden ostry α_1 i drugi rozwarty α_2.

Zadanie ma dwa rozwiązania.

Ad b) W tym przypadku wystarczy skonstruować taki punkt P, którego współrzędne (x, y) spełniają warunek:

$$\frac{y}{x} = 2, \quad \text{czyli} \quad y = 2x$$



Kreślimy prostą o równaniu $y = 2x$.

Jeśli wybierzemy punkt, którego obie współrzędne są dodatnie, np. $P_1(1, 2)$, to wyznaczy on kąt ostry α_1.

Jeśli wybierzemy punkt, który ma obie współrzędne ujemne, np. $P_2(-1, -2)$, to wyznaczy on kąt wklęsły α_2.

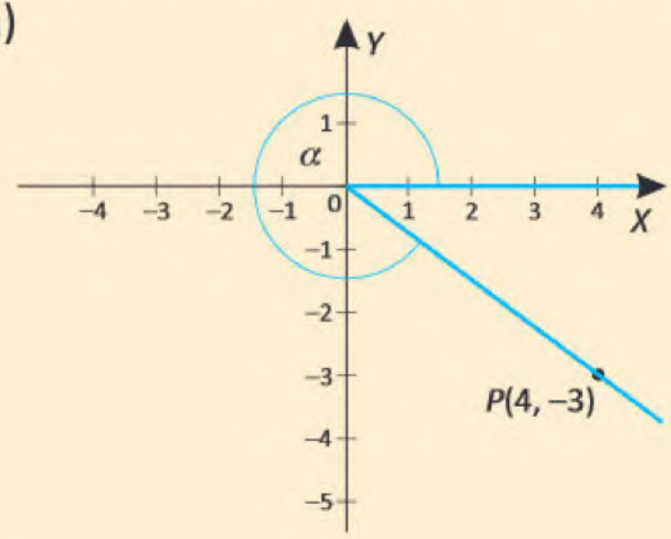
Zadanie ma dwa rozwiązania.

Ćwiczenie 5. Jaka jest zależność między kątami α_1 i α_2 z przykładu 3. w podpunkcie a), a jaka w podpunkcie b)?

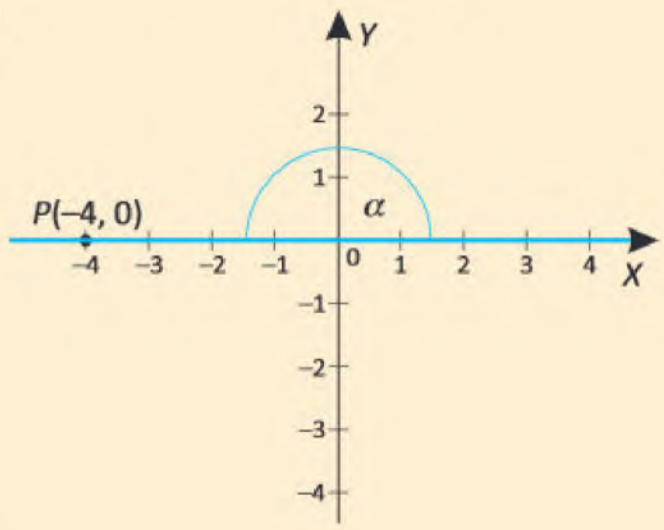
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli istnieją.

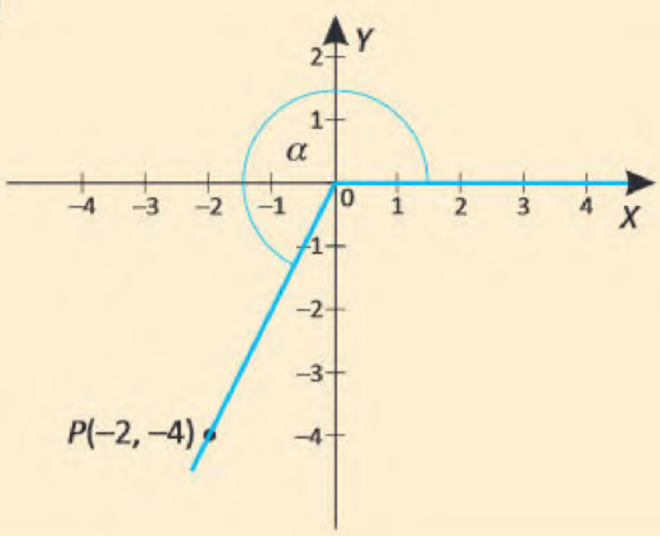
a)



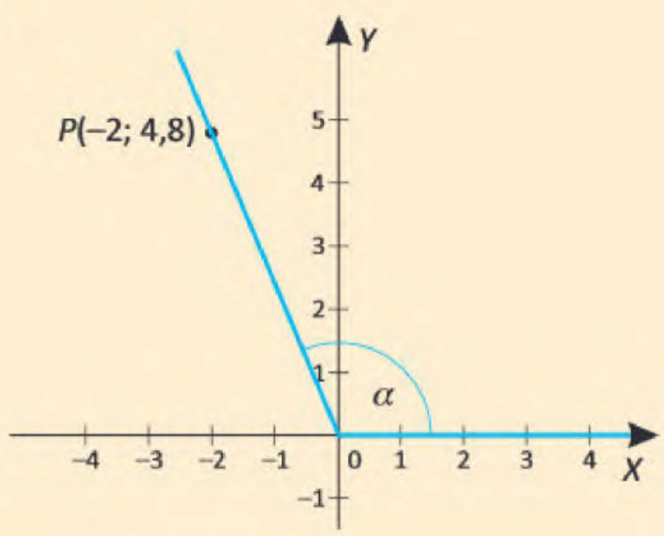
b)



c)



d)



2. Na drugim ramieniu kąta α w położeniu standardowym leży punkt P, którego odległość od początku układu współrzędnych jest równa 15. Wyznacz współrzędne punktu P, jeśli:
   a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\alpha \in (90°, 180°)$
   b) $\cos\alpha = \frac{-1}{5}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$

3. Na drugim ramieniu kąta α w położeniu standardowym leży punkt $P(x, -4)$. Oblicz x, wiedząc, że:
   a) $\operatorname{tg}\alpha = 8$
   b) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$
   c) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$
   d) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

   W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się drugie ramię kąta α?

4 Wyznacz na podstawie definicji wartości funkcji trygonometrycznych kąta:
   a) 225°
   b) 210°
   c) 240°
   d) 315°

5. W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się drugie ramię kąta α w położeniu standardowym, jeśli:
   a) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha > 0$
   b) $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$?

6. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt o mierze α, $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, wiedząc, że:
   a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$
   b) $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$
   c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-1}{3}$
   d) $\operatorname{ctg}\alpha = 4$

   Podaj wszystkie możliwe rozwiązania.

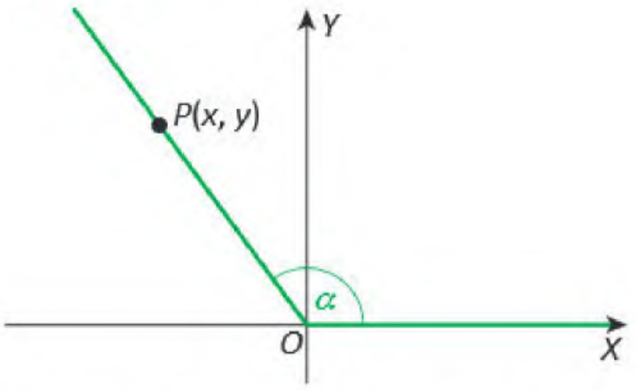
7. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt o mierze α, jeśli:
   a) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$ i $\alpha \in (270°, 360°)$
   b) $\sin\alpha = \frac{-2}{5}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$
   c) $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$ i $\alpha \in (90°, 180°)$
   d) $\operatorname{tg}\alpha = 5$ i $\alpha \in (180°, 360°)$

8. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt o mierze α, $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, jeśli:
   a) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$
   b) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}5$ i $\sin\alpha > 0$
   c) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{ctg}\alpha < 0$
   d) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\cos\alpha < 0$

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Przypomnijmy: **tożsamością trygonometryczną** nazywamy zależność, w której zmienne występują wyłącznie w argumentach funkcji trygonometrycznych i która jest prawdziwa dla wszystkich wartości tych zmiennych, dla których funkcje są określone.

Mamy:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Z definicji tangensa α i cotangensa α wynika, że dla wszystkich kątów, dla których $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ są określone, prawdziwa jest zależność:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$$

Jeśli podzielimy $\sin\alpha$ przez $\cos\alpha$, $\cos\alpha \neq 0$, to otrzymamy kolejną zależność:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} : \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

Podobnie, jeśli $\sin\alpha \neq 0$, to:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$

Ustalmy teraz związek między sinusem α i cosinusem α:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

Otrzymaliśmy **jedynkę trygonometryczną**:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Twierdzenie 1.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, jeśli $\alpha \in \langle 0°, 360° \rangle$,
2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, jeśli $\alpha \in \langle 0°, 360° \rangle$ i $\alpha \neq 90°$ i $\alpha \neq 270°$,
3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, jeśli $\alpha \in (0°, 360°)$ i $\alpha \neq 180°$,
4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, jeśli $\alpha \in (0°, 360°)$ i $\alpha \neq 90°$ i $\alpha \neq 180°$ i $\alpha \neq 270°$.

Ćwiczenie 1. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α, wiedząc, że tg $\alpha = -5$. Ile rozwiązań ma to zadanie? Jakie znaki mają wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α?

Przykład 1.

Wiedząc, że tg $\alpha = -5$, obliczymy $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, ctg α.

Tangens α jest ujemny, jeśli $\alpha \in (90°, 180°) \cup (270°, 360°)$. (II ćw. i IV ćw.)
Najpierw obliczymy ctg α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}$$

Aby obliczyć $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, korzystamy ze wzorów 1) i 2) twierdzenia 1.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{oraz}$$

$$-5 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Z drugiej zależności otrzymujemy:

$$\sin\alpha = -5 \cdot \cos\alpha.$$

Dokonujemy podstawienia $(-5 \cdot \cos\alpha)$ do pierwszego wzoru w miejsce $\sin\alpha$:

$$(-5 \cdot \cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$25 \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$26 \cdot \cos^2\alpha = 1 \quad /:\ 26$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{26} \quad \text{stąd} \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}} \quad \vee \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

Istnieją dwa kąty spełniające warunki zadania.

I. $\alpha \in (90°, 180°)$

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\sin\alpha = -5 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

II. $\alpha \in (270°, 360°)$

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\sin\alpha = -5 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = -\frac{5}{\sqrt{26}}$$

Jeśli $\alpha \in (90°, 180°)$, to szukane wielkości są równe:

$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}},\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}},\ \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}.$$

Jeśli $\alpha \in (270°, 360°)$, to $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}$.

Ćwiczenie 2. Wiedząc, że $\sin\alpha \neq 0$, doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie: $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha$.

Przykład 2.

Sprawdzimy, czy poniższa równość jest tożsamością trygonometryczną:

$$\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot \operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\cos\alpha},$$

jeśli $\alpha \in (0°, 360°)$ i $\alpha \neq 90°$ i $\alpha \neq 180°$ i $\alpha \neq 270°$.

Przypomnijmy: aby pokazać, że dana równość jest tożsamością, wystarczy tak przekształcić jedną stronę tej równości, żeby otrzymać drugą. Na ogół łatwiej jest przekształcać stronę bardziej rozbudowaną – w tym przypadku stronę lewą.

$$L=\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot \operatorname{tg}\alpha=$$

– ułamki w nawiasie sprowadzamy do wspólnego mianownika i dodajemy

$$=\frac{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot(1-\cos\alpha)}\cdot \operatorname{tg}\alpha=$$

– stosujemy wzór skróconego mnożenia

$$\frac{1-2\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{{}_1\cancel{\sin\alpha}\cdot(1-\cos\alpha)}\cdot\frac{\cancel{\sin\alpha}^{1}}{\cos\alpha}=$$

– wykorzystujemy twierdzenie 1.1 i 1.2 a następnie skracamy ułamki

$$=\frac{1-2\cdot\cos\alpha+1}{(1-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}=\frac{2\cdot(1-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2}{\cos\alpha}=P$$

Rozpatrywana przez nas równość jest tożsamością trygonometryczną.

Przykład 3.

Obliczymy tangens α, jeśli $\dfrac{2\cos\alpha+3\sin\alpha}{4\sin\alpha-5\cos\alpha}=1$.

Mianownik ułamka po lewej stronie równości jest różny od 0 wtedy,

gdy $4\sin\alpha-5\cos\alpha\neq 0$, czyli gdy $\operatorname{tg}\alpha\neq\dfrac{5}{4}$.

Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, o ile $\cos\alpha\neq 0$. Załóżmy, że $\cos\alpha=0$ dla pewnego

kąta α, dla którego prawdziwa jest dana równość. Wówczas $\sin\alpha\neq 0$ (dlaczego?)

oraz $\dfrac{3\sin\alpha}{4\sin\alpha}=1$. Założenie $\cos\alpha=0$ prowadzi do sprzeczności: $\dfrac{3}{4}=1$.

Zatem $\cos\alpha \neq 0$. Możemy podzielić licznik i mianownik ułamka przez $\cos\alpha$:

$$\frac{2\cos\alpha + 3\sin\alpha}{4\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{2 + 3\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{4\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 5} = \frac{2+3\cdot\mathrm{tg}\alpha}{4\cdot\mathrm{tg}\alpha - 5}$$

Otrzymujemy równość:

$$\frac{2+3\cdot\mathrm{tg}\alpha}{4\cdot\mathrm{tg}\alpha-5} = 1, \quad \text{stąd} \quad 2 + 3\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = 4\cdot\mathrm{tg}\,\alpha - 5, \quad \text{czyli} \quad \mathrm{tg}\,\alpha = 7$$

Tangens α jest równy 7.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż zadanie z przykładu 3., przekształcając daną równość do postaci $7\cdot\cos\alpha = \sin\alpha$.

Przykład 4.

Ustalimy, jaką najmniejszą wartość może przyjmować wyrażenie $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$, jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$.

<u>I sposób</u> – Korzystamy z nierówności omówionej w klasie pierwszej: $S_a \geqslant S_g$, gdzie S_a oznacza średnią arytmetyczną liczb dodatnich, zaś S_g – średnią geometryczną tych liczb.

Z założenia wynika, że α jest kątem ostrym, zatem $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ i $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$.
Otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}{2} \geqslant \sqrt{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha}$$ – stosujemy nierówność $S_a \geqslant S_g$ dla liczb $\mathrm{tg}\,\alpha$ i $\mathrm{ctg}\,\alpha$

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}{2} \geqslant 1$$ – korzystamy ze wzoru $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha \geqslant 2$$ – obie strony nierówności pomnożyliśmy przez 2

Ostatnia nierówność pokazuje, że jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$, to suma $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$ nie może być mniejsza od 2. Ponadto, jeśli $\alpha = 45°$, to otrzymujemy

$$\mathrm{tg}\,45° + \mathrm{ctg}\,45° = 1 + 1 = 2.$$

Jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$, to najmniejsza wartość wyrażenia $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$ jest równa 2.

<u>II sposób</u> – Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.
Z założenia wynika, że $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ i $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$. Zatem, jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$, to prawdziwa jest nierówność

$$\left(\sqrt{\mathrm{tg}\alpha} - \sqrt{\mathrm{ctg}\alpha}\right)^2 \geqslant 0$$

przy czym równość

$$\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2=0$$ jest spełniona wtedy, gdy $\alpha=45^\circ$.

Wykonujemy działania:

$$\operatorname{tg}\alpha-2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha-2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 0$$

ponieważ

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

więc otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 2$$

Jeśli $\alpha\in(0^\circ, 90^\circ)$, to najmniejsza wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ jest równa 2.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że jeśli $\alpha\in(90^\circ, 180^\circ)$, to największa wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ jest równa –2. Skorzystaj z faktu, że wówczas $-\operatorname{tg}\alpha>0$ oraz $-\operatorname{ctg}\alpha>0$.

Twierdzenie 2.
Jeśli liczby rzeczywiste a, b spełniają zależność $a^2+b^2=1$, to istnieje taki kąt α, $\alpha\in\langle 0^\circ, 360^\circ)$, że $\sin\alpha=a$ i $\cos\alpha=b$.

Ćwiczenie 5. Wykaż, korzystając z twierdzenia 2, że miejsca zerowe funkcji $y=2x^2-\sqrt{3}x-0{,}25$ są sinusem i cosinusem pewnego kąta.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

   a) $\cos\alpha=-0{,}6$ b) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ c) $\operatorname{tg}\alpha=3$ d) $\operatorname{ctg}\alpha=-2$.

2. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, o ile istnieją, jeśli:

   a) $\sin\alpha=\frac{11}{61}$ i $\alpha\in(90^\circ, 180^\circ)$ b) $\operatorname{ctg}\alpha=-2\sqrt{2}$ i $\alpha\in(270^\circ, 360^\circ)$

   c) $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$ i $\alpha\in(180^\circ, 270^\circ)$ d) $\operatorname{tg}\alpha=-1$ i $\alpha\in(90^\circ, 180^\circ)$

   e) $\cos\alpha=-1$ f) $\sin\alpha=1$.

D 3. Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną, jeśli $\alpha \in (0°, 360°)$ i $\alpha \neq 90°$ i $\alpha \neq 180°$ i $\alpha \neq 270°$.

a) $1 - 2\sin^2\alpha = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$

b) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

c) $(\text{ctg}\,\alpha - 1)(\text{tg}\,\alpha + 1) = \text{ctg}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha$

d) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\text{tg}\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\text{ctg}\alpha} = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

4. Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną, jeśli $\alpha \in (0°, 360°)$ i $\alpha \neq 90°$ i $\alpha \neq 180°$ i $\alpha \neq 270°$.

a) $\sin\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right) = \cos^2\alpha$

b) $\dfrac{2-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + 2\text{tg}^2\alpha$

c) $1 - \cos\alpha = \dfrac{\text{tg}\alpha - \sin\alpha}{\text{tg}\alpha}$

d) $\dfrac{1}{1-\sin\alpha} + \dfrac{1}{1+\sin\alpha} = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$

5. Wiedząc, że $\alpha \in (90°, 180°)$ oraz $\text{tg}^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha = 6{,}41$, oblicz $\text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\alpha$.

6. Wiedząc, że $\alpha \in (90°, 180°)$ oraz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$, oblicz $\sin\alpha - \cos\alpha$.

D 7. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (180°, 270°)$, to $\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = 0$.

D 8. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (270°, 360°)$, to $\dfrac{1-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} + \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

9. Zbadaj, czy istnieje kąt α, $\alpha \in (0°, 360°)$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ i $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

b) $\sin\alpha = -0{,}9$ i $\cos\alpha = -0{,}1$

c) $\sin\alpha = -\dfrac{3}{4}$ i $\text{tg}\,\alpha = 3$

d) $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$ i $\text{tg}\,\alpha = 3\dfrac{3}{7}$

e) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ i $\text{ctg}\,\alpha = -\dfrac{3}{2}$

f) $\cos\alpha = \dfrac{7}{8}$ i $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{15}}{7}$.

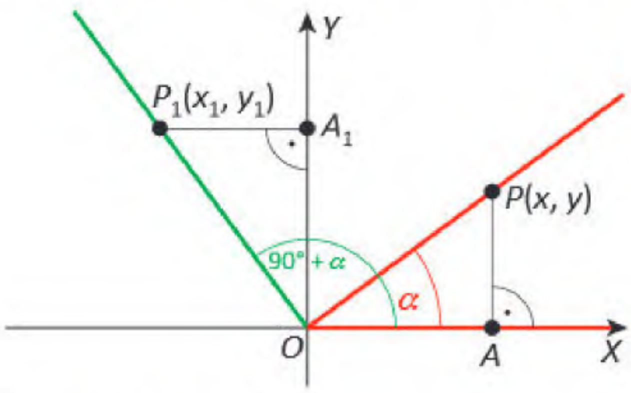
D 10. Wykaż, że rozwiązania równania $3x^2 + 4x + \dfrac{7}{6} = 0$ są odpowiednio sinusem i cosinusem pewnego kąta.

Wybrane wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne pozwalają zapisać wartości funkcji trygonometrycznych pewnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych innego, najczęściej mniejszego kąta. W klasie 1. wprowadziliśmy pierwszą grupę tych wzorów: wzory redukcyjne dla kątów $90° - \alpha$. Przypomnijmy:

Twierdzenie 1.
Jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$, to:
1) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$,
2) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$,
3) $\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$,
4) $\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$.

Teraz wyprowadzimy wzory redukcyjne dla kątów $90° + \alpha$.
Niech kąty α i $90° + \alpha$ będą w położeniu standardowym, jak na rysunku poniżej. Na drugim ramieniu kąta α wybieramy punkt $P(x, y)$ różny od punktu $O(0, 0)$. Na drugim ramieniu kąta $90° + \alpha$ wybieramy taki punkt $P_1(x_1, y_1)$, że $|OP_1| = |OP|$.



Dla punktów A i A_1, wybranych jak na rysunku obok, trójkąty prostokątne OAP i OA_1P_1 są przystające (cecha kbk), bo:

$$|OP_1| = |OP|$$
$$|\sphericalangle AOP| = |A_1OP_1| = \alpha$$
$$|\sphericalangle OPA| = |\sphericalangle OP_1A_1| = 90° - \alpha$$

Z tego wynika, że:
1) $|OA| = |OA_1| = |x| = |y_1|$ oraz liczby x i y_1 mają takie same znaki, zatem
$$y_1 = x$$
2) $|PA| = |PA_1| = |y| = |x_1|$ oraz liczby x_1 i y mają przeciwne znaki, więc
$$x_1 = -y$$

Obliczamy, korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych:

$$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90° + \alpha) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(90° + \alpha) = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{x}{\sqrt{(-y)^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \alpha$$

$$\cos(90° + \alpha) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{-y}{\sqrt{(-y)^2 + x^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\sin \alpha$$

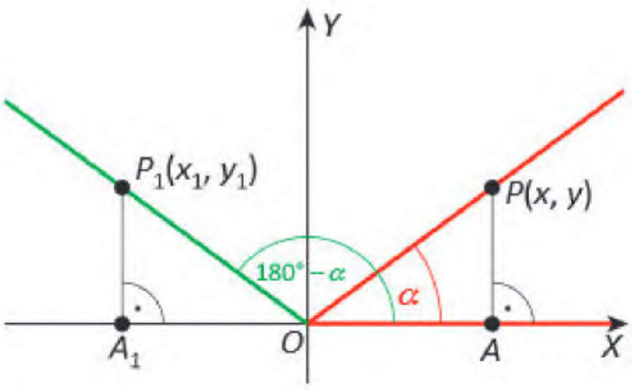
Udowodniliśmy twierdzenie 2.

Twierdzenie 2.

1) $\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha\in(0^\circ, 180^\circ)\cup(180^\circ, 270^\circ)$,
2) $\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha\in(0^\circ, 90^\circ)\cup(90^\circ, 270^\circ)$,
3) $\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$, jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ, 270^\circ\rangle$,
4) $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$, jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ, 270^\circ\rangle$.

UWAGA: Rysunek do dowodu ostatniego twierdzenia został wykonany w przypadku, gdy α jest kątem ostrym. W przypadku gdy $\alpha\in\langle 90^\circ, 270^\circ)$, zależności między współrzędnymi punktów P i P_1 są takie same i dowód przebiega identycznie.

Niech teraz kąty α i $180^\circ-\alpha$ będą w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu kąta α wybieramy punkt $P(x, y)$ różny od punktu $O(0, 0)$. Na drugim ramieniu kąta $180^\circ-\alpha$ leży punkt $P_1(x_1, y_1)$, dla którego $|OP_1|=|OP|$.



Zaznaczamy punkty A i A_1, jak na rysunku obok. Wówczas trójkąty OAP i OA_1P_1 są przystające (uzasadnij to dokładnie).
Otrzymujemy:

$$x_1=-x \qquad \text{oraz} \qquad y_1=y$$

Obliczamy:

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=\frac{x_1}{y_1}=\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{y}{\sqrt{(-x)^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+y^2}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\cos\alpha$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.

1) $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ, 90^\circ)\cup(90^\circ, 180^\circ)$,
2) $\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha\in(0^\circ, 180^\circ)$,
3) $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$, jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ, 180^\circ\rangle$,
4) $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, jeśli $\alpha\in\langle 0^\circ, 180^\circ\rangle$.

UWAGA: Twierdzenie 3. można też wyprowadzić z twierdzenia 2. i 1. Na przykład:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}[90^\circ + (90^\circ - \alpha)] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{twierdzenie 2.1}}}{=} -\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{twierdzenie 1.2}}}{=} -\operatorname{tg}\alpha$$

Ćwiczenie 1. Udowodnij podobnie pozostałe wzory z twierdzenia 3.

Podamy jeszcze wzory redukcyjne dla kąta $180^\circ + \alpha$.

Twierdzenie 4.

1) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ) \cup (90^\circ, 180^\circ)$,
2) $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$,
3) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$,
4) $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$.

Ćwiczenie 2. Udowodnij twierdzenie 4., korzystając jedynie z twierdzenia 2.

Przykład 1.

Obliczamy, posługując się wzorami redukcyjnymi:

a) $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ albo

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ albo

$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin 160^\circ + \cos 110^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) + \cos(90^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ - \sin 20^\circ = 0$
albo
$\sin 160^\circ + \cos 110^\circ = \sin(90^\circ + 70^\circ) + \cos(180^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ - \cos 70^\circ = 0$.

Ćwiczenie 3. Oblicz $\cos 135^\circ$ – korzystając z poznanych wzorów redukcyjnych.

Twierdzenia 1. i 2. pokazują, że wzory redukcyjne dla kąta $90^\circ - \alpha$ oraz dla kąta $90^\circ + \alpha$ pozwalają zastąpić wartości funkcji trygonometrycznych wartościami innych funkcji trygonometrycznych: sinus dowolnego kąta może być wyrażony za pomocą funkcji cosinus i odwrotnie. Podobnie tangens może być wyrażony za pomocą funkcji cotangens i odwrotnie. Mówimy, że funkcja cosinus jest kofunkcją dla funkcji sinus (i odwrotnie) oraz funkcja cotangens jest kofunkcją dla funkcji tangens (i odwrotnie).

Tę sytuację uzyskamy również w przypadku, gdy funkcje trygonometryczne kąta $270^\circ - \alpha$, kąta $270^\circ + \alpha$ oraz kąta $360^\circ - \alpha$, będziemy chcieli wyrazić za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta α. Spróbuj wyprowadzić te wzory w przypadku, gdy α jest kątem ostrym.

Istnieje prosty sposób zapamiętania wzorów redukcyjnych.

Zakładamy, że α jest kątem ostrym, a następnie:

1) Sprawdzamy, jaki znak ma interesujące nas wyrażenie i zapisujemy go po prawej stronie równości.
2) Jeśli we wzorze liczba poprzedzająca $+\alpha$ albo $-\alpha$ jest nieparzystą wielokrotnością kąta 90°: $(90^\circ + \alpha)$, $(90^\circ - \alpha)$, $(270^\circ + \alpha)$, $(270^\circ - \alpha)$, to funkcja zmienia się na kofunkcję. Jeśli liczba poprzedzająca $+\alpha$ albo $-\alpha$ jest parzystą wielokrotnością kąta 90°: $(180^\circ + \alpha)$, $(180^\circ - \alpha)$, $(360^\circ - \alpha)$, to funkcja pozostaje bez zmiany.

Wykonanie punktu 1) ułatwi Ci „rymowanka”, która znajduje się na str. 247

Przykład 2.

Obliczymy na dwa sposoby: a) $\sin 240^\circ$ b) $\cos 330^\circ$ c) $\operatorname{tg} 135^\circ$

Ad a)

1) $\sin 240^\circ < 0$, więc po prawej stronie równości wpiszemy znak minus: $-$.
2) Zauważamy, że

$240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$ albo $240^\circ = 270^\circ - 30^\circ$.

$\sin 240^\circ = \sin(2 \cdot 90^\circ + 60^\circ)$
Pozostaje funkcja sinus.

$$\sin(2 \cdot 90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin 240^\circ = \sin(3 \cdot 90^\circ - 30^\circ)$
Zmieniamy na kofunkcję, czyli na cosinus.

$$\sin(3 \cdot 90^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ad b)

1) $\cos 330^\circ > 0$, więc po prawej stronie równości będzie znak plus: $+$.
2) Zauważamy, że

$330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$ albo $330^\circ = 270^\circ + 60^\circ$.

$\cos 330^\circ = \cos(4 \cdot 90^\circ - 30^\circ)$
Pozostaje funkcja cosinus.

$$\cos(4 \cdot 90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos 330^\circ = \cos(3 \cdot 90^\circ + 60^\circ)$
Zmieniamy na kofunkcję, czyli na sinus.

$$\cos(3 \cdot 90^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ad c)

1) $\operatorname{tg} 135^\circ < 0$ – po prawej stronie równości będzie znak minus: $-$.

$\mathrm{tg}\,135° = \mathrm{tg}(2 \cdot 90° - 45°)$ Pozostaje funkcja tangens. $\mathrm{tg}(2 \cdot 90° - 45°) = -\mathrm{tg}\,45° = -1$	$\mathrm{tg}\,135° = \mathrm{tg}(1 \cdot 90° + 45°)$ Zmieniamy na kofunkcję, czyli na cotangens. $\mathrm{tg}(1 \cdot 90° + 45°) = -\mathrm{ctg}\,45° = -1$

Ćwiczenie 4. Oblicz, stosując metody z przykładu 2.: a) $\mathrm{tg}\,300°$ b) $\mathrm{ctg}\,225°$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz:
   a) $\sin(180° - 45°)$
   b) $\sin(90° + 60°)$
   c) $\mathrm{tg}(90° + 30°)$
   d) $\mathrm{ctg}(90° + 45°)$
   e) $\cos(180° - 60°)$
   f) $\cos(180° - 30°)$
2. Oblicz, stosując wzory redukcyjne
   a) $\cos 225° \cdot \mathrm{tg}\,150°$
   b) $\sin 210° \cdot \mathrm{tg}\,225°$
   c) $\sin 240° : \mathrm{ctg}\,300°$
   d) $\cos 300° : \sin 315°$

D 3. Wykaż, że dana liczba jest wymierna.
   a) $(2 + \cos 150°)(2 - \sin 300°)$
   b) $(\mathrm{tg}\,120° - \mathrm{tg}\,45°) \cdot (\mathrm{ctg}\,315° + \mathrm{tg}\,240°)$
   c) $\cos 0° + 3\sin 90° - 2 \cdot \mathrm{tg}\,180°$
   d) $\sin(270° + 30°) \cdot \cos(270° + 60°)$

4. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:
   a) $\cos 0° \cdot \cos 30° \cdot \cos 60°$
   b) $\mathrm{tg}\,40° \cdot \mathrm{tg}\,50° \cdot \mathrm{tg}\,60°$
   c) $\mathrm{tg}\,41° \cdot \mathrm{tg}\,43° \cdot \mathrm{tg}\,47° \cdot \mathrm{tg}\,49°$
   d) $\sin 210° \cdot \sin 240° \cdot \sin 270°$
   e) $\sin^2 10° + \sin^2 45° + \sin^2 80°$
   f) $\cos^2 100° + \cos^2 190°$

D 5. Wykaż, że:
   a) $\dfrac{\sin 129° \cdot \cos 141°}{\cos^2 39°} = -1$
   b) $\dfrac{\cos^2 112° - \sin^2 382°}{\mathrm{tg}\,128°} = 0$.

D 6. Wykaż, że prawdziwa jest równość:
   a) $\sin 150° \cdot \cos 300° - \mathrm{tg}\,179° \cdot \mathrm{tg}\,89° = 1\frac{1}{4}$
   b) $\sin^2 65° + \sin^2 155° - \mathrm{tg}\,198° \cdot \mathrm{tg}\,108° = 2$

7. Wyznacz α, $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, wiedząc, że:
   a) $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$ i $\sin\alpha < 0$
   b) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ i $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$
   c) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha < 0$
   d) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ i $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$
   e) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ i $\sin\alpha < 0$
   f) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ i $\cos\alpha > 0$

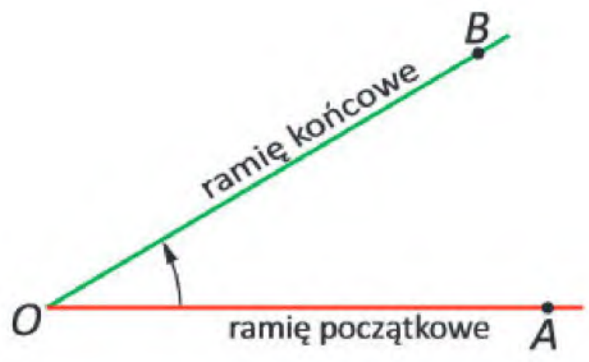
D 8. Zapisz wzory redukcyjne dla kąta $360° - \alpha$ i je udowodnij, korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych.

Kąt skierowany. Miara łukowa kąta

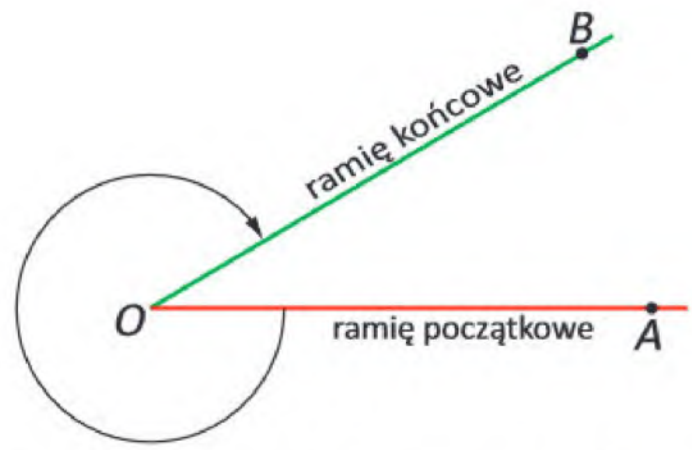
W naukach przyrodniczych ważną rolę odgrywa kąt skierowany.

Definicja 1.
Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. W kącie skierowanym pierwszą półprostą nazywamy ramieniem początkowym kąta, drugą – ramieniem końcowym.

a)



b)



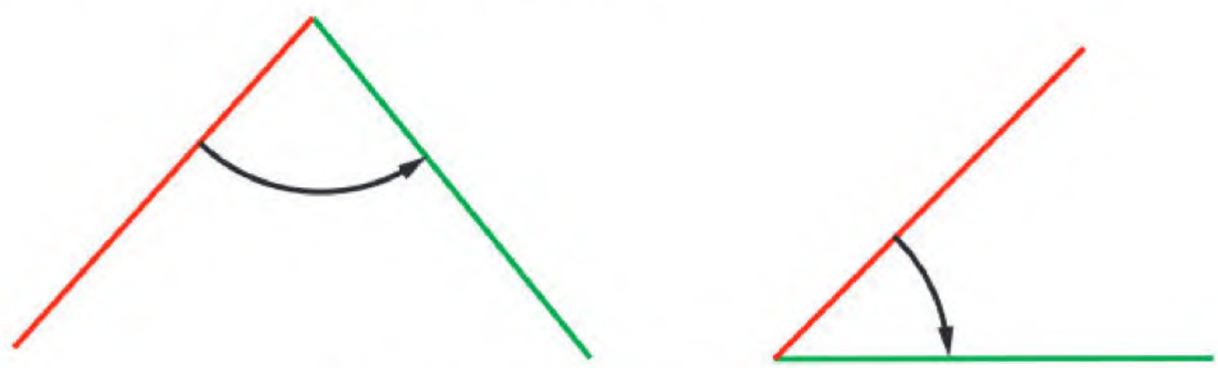
Kąt skierowany oznaczamy $\sphericalangle AOB$. Wtedy punkt O jest wierzchołkiem kąta, półprosta $OA^{\rightarrow}$ – ramieniem początkowym, półprosta $OB^{\rightarrow}$ – ramieniem końcowym. Kąt skierowany $\sphericalangle BOA$ nazywamy kątem przeciwnym do $\sphericalangle AOB$.

Każdy kąt skierowany różny od kąta zerowego, wyznacza na płaszczyźnie orientację:

- przeciwną do ruchu wskazówek zegara, zobacz rys. a),
- zgodną z ruchem wskazówek zegara, zobacz rys. b).

W pierwszym przypadku mówimy o kącie skierowanym dodatnio. Miarę takiego kąta wyrażamy dodatnią liczbą stopni (od 0° do 360°). W drugim przypadku mówimy o kącie skierowanym ujemnie. Miarę takiego kąta wyrażamy ujemną liczbą stopni (od –360° do 0°).

O dwóch kątach skierowanych, z których jeden ma miarę dodatnią, a drugi – miarę ujemną, powiemy, że są przeciwnie skierowane.



kąty przeciwnie skierowane

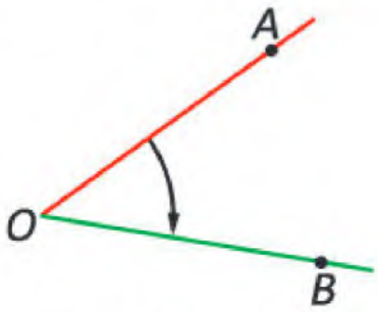
Jeśli natomiast oba mają miarę dodatnią lub oba miarę ujemną – że są zgodnie skierowane.

kąty zgodnie skierowane (oba mają miarę ujemną)

kąty zgodnie skierowane (oba mają miarę dodatnią)

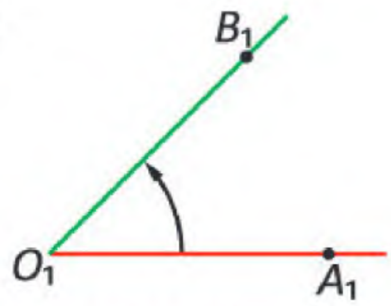
O kącie skierowanym można myśleć jak o ilustracji obrotu początkowego ramienia kąta wokół jego wierzchołka.

a)



$|\sphericalangle AOB| = -45^\circ$

b)



$|\sphericalangle A_1O_1B_1| = 45^\circ$

Kąt skierowany AOB na rys. a) powyżej ilustruje „obrót" ramienia początkowego $OA^{\rightarrow}$ o kąt -45°, czyli o 45° zgodnie z ruchem wskazówek zegara.
Kąt $A_1O_1B_1$ na rys. b) powyżej ilustruje „obrót" ramienia początkowego $O_1A_1^{\rightarrow}$ o kąt 45°, czyli o 45° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Możemy powiedzieć, że kąt skierowany pozwala nam opisać obrót wokół punktu o kąt od 0° do 360°, jeśli obracamy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, lub o kąt od -360° do 0°, jeśli obracamy zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Nie są to wszystkie możliwe obroty, które możemy wykonać. W celu opisania obrotów o więcej niż 360° lub mniej niż -360° posłużymy się uogólnionym kątem skierowanym.

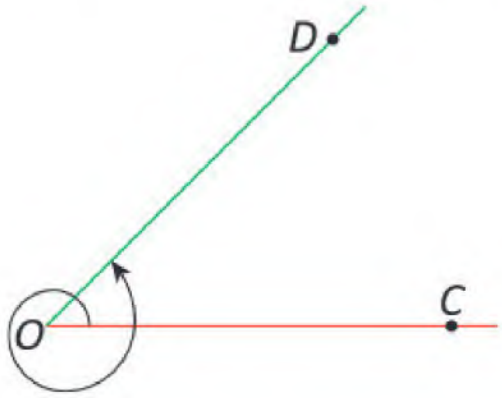
Przykład 1.

Wskazówki zegara zatrzymały się na godzinie 10^{10}. Teraz jest godzina 8^{00}. Magda nastawiła aktualną godzinę, cofając wskazówki zegara. O jaki kąt obróciła wskazówkę minutową?
Wskazówka minutowa wykonała dwa pełne obroty i jeszcze $\frac{10}{60}$ obrotu. Zatem:

$$2 \cdot 360^\circ + \frac{10}{60} \cdot 360^\circ = 720^\circ + 60^\circ = 780^\circ$$

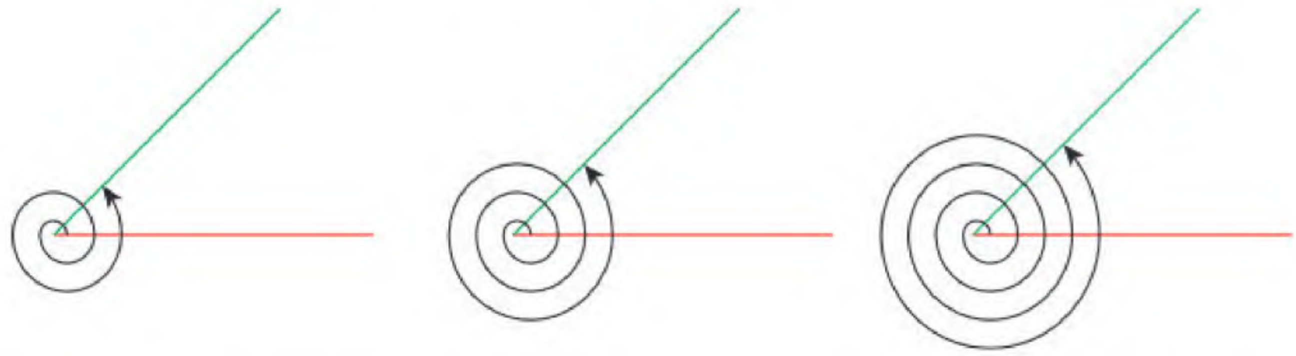
Powiemy, że wskazówka minutowa obróciła się o kąt 780°.

Rozpatrzmy kąt z „ruchomym" ramieniem końcowym. Załóżmy, że końcowe ramię kąta „obróciło się" o $360°$, a następnie jeszcze o $45°$. Otrzymaliśmy kąt COD, który można przedstawić następująco:



Możemy temu kątowi przypisać miarę
$360° + 45°$, czyli $405°$.

Zauważ, że otrzymalibyśmy taki sam kąt, czyli kąt przystający, gdyby ramię $\overrightarrow{OD}$ „obróciło się" o $2 \cdot 360° + 45°$, $3 \cdot 360° + 45°$ lub $4 \cdot 360° + 45°$.



Uogólniony kąt skierowany traktujemy jako miarę obrotu półprostej wokół jej początku. Zakładamy, że kąt taki ma nieskończenie wiele miar. Wszystkie te miary różnią się o wielokrotność $360°$. Zapisujemy je w postaci:

$k \cdot 360° + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0°, 360°)$ i $k \in \mathbf{Z}$,

przy czym α nazywamy **miarą główną** takiego kąta.

Miara główna każdego z czterech rozważanych powyżej kątów jest równa $45°$.

Przykład 2.

Dany jest kąt β, gdzie $\beta = -1230°$. Znajdziemy miarę główną tego kąta.

Zauważamy, że $-4 \cdot 360° < \beta < -3 \cdot 360°$. Zapisujemy:

$\beta = (-4) \cdot 360° + 210°$, bo $-1230° = -1440° + 210°$.

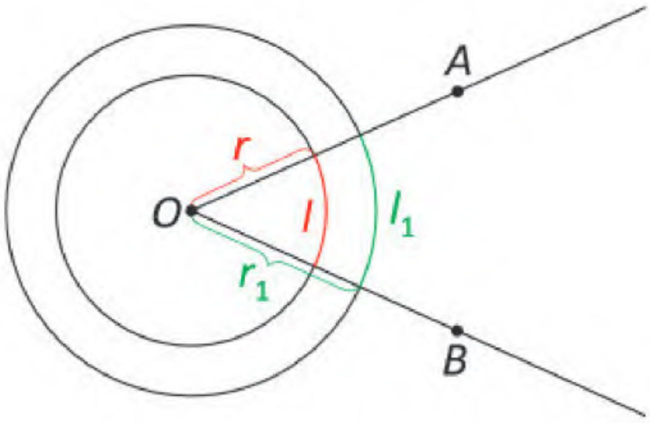
Miara główna danego kąta jest równa $210°$.

Ćwiczenie 1. Wyznacz miarę główną uogólnionego kąta skierowanego, którego miara jest równa:

a) $850°$ b) $-2160°$ c) $-1501°$

Omówimy teraz inny sposób mierzenia kątów.

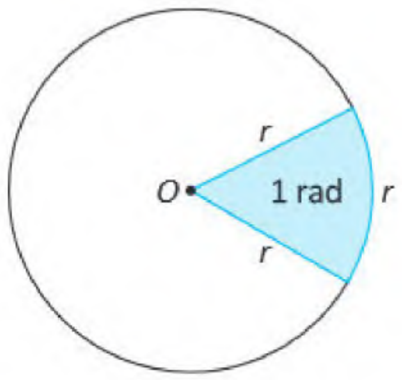
Niech dany będzie kąt AOB. Kreślimy okrąg o środku w punkcie O i dowolnym promieniu. Stosunek długości łuku l, będącego częścią wspólną okręgu i kąta, do promienia okręgu r nazywamy **miarą łukową kąta**.



Stosunek długości łuku do promienia nie zależy od okręgu. To znaczy, że jeśli narysujemy okrąg o promieniu r_1 i częścią wspólną tego okręgu i kąta będzie łuk długości l_1, to

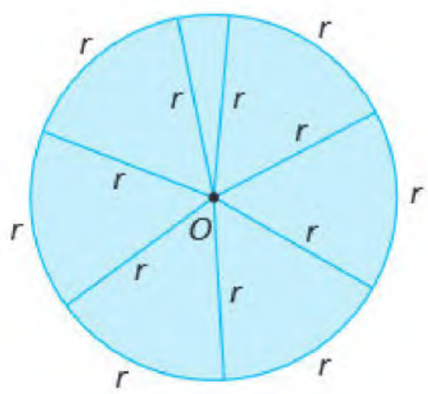
$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l}{r}$$

Kąt, którego miara łukowa jest równa 1, nazywamy **radianem**. Radian oznaczamy skrótem rad.



Ustalimy teraz zależność między miarą łukową i miarą stopniową. Wyznaczmy najpierw miarę łukową kąta pełnego, czyli stosunek długości okręgu do jego promienia. Mamy:

$$\text{miara łukowa kąta pełnego} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ \text{(rad)}$$



UWAGA: Zapisując miarę łukową kąta, będziemy często opuszczać skrót „rad". Na przykład, zamiast „kąt pełny ma miarę 2π rad" będziemy pisać „kąt pełny ma miarę 2π".

Tak więc mierze $360°$ odpowiada miara 2π, co w przybliżeniu jest równe 6,28. Aby przeliczyć miarę stopniową dowolnego kąta na miarę łukową, stosujemy wcześniej poznaną własność.

Miara kąta środkowego jest wprost proporcjonalna do długości łuku okręgu wyznaczonego przez ten kąt.
Na przykład kątowi dwa razy większemu odpowiada dwa razy dłuższy łuk, a kątowi trzy razy mniejszemu odpowiada łuk trzy razy krótszy.

Przykład 3.

Zamienimy miarę stopniową: $90°$, $60°$, $30°$ na miarę łukową.

$360°$ odpowiada 2π (rad)

$90° = \frac{360°}{4}$ i odpowiada $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (rad)

Zatem

$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}.$$

Podobnie:

$$60° = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ (rad)}$$

$$30° = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ (rad)}$$

W ogólnym przypadku mamy:

$$1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)} \quad \text{stąd} \quad t° = \frac{\pi \cdot t}{180} \text{ (rad)}$$

Ćwiczenie 2. Skorzystaj z otrzymanego wzoru i zamień na miarę łukową:

a) $135°$ b) $216°$ c) $-400°$

Przykład 4.

Zapiszemy w mierze stopniowej: π, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$.

2π (rad) odpowiada $360°$
π (rad) odpowiada $180°$

Zatem

$$\frac{3\pi}{2} \text{ (rad)} = 3 \cdot 180° : 2 = 270°$$

$$-\frac{\pi}{4} \text{ (rad)} = -180° : 4 = -45°$$

Ogólnie możemy zapisać:

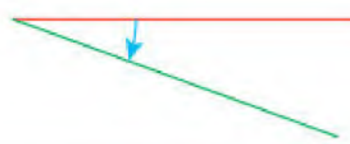
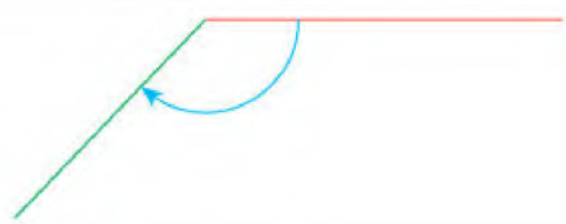
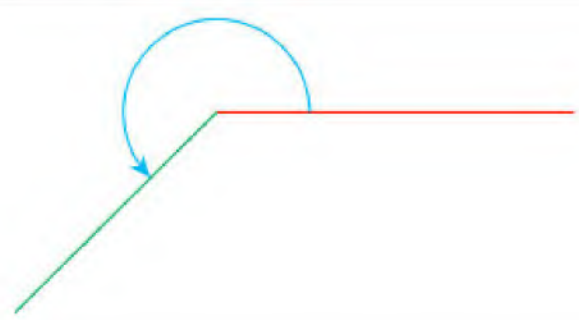
$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad \text{zatem} \qquad t \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot t}{\pi}\right)^{\circ}$$

Ćwiczenie 3. Skorzystaj z ostatniego wzoru i zapisz w mierze stopniowej:

a) $\frac{5}{6}\pi$ b) $\frac{7}{4}\pi$ c) $-\frac{23\pi}{18}$

Jeden radian jest równy w przybliżeniu 57°.

Dzięki mierze łukowej miarą każdego kąta jest liczba rzeczywista. Co więcej, każda liczba rzeczywista jest miarą pewnego uogólnionego kąta skierowanego. W tabeli poniżej zostały przedstawione przykładowe liczby rzeczywiste i odpowiadające im kąty.

Miara łukowa x	Kąt odpowiadający mierze łukowej x
2	
$\frac{-1}{3}$	
$\frac{-3\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{4}$	

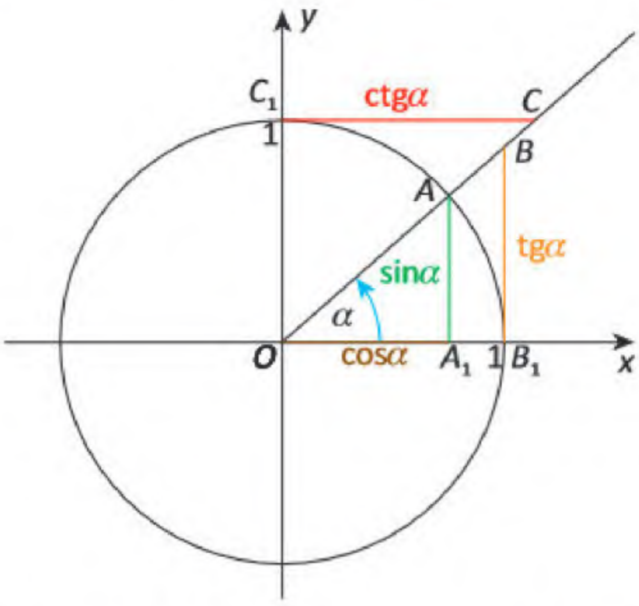
Miarę łukową będziemy stosować również w przypadku kątów płaskich nieskierowanych.

Ćwiczenie 4. Zapisz w tabeli wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów:

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}.$

Wartości funkcji trygonometrycznych mają ciekawą interpretację na tzw. kole trygonometrycznym. Przedstawimy ją w przypadku kąta, którego miara α należy do przedziału $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Umieszczamy w układzie współrzędnych kąt o mierze α w położeniu standardowym. Kreślimy okrąg o środku w punkcie $O(0, 0)$ i promieniu 1. Wówczas wartości funkcji trygonometrycznych można traktować jako długości pewnych odcinków.



Ponieważ $|OA| = |OB_1| = |OC_1| = 1$, więc

$$\sin\alpha = \frac{|AA_1|}{|OA|} = |AA_1|$$

$$\cos\alpha = \frac{|OA_1|}{|OA|} = |OA_1|$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BB_1|}{|OB_1|} = |BB_1|$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{|CC_1|}{|OC_1|} = |CC_1|$$

Odcinki BB_1 i CC_1 są styczne do okręgu.

Z tą geometryczną interpretacją jest związane pochodzenie nazw funkcji trygonometrycznych. Nazwa *sinus* jest pochodzenia łacińskiego i oznacza „zakrzywienie”, „zatokę”. Z kolei nazwa *cosinus* jest skrótem wyrażenia łacińskiego *complementi sinus* oznaczającego „sinus dopełnienia”. Dopełnieniem α do $\frac{\pi}{2}$ jest $\frac{\pi}{2}-\alpha$, a jak już wiesz $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Nazwa *tangens* jest również pochodzenia łacińskiego i oznacza „dotykający”, „styczny”. Nazwa *cotangens* jest zbudowana analogicznie do nazwy *cosinus*.

Tabela poniżej przedstawia poznane wcześniej wzory redukcyjne – z uwzględnieniem miary łukowej kątów.

$\varphi =$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\varphi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Przykład 5.

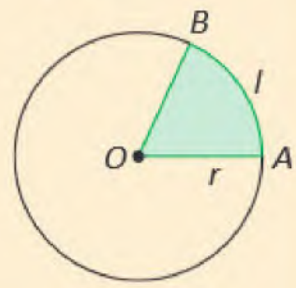
a) $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz miarę główną kąta skierowanego:
   a) $395°$ b) $-253°$ c) $919°$ d) $-1234°$

2. Oblicz miarę łukową kąta AOB na rysunku obok, jeśli:
   a) $r=4,\ l=2\pi$ b) $r=6,\ l=2\pi$
   c) $r=5,\ l=3\pi$ d) $r=3,\ l=12$



3. Zamień na radiany:
   a) $72°$ b) $120°$ c) $-225°$ d) $300°$ e) $-210°$ f) $27°$

4. Zamień na stopnie:
   a) $\frac{\pi}{5}$ b) $-\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{7\pi}{4}$ d) $\frac{2\pi}{9}$ e) $-\frac{4\pi}{15}$ f) $\frac{11\pi}{6}$

5. Oblicz, stosując wzory redukcyjne:
   a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ c) $\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$
   e) $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$ f) $\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ g) $\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ h) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

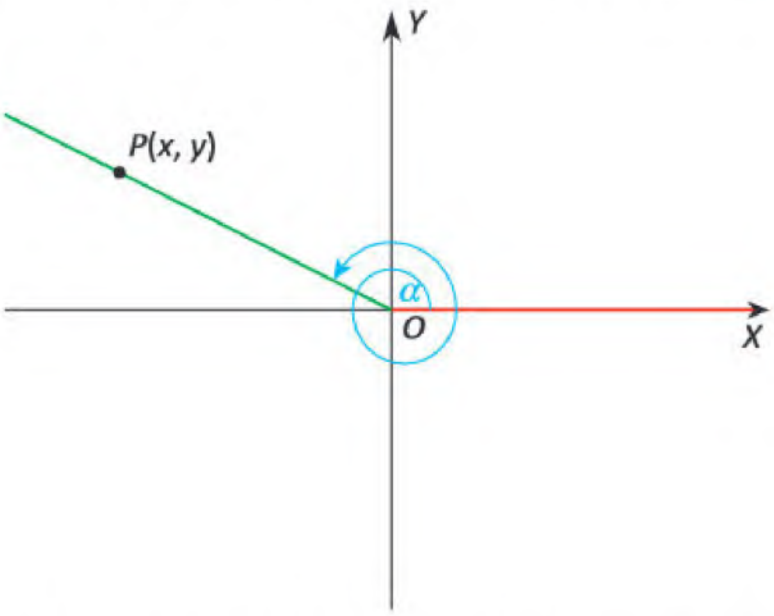
6. Oblicz:
   a) $\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{11\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$
   b) $\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$

D 7. Wykaż, że:
   a) $-2\sin 330°\cdot\cos 300°-\operatorname{tg} 359°\cdot\operatorname{tg} 269°=\frac{3}{2}$
   b) $\operatorname{ctg} 175°\cdot\operatorname{tg} 355°+\sin^2 155°+\sin^2 245°=2$

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Wprowadzenie uogólnionego kąta skierowanego i miary łukowej umożliwia rozszerzenie określenia funkcji trygonometrycznych na przypadek dowolnej liczby rzeczywistej.

Niech α będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Tej liczbie odpowiada jeden uogólniony kąt skierowany, którego miara (wyrażona w radianach) jest równa α. Umieszczamy ten kąt w układzie współrzędnych, w położeniu standardowym, tzn. początkowe ramię tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią osi OX. Na końcowym ramieniu wybieramy punkt $P(x, y)$ różny od punktu $O(0, 0)$. Wówczas:



$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \quad y \neq 0$$

Z powyższej definicji wynika, że sinus i cosinus są określone dla dowolnej liczby rzeczywistej. Tangens nie jest określony dla liczb: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi, \ldots,$

czyli dla liczb mających postać $\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Natomiast cotangens nie jest określony dla liczb: $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \ldots,$ czyli dla liczb mających postać $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne oraz wszystkie wzory redukcyjne, które przedstawiliśmy w poprzednich tematach, są prawdziwe dla tych wartości α, dla których lewa i prawa strona danego wzoru jest określona.

Na przykład przypomnijmy:

Twierdzenie 1.

1) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
2) $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\quad \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
3) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$, $\quad \alpha \in \mathbf{R}$
4) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$, $\quad \alpha \in \mathbf{R}$.

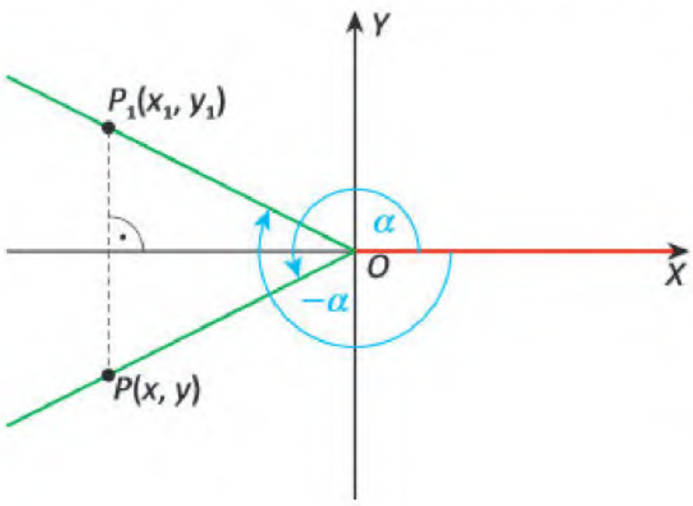
Z podanej wyżej definicji i określenia kąta skierowanego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Niech m oznacza dowolną liczbę całkowitą. Wówczas:

1) $\operatorname{tg}(m \cdot 2\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$
2) $\operatorname{ctg}(m \cdot 2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\quad \alpha \neq k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$
3) $\sin(m \cdot 2\pi + \alpha) = \sin\alpha$, $\quad \alpha \in \boldsymbol{R}$
4) $\cos(m \cdot 2\pi + \alpha) = \cos\alpha$, $\quad \alpha \in \boldsymbol{R}$.

Wyprowadzimy teraz wzory sprowadzające obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta $(-\alpha)$ do kąta α. Załóżmy, że kąty α oraz $(-\alpha)$ są w położeniu standardowym (zobacz rysunek poniżej).



Końcowe ramiona tych kątów są symetryczne względem osi OX. Na drugim ramieniu kąta α wybieramy punkt $P(x, y)$. Niech punkt $P_1(x_1, y_1)$ będzie obrazem punktu P w symetrii względem osi OX. Wówczas odległości punktu P_1 i punktu P od osi OX i odpowiednio od osi OY są jednakowe. Zatem otrzymujemy zależność:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y \end{cases}$$

Teraz obliczamy:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{-y} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\alpha$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.

1) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$
2) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, $\quad \alpha \neq k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$
3) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\quad \alpha \in \boldsymbol{R}$
4) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\quad \alpha \in \boldsymbol{R}$.

Ćwiczenie 1. Korzystając z twierdzeń 2. i 3., udowodnij poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.

1) $\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in \boldsymbol{Z}$
2) $\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,\qquad \alpha\neq k\pi,\ \ k\in \boldsymbol{Z}$
3) $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,\qquad \alpha\in \boldsymbol{R}$
4) $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha,\qquad \alpha\in \boldsymbol{R}.$

Przykład 1.

Wyznaczymy wartość wyrażenia: $\cos\frac{20\pi}{3}+\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)-\sin 4\pi.$

Obliczamy kolejno:

$$\cos\frac{20\pi}{3}=\cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{-1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\sin 4\pi=0$$

Ostatecznie,

$$\cos\frac{20\pi}{3}+\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)-\sin 4\pi=\frac{-1}{2}-1-0=-1\frac{1}{2}.$$

Wiesz już, że dowolnej liczbie rzeczywistej x odpowiada jeden i tylko jeden uogólniony kąt skierowany. Z kolei takiemu kątowi przyporządkowane są w sposób jednoznaczny liczby: sinus x, cosinus x, tangens x i cotangens x. Zatem możemy określić cztery następujące funkcje, których dziedziny i zbiory wartości są podzbiorami zbioru $\boldsymbol{R}$.

sinus: $x\to\sin x$, czyli $y=\sin x,\ x\in\boldsymbol{R}$

cosinus: $x\to\cos x$, czyli $y=\cos x,\ x\in\boldsymbol{R}$

tangens: $x\to\operatorname{tg} x$, czyli $y=\operatorname{tg} x,\ x\in\boldsymbol{R}-\left\{x:x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$

cotangens: $x\to\operatorname{ctg} x$, czyli $y=\operatorname{ctg} x,\ x\in\boldsymbol{R}-\{x:x=k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\}.$

Poznamy teraz własności tych funkcji, które wynikają bezpośrednio ze wzorów redukcyjnych.

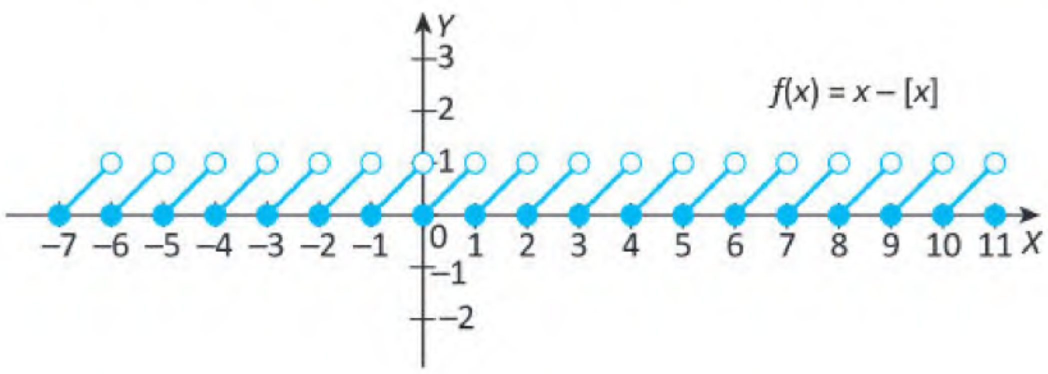
Okresowość funkcji trygonometrycznych

Definicja 1.
Funkcję liczbową f nazywamy **funkcją okresową** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba T różna od zera, że dla każdej liczby x należącej do dziedziny funkcji f, liczba $x+T$ też należy do dziedziny tej funkcji i zachodzi równość $f(x+T)=f(x)$. Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**. Jeśli istnieje najmniejszy okres dodatni funkcji f, to nazywamy go **okresem podstawowym** lub okresem zasadniczym i oznaczamy T_0.

Zapis symboliczny:

Funkcja liczbowa f jest funkcją okresową $\Leftrightarrow \bigvee_{T\neq 0} \bigwedge_{x\in D_f} \left[(x+T)\in D_f \quad f(x+T)=f(x)\right]$

Przykładem funkcji okresowej jest funkcja, która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje jej część ułamkową: $f(x)=x-[x]$. Przypomnijmy jej wykres:



Zauważ, że okresem tej funkcji jest każda liczba całkowita różna od 0. Liczba 1 jest okresem podstawowym tej funkcji, czyli $T_0=1$.
Innym przykładem funkcji okresowej jest funkcja stała, np.: $f(x)=5$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$. Okresem tej funkcji jest każda liczba rzeczywista, różna od zera. Funkcja stała nie ma okresu podstawowego.

Ćwiczenie 2. Naszkicuj wykres funkcji, która dowolnej liczbie całkowitej przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 4. Czy ta funkcja jest okresowa? Jeśli tak, to podaj okres podstawowy tej funkcji.

Rozważmy teraz funkcje trygonometryczne $y=\operatorname{tg} x$ oraz $y=\operatorname{ctg} x$.
Z twierdzenia 1. wynika, że

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x, \qquad \text{gdzie } x\in \boldsymbol{R}-\left\{x: x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}\right\} \qquad \text{oraz}$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x, \qquad \text{gdzie } x\in \boldsymbol{R}-\{x: x=k\pi,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$$

To znaczy, że funkcje $y=\operatorname{tg} x$ oraz $y=\operatorname{ctg} x$ są okresowe, a ich okresem jest liczba π.

Wiemy również, że:

- jeśli $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, to funkcje $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ przyjmują tylko wartości dodatnie,
- jeśli $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, to funkcje $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ przyjmują tylko wartości ujemne.

Zatem nie istnieje liczba dodatnia mniejsza od π, która byłaby okresem tych funkcji, bo dla dowolnej dodatniej liczby T mniejszej od π istnieje liczba x_0, $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, dla której wartości tych funkcji dla argumentów x_0 i $x_0 + T$ mają przeciwne znaki.

Okresem zasadniczym funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ jest liczba π. Zapisujemy: $T_0 = \pi$.

Z kolei z twierdzenia 2. mamy:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{oraz} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \text{gdzie } x \in \boldsymbol{R}$$

To znaczy, że funkcje $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ są okresowe, a ich okresem jest liczba 2π.

Podobnie jak w przypadku funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$, na podstawie znaków wartości funkcji trygonometrycznych $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ w przedziałach $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ można wywnioskować, że liczba 2π jest najmniejszym dodatnim okresem funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$.

Okresem podstawowym funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ jest liczba 2π. Zapisujemy: $T_0 = 2\pi$.

Przykład 2.

Obliczymy okres zasadniczy funkcji okresowej:

a) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$

b) $f(x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x - 5\right)$

Ad a) Oznaczmy okres zasadniczy funkcji f przez T_0. Wówczas

$$f(x + T_0) = \operatorname{tg}[3(x + T_0)] = \operatorname{tg}(3x + 3T_0)$$

Funkcja f jest okresowa, więc zachodzi równość

$f(x+T_0)=f(x)$ czyli

$\mathrm{tg}(3x+3T_0)=\mathrm{tg}\,3x$

Wprowadzamy podstawienie $3x=\alpha$ i otrzymujemy:

$\mathrm{tg}(\alpha+3T_0)=\mathrm{tg}\,\alpha$

Okresem zasadniczym funkcji tangens jest π, stąd

$3T_0=\pi$ czyli $T_0=\frac{\pi}{3}$

Okresem zasadniczym funkcji $f(x)=\mathrm{tg}\,3x$ jest liczba $\frac{\pi}{3}$.

Ad b) Niech T_0 będzie okresem zasadniczym funkcji $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi x-5\right)$. Wówczas:

$$f(x+T_0)=\sin\left[\frac{2}{3}\pi(x+T_0)-5\right]=\sin\left[\frac{2}{3}\pi x+\frac{2}{3}\pi T_0-5\right]=\sin\left[\frac{2}{3}\pi x-5+\frac{2}{3}\pi T_0\right]$$

$$f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi x-5\right).$$

Na podstawie równości $f(x+T_0)=f(x)$ mamy:

$$\sin\left[\left(\frac{2}{3}\pi x-5\right)+\frac{2}{3}\pi T_0\right]=\sin\left(\frac{2}{3}\pi x-5\right).$$

Wprowadzamy podstawienie: $\frac{2}{3}\pi x-5=\alpha,$ stąd

$$\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi T_0\right)=\sin\alpha.$$

Okresem zasadniczym funkcji sinus jest liczba 2π, zatem

$\frac{2}{3}\pi T_0=2\pi$ stąd $T_0=3$

Okresem zasadniczym funkcji $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi x-5\right)$ jest liczba 3.

Ćwiczenie 3. Oblicz okres zasadniczy funkcji $f(x)=\cos\frac{x}{2}$.

Dla jakiej wartości a okresem podstawowym funkcji $f(x)=\cos(ax)$ jest liczba $\frac{1}{4}$?

Parzystość funkcji trygonometrycznych

Przypomnijmy: jeśli dla każdej liczby x z dziedziny D funkcji f spełniony jest warunek $-x \in D$ oraz:

$f(-x) = f(x)$, to funkcję f nazywamy funkcją parzystą, jeśli natomiast
$f(-x) = -f(x)$, to funkcję f nazywamy funkcją nieparzystą.

Funkcja $y = \cos x$ jest funkcją parzystą, bo dla dowolnej liczby rzeczywistej x mamy:

$-x \in \boldsymbol{R}$ oraz $\cos(-x) = \cos x$.

Funkcje $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ są funkcjami nieparzystymi, bo dla dowolnego argumentu należącego do dziedziny odpowiedniej funkcji argument $-x$ też należy do dziedziny tej funkcji oraz:

- $\sin(-x) = -\sin x, \quad x \in \boldsymbol{R}$
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad x \in \boldsymbol{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$
- $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \quad x \in \boldsymbol{R} - \{x : x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że:

a) funkcja $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest funkcją nieparzystą,

b) funkcja $g(x) = x \cdot \operatorname{tg} x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ jest funkcją parzystą.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz:

a) $\sin 5\pi + \cos 3\pi$

b) $\operatorname{tg}(-3\pi) \cdot \operatorname{ctg}(-1)$

c) $\operatorname{ctg} \frac{15\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

d) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) : \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $\sin \frac{9\pi}{2} + \operatorname{ctg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$

f) $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{3} \cdot \cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

D 2. Wykaż, że:

a) $\sin \frac{2\pi}{5} \cdot \sin^2(2\pi + 5) + \sin \frac{3\pi}{5} \cdot \cos^2(2\pi - 5) = \cos \frac{\pi}{10}$

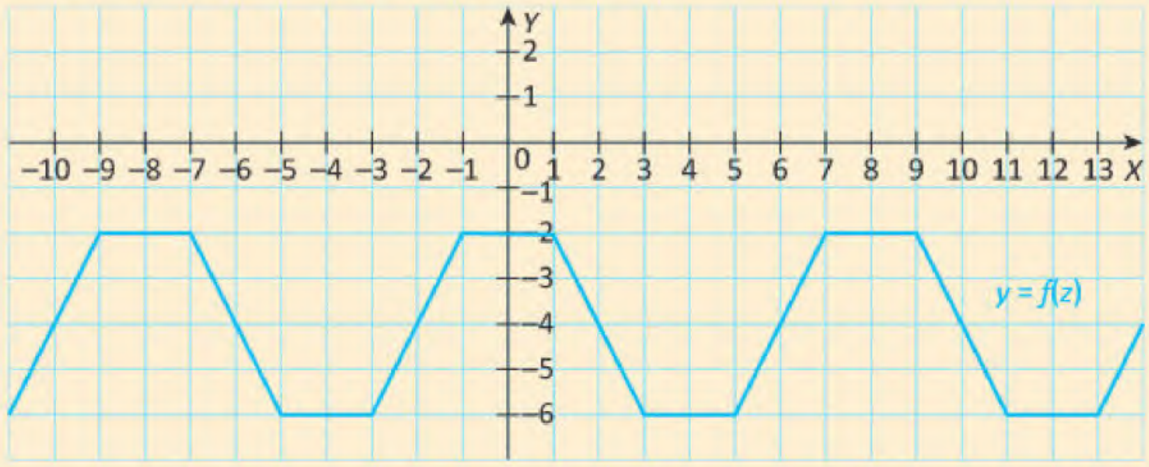
b) $\cos(-0{,}7\pi) : \sin(-0{,}3\pi) = \operatorname{tg} 0{,}2\pi$

D 3. Wykaż, że dana równość nie jest tożsamością.

a) $\frac{\sin(\alpha - 2\pi)}{\cos(2\pi + \alpha)} = \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$

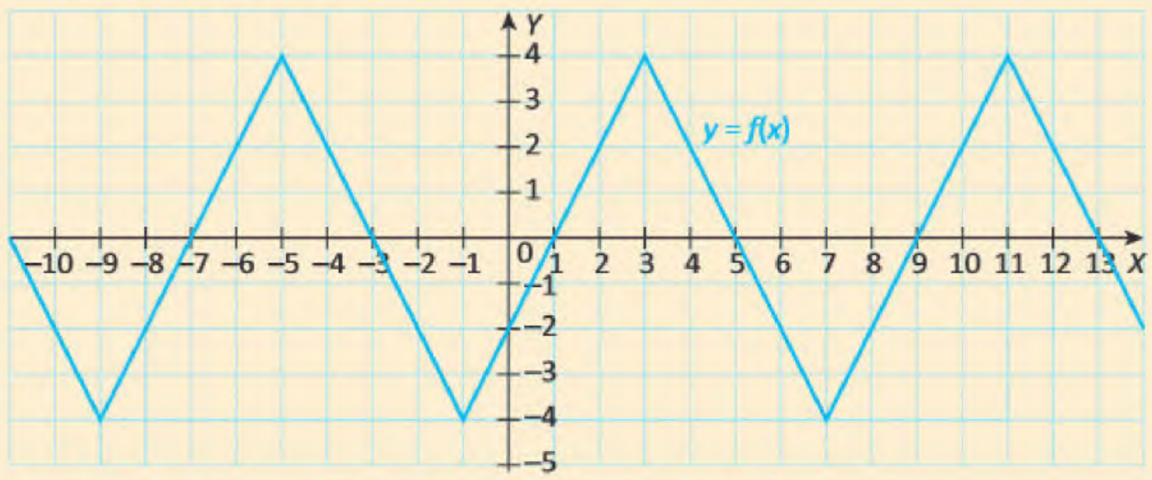
b) $\cos(\alpha - \pi) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi + 2\alpha}{2}\right) = \cos \alpha$

4. Na rysunku poniżej przedstawiony jest fragment wykresu funkcji okresowej f określonej w zbiorze liczb rzeczywistych.



   a) Odczytaj z wykresu okres podstawowy funkcji f.
   b) Zapisz symbolicznie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość -4.

5. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji okresowej f określonej w zbiorze liczb rzeczywistych.



   a) Odczytaj z wykresu okres podstawowy funkcji f.
   b) Zapisz symbolicznie miejsca zerowe funkcji f. Ustal, czy miejscami zerowymi funkcji f są liczby: 105, –97, –223.
   c) Oblicz: $f(260)$, $f(-450)$, $f(903)$.

6. Wyznacz okres zasadniczy funkcji okresowej, określonej wzorem:
   a) $f(x) = \cos 6x$
   b) $f(x) = \sin(-2x)$
   c) $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{3}$
   d) $f(x) = \operatorname{ctg}(3x - 1)$
   e) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x-1}{\pi}\right)$
   f) $f(x) = 3 - \cos(\pi x + 4)$

7. Zbadaj parzystość funkcji określonej wzorem:
   a) $f(x) = \sin 3x$
   b) $f(x) = 2x^3 \cdot \sin x$
   c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}$
   d) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$
   e) $f(x) = \sin(\pi + x) \cdot \cos(2\pi - x)$
   f) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg} x$

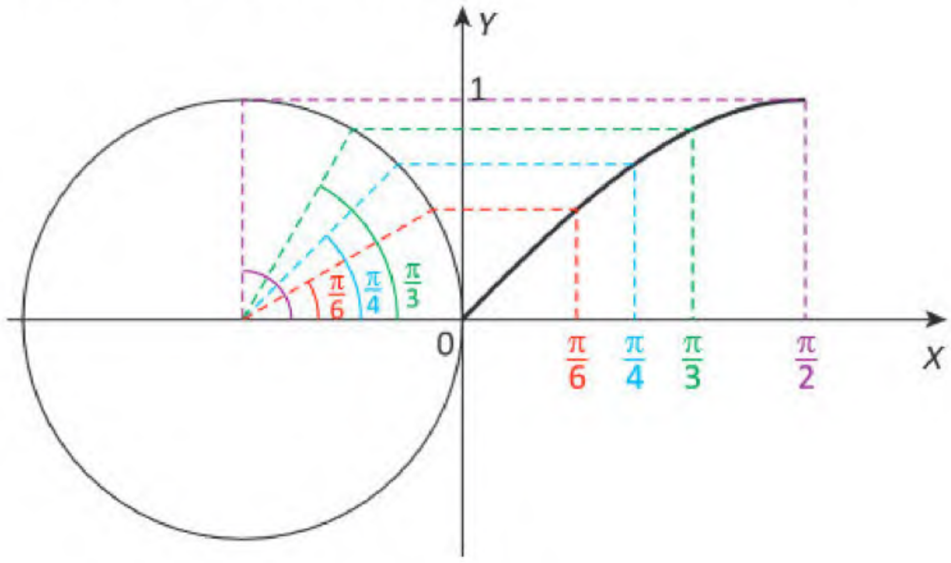
Wykresy funkcji trygonometrycznych

Wykres funkcji $y = \sin x$

Wiesz, że dziedziną funkcji $y = \sin x$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Wykres funkcji $y = \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$, będziemy szkicować etapami.

<u>I etap</u>

Do naszkicowania wykresu funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ wykorzystamy koło trygonometryczne opisane na str. 269.



<u>II etap</u>

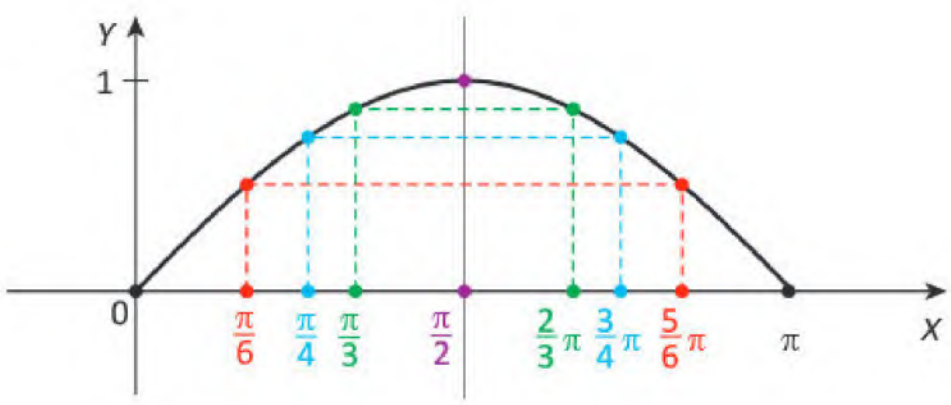
Ze wzoru redukcyjnego $\sin(\pi - x) = \sin x$ wynika, że wykres funkcji $y = \sin x$ jest symetryczny względem prostej prostopadłej do osi OX i przechodzącej przez punkt o współrzędnych $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Na przykład:

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

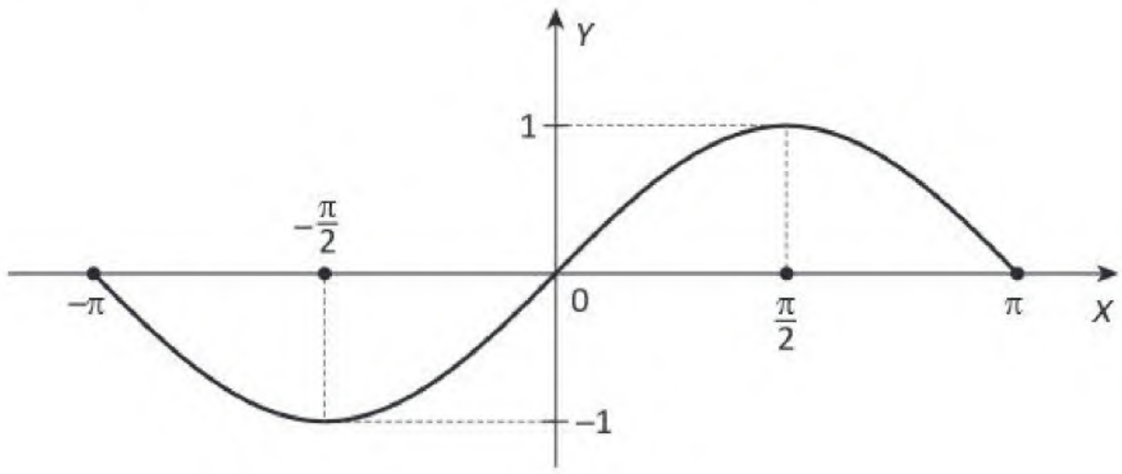
$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \quad \text{itd.}$$

Po skorzystaniu z tej własności otrzymujemy wykres funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$.



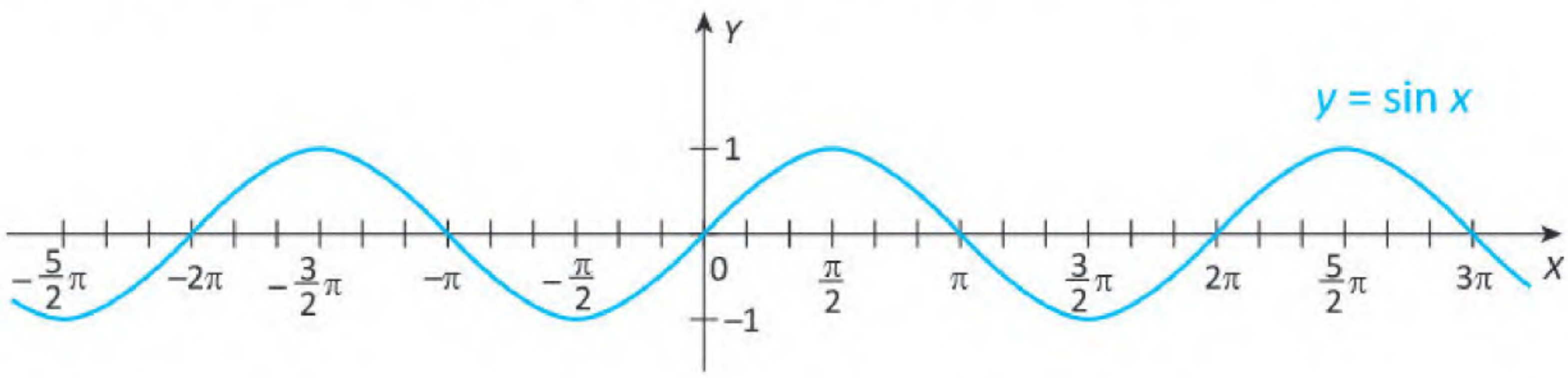
III etap

Funkcja $y = \sin x$ jest nieparzysta, zatem jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych. Możemy więc dorysować wykres funkcji w przedziale $\langle -\pi, 0 \rangle$. Otrzymujemy wykres funkcji $y = \sin x$ na przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$, mającym długość 2π.



IV etap

Okres zasadniczy funkcji $y = \sin x$ wynosi 2π. Powielając fragment wykresu funkcji uzyskany w etapie III, otrzymujemy wykres funkcji $y = \sin x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



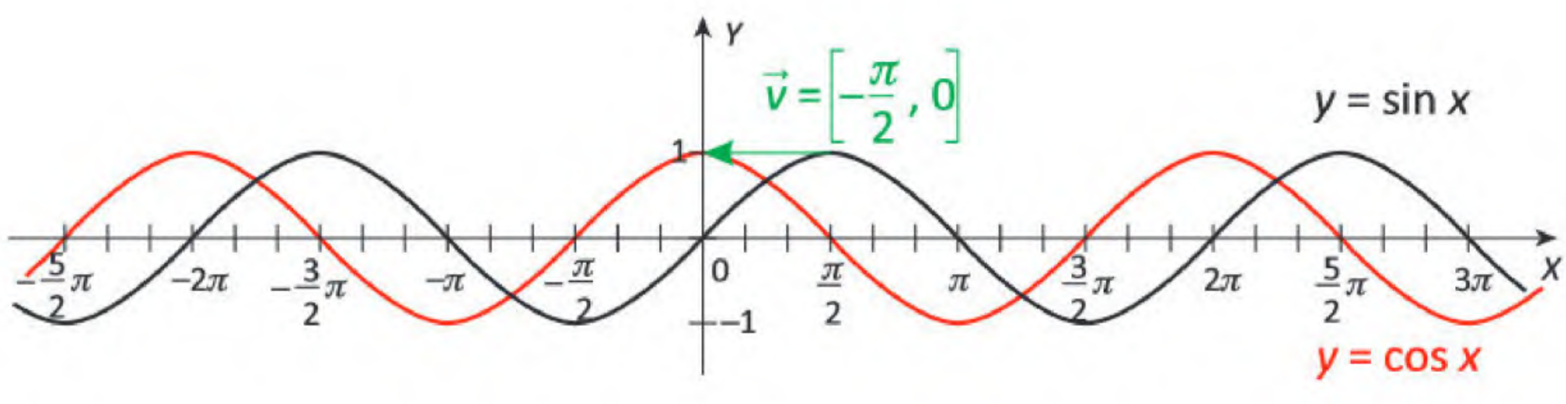
Wykres funkcji *y* = cos *x*

Funkcja $y = \cos x$ jest również określona w zbiorze liczb rzeczywistych. Jej wykres otrzymamy, korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ i przekształceń wykresów funkcji, które omówiliśmy w rozdziale 1. Wiemy, że

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

zatem wykres funkcji $y = \cos x$ otrzymamy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji

$$y = \sin x \quad \text{o wektor } \vec{v}\text{, gdzie } \vec{v} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$



Przykład 1.

Porównamy liczby $\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\sin\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$.

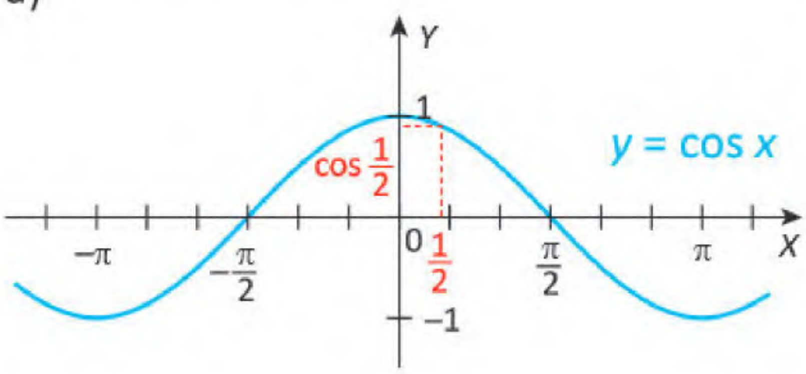
Wiadomo, że $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ oraz $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$. Wystarczy zatem porównać liczby $\cos\frac{1}{2}$ oraz $\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$. Na podstawie wykresu funkcji $y=\cos x$ stwierdzamy, że

$\cos\frac{1}{2}>0,$ (zobacz rysunek a poniżej)

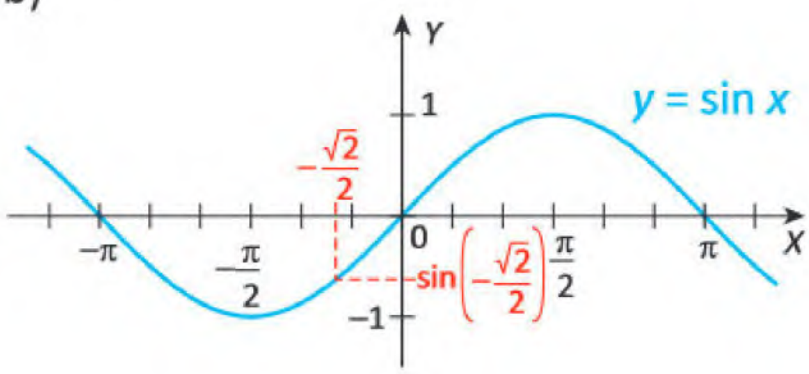
a na podstawie wykresu funkcji $y=\sin x$ wiemy, że

$\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)<0$ (zobacz rysunek b poniżej)

a)



b)



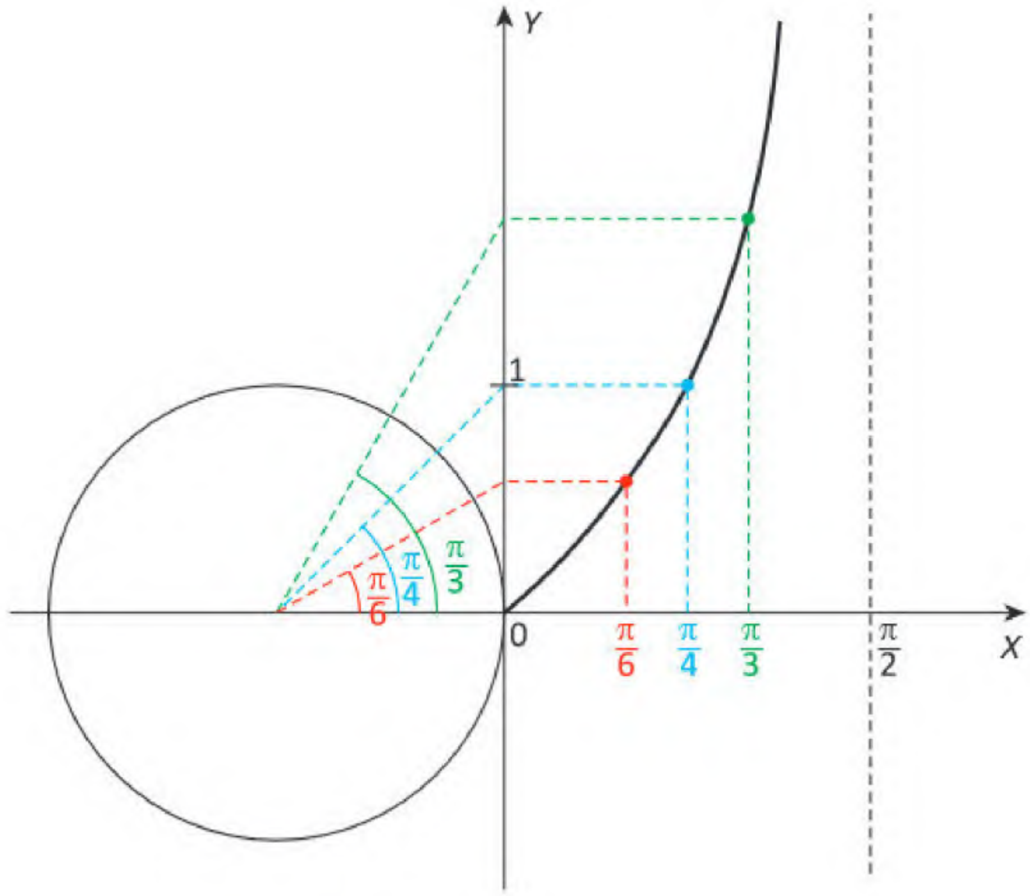
Stąd $\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)>\sin\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$.

Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$

Dziedziną funkcji $y=\operatorname{tg} x$ jest zbiór $\boldsymbol{R}-\left\{x: x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

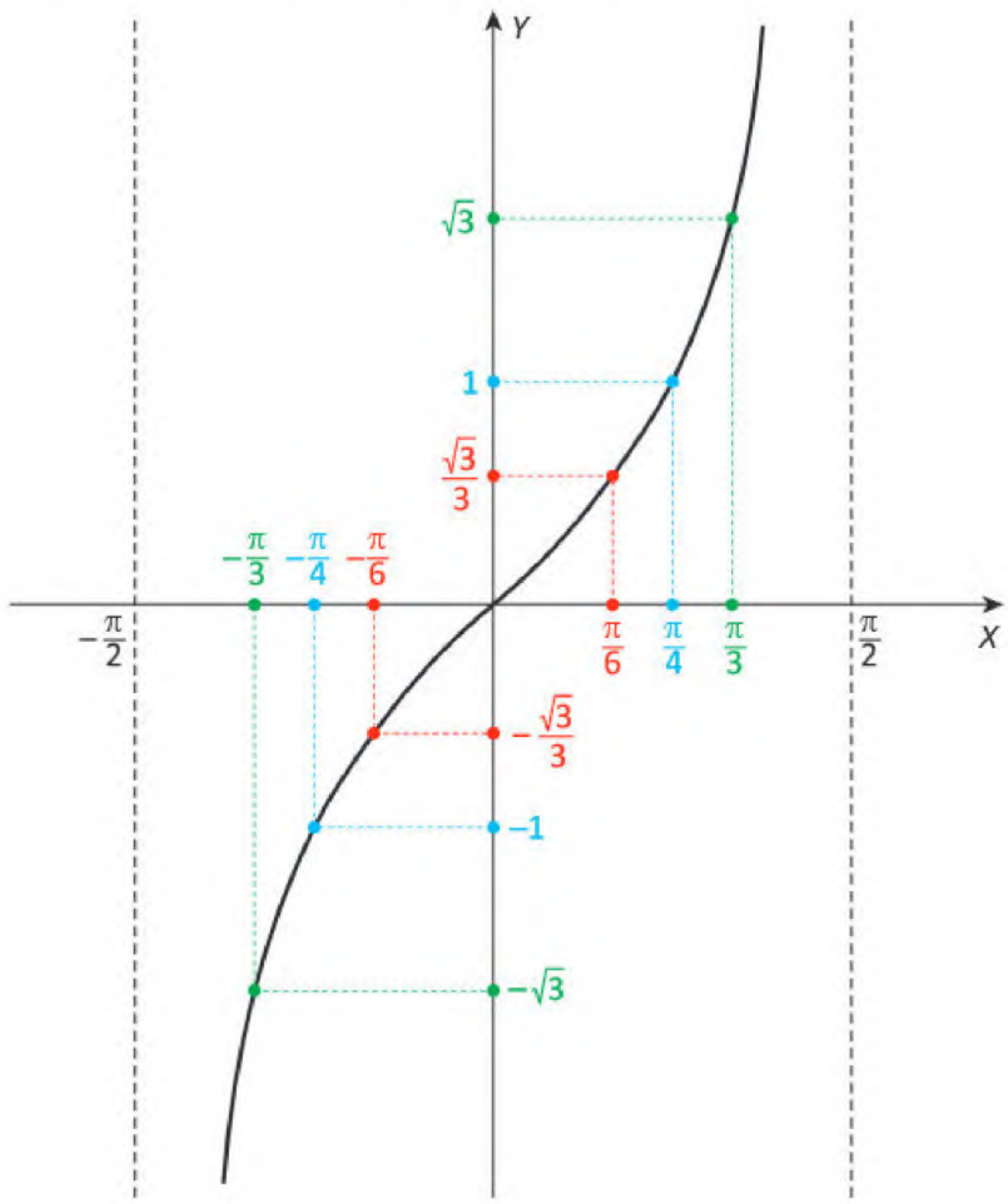
<u>I etap</u>

Do naszkicowania wykresu funkcji $y=\operatorname{tg} x$ w przedziale $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right)$ posłużymy się kołem trygonometrycznym, zobacz str. 269.



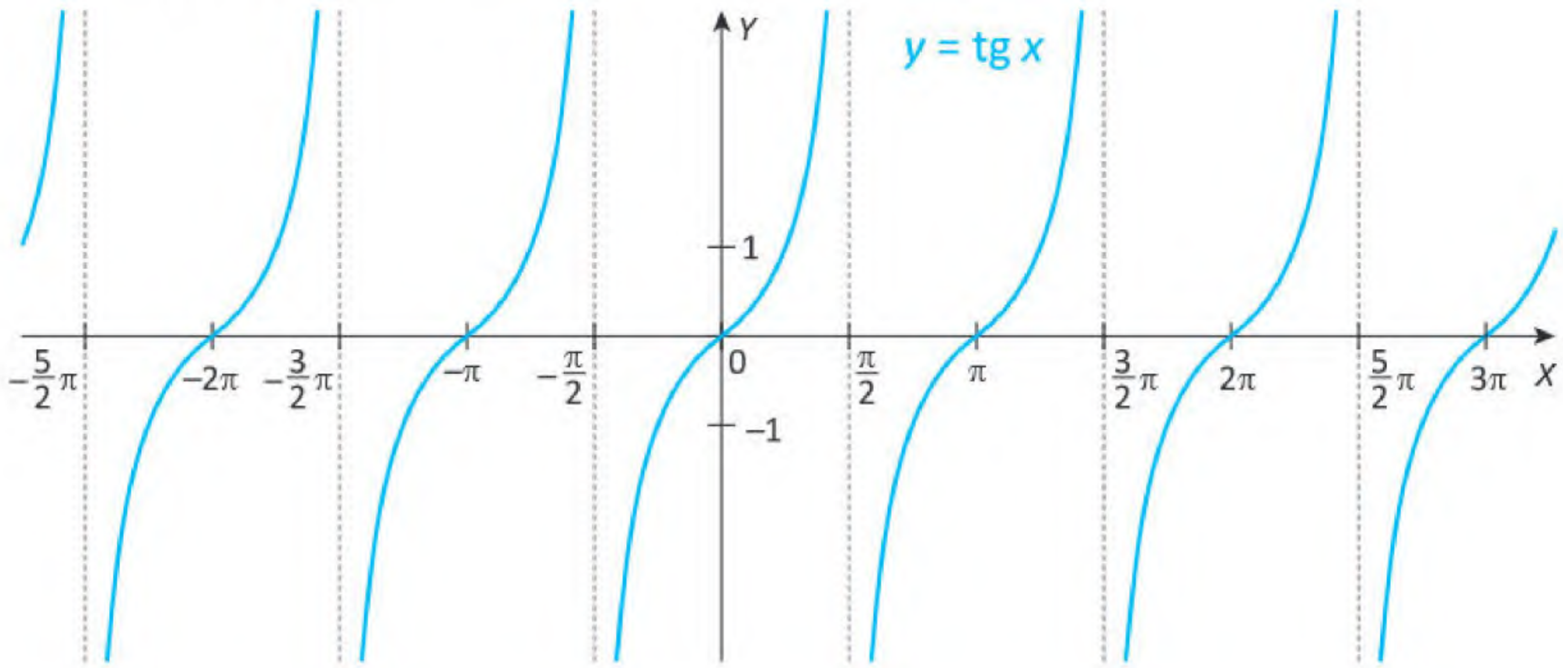
<u>II etap</u>

Funkcja $y = \text{tg}\, x$ jest nieparzysta, zatem jej wykres w przedziale $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right\rangle$ otrzymamy po przekształceniu naszkicowanego w I etapie fragmentu wykresu przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.



III etap

Otrzymaliśmy wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ na przedziale mającym długość π. Okres zasadniczy funkcji tangens też jest równy π. Jeśli więc powielimy tę część wykresu, to otrzymamy cały wykres funkcji tangens.



Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Określimy dziedzinę funkcji f. Zauważ, że wyrażenie

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}$$

nie może przyjmować wartości

$$\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{gdzie } k \text{ może być dowolną liczbą całkowitą.}$$

Zatem

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \boldsymbol{Z}$$

$$\frac{1}{2}x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$x \neq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{zatem}$$

$$D_f = \boldsymbol{R} - \left\{x : x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$$

Aby naszkicować wykres funkcji f, najpierw przekształcimy jej wzór do postaci

$$f(x) = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Wykres funkcji f powstaje z wykresu funkcji $y = \text{tg}\, x$, w wyniku następujących przekształceń:

1) $f_1(x) = \text{tg}\, x$

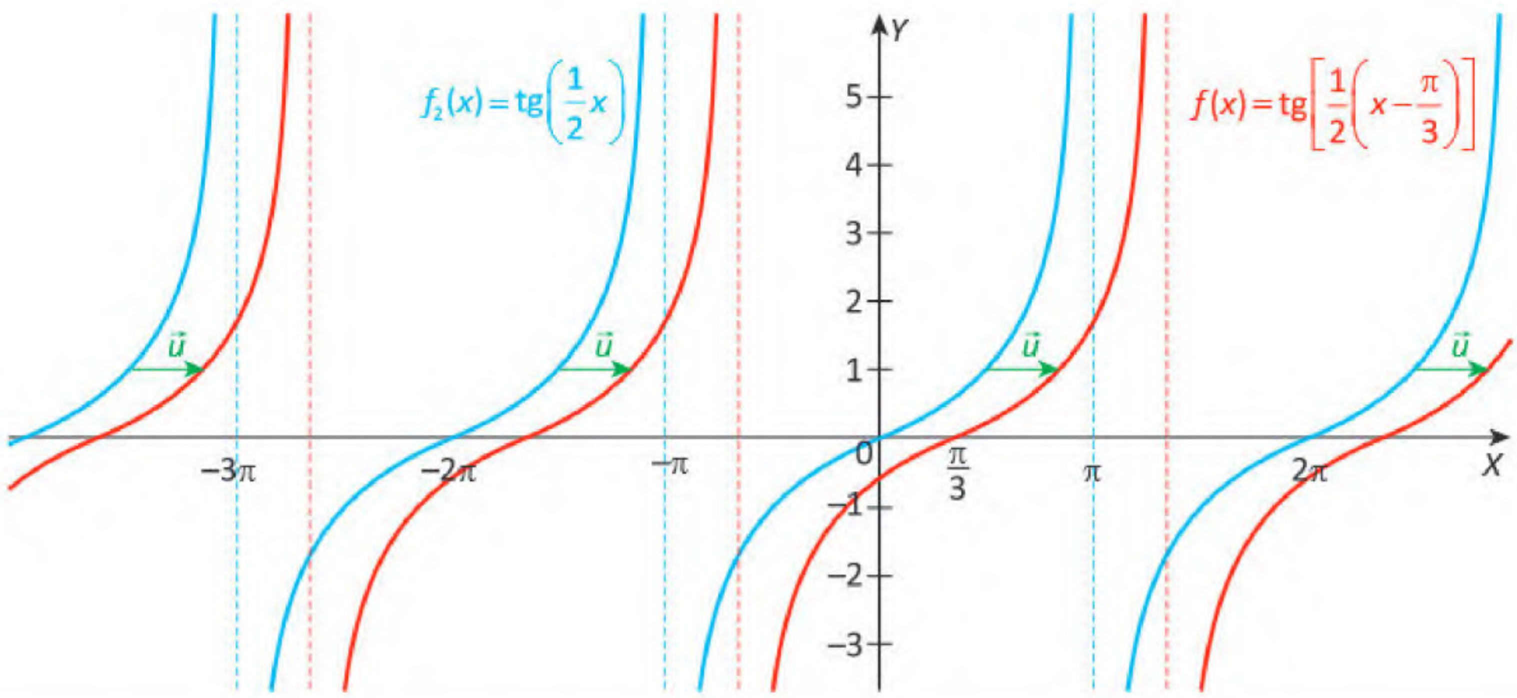
$f_2(x) = f_1\left(\frac{1}{2}x\right)$ – powinowactwo prostokątne wykresu funkcji f_1 o osi OY i skali 2

2) $f_2(x) = \text{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$

$f(x) = f_2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ – translacja wykresu funkcji f_2 o wektor $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = \left[\frac{\pi}{3}, 0\right]$

3) $f(x) = \text{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$.

Wykres funkcji f i f_2 przedstawia rysunek poniżej. Zauważ, że okresem podstawowym funkcji f jest liczba 2π.



Wykres funkcji $y = \text{ctg}\, x$

Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{ctg}\, x$, zatem

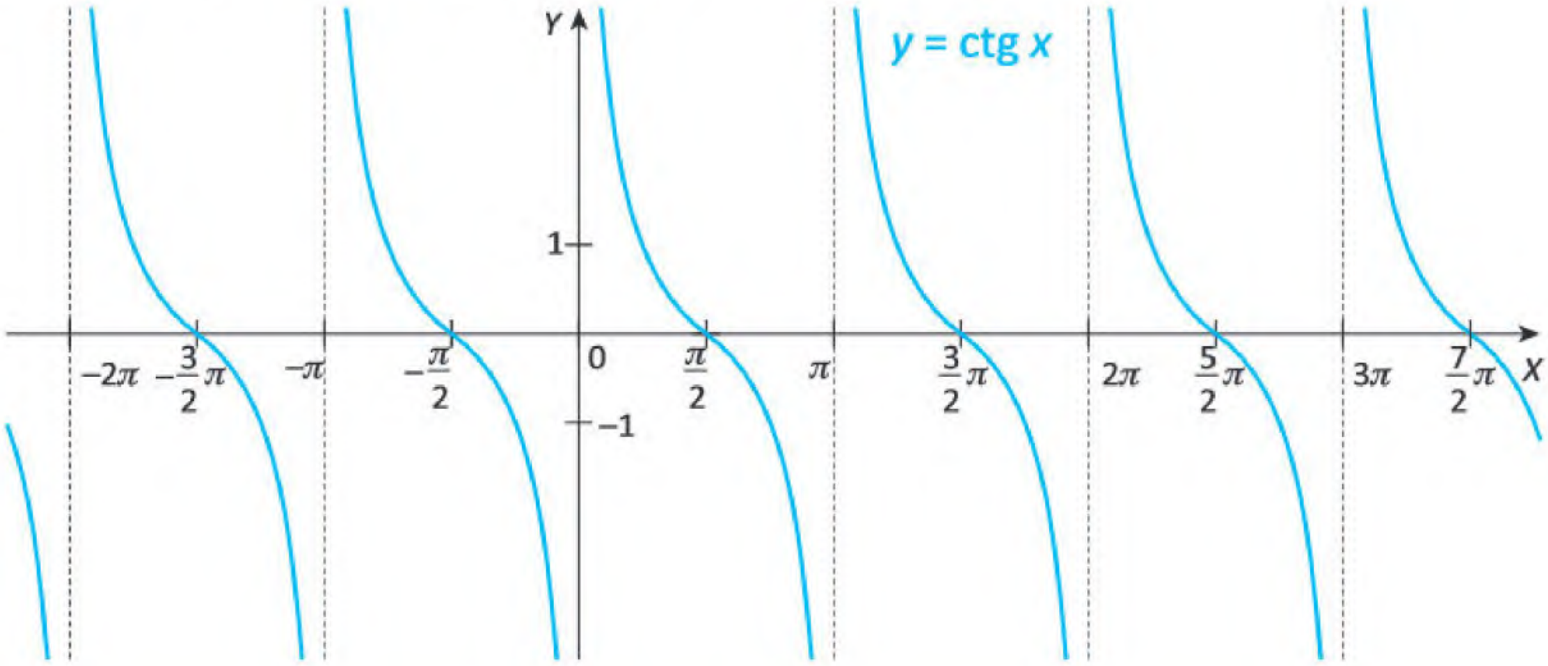
$$\text{ctg}\, x = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} - \{x\colon x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Zatem wykres funkcji $y = \text{ctg}\, x$ można otrzymać z wykresu funkcji $y = \text{tg}\, x$, wykonując kolejno następujące przekształcenia:

przesunąć równolegle wykres funkcji $y = \text{tg}\, x$ o wektor $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$,

a następnie otrzymany wykres przekształcić przez symetrię osiową względem osi OX (czy otrzymamy ten sam wykres, stosując powyższe przekształcenia w odwrotnej kolejności?).

Wykres funkcji $y = \text{ctg}\, x$ przedstawiony jest poniżej.



Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Następnie wyznacz w zbiorze liczb rzeczywistych:
   a) zbiór wartości funkcji $f(x) = \sin x$,
   b) miejsca zerowe funkcji f,
   c) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą.
2. Naszkicuj wykres funkcji $y = \cos x$, gdzie $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$. Następnie wyznacz w zbiorze liczb rzeczywistych:
   a) miejsca zerowe funkcji $f(x) = \cos x$,
   b) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą,
   c) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą.
3. Naszkicuj wykres funkcji $y = \text{tg}\, x$ w zbiorze $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$. Następnie wyznacz w zbiorze liczb rzeczywistych:
   a) argumenty, dla których funkcja $f(x) = \text{tg}\, x$ przyjmuje wartość 1,
   b) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość $-\sqrt{3}$.
4. Naszkicuj wykres funkcji $y = \text{ctg}\, x$ w zbiorze $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Następnie wyznacz w zbiorze liczb rzeczywistych:
   a) miejsca zerowe funkcji $f(x) = \text{ctg}\, x$,
   b) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość -1.
5. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \sin x$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
   a) Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.
   b) Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby: sin 1, sin 2, sin 3, sin 4.

6. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \cos x$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
   a) Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.
   b) Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby: $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$.

7. Funkcje $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = \cos x$ są określone w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.
   a) Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy tych funkcji.
   b) Wyznacz argumenty, dla których $f(x) = g(x)$.
   c) Na podstawie punktu b) podaj wszystkie argumenty, dla których funkcje $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ określone w zbiorze $\boldsymbol{R}$ przyjmują jednakową wartość.

8. Funkcje $f(x) = \operatorname{tg} x$ oraz $g(x) = \operatorname{ctg} x$ są określone w zbiorze $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
   a) Naszkicuj wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych.
   b) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości większe, niż funkcja f?
   c) Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby: $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{ctg} 1$.

9. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres, jeśli:
   a) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$
   b) $f(x) = \dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$
   c) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$

10. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \sin x$, gdzie $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$, naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-2x)$. Jaka jest dziedzina funkcji g?

11. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \cos x$, gdzie $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$, naszkicuj wykres funkcji $g(x) = 3 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$. Jaka jest dziedzina funkcji g?

12. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres, jeśli:
   a) $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
   b) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 1$
   c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
   d) $f(x) = \sin\frac{x}{2} - 2$
   e) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$
   f) $f(x) = -\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5.

Test

1. Punkt $P(-3, -4)$ należy do drugiego ramienia kąta α znajdującego się w położeniu standardowym. Wówczas:

   A. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ B. $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ C. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ D. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

2. Prosta $y = -2x$ zawiera końcowe ramię kąta α znajdującego się w położeniu standardowym. Wówczas:

   A. $\text{tg}\,\alpha = -2$ B. $\text{tg}\,\alpha = \frac{-1}{2}$ C. $\text{ctg}\,\alpha = 2$ D. $\text{ctg}\,\alpha = \frac{-1}{2}$

3. Punkt P jest punktem przecięcia okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 3 oraz prostej $y = -2$. Jeśli punkt P należy do końcowego ramienia kąta znajdującego się w położeniu standardowym, to:

   A. $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ B. $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ C. $\text{tg}\,\alpha = -\frac{2}{3}$ D. $\text{ctg}\,\alpha = -\frac{2}{3}$

4. Sinus kąta 210° jest równy:

   A. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Cosinus kąta 300° jest równy:

   A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Tangens kąta $90^\circ + \alpha$ jest równy:

   A. $\text{tg}\,\alpha$ B. $\text{ctg}\,\alpha$ C. $-\text{ctg}\,\alpha$ D. $-\text{tg}\,\alpha$

7. Jeśli $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i α jest kątem pewnego trójkąta leżącym naprzeciw najdłuższego boku, to:

   A. $\alpha = 90^\circ$ B. $\alpha = 120^\circ$ C. $\alpha = 135^\circ$ D. $\alpha = 150^\circ$

8. Jeśli $\sin\alpha = \frac{-24}{25}$ i $\cos\alpha > 0$, to:

   A. $\text{tg}\,\alpha = -3\frac{3}{7}$ B. $\text{tg}\,\alpha = -\frac{7}{24}$ C. $\text{tg}\,\alpha = \frac{7}{24}$ D. $\text{tg}\,\alpha = 3\frac{3}{7}$

9. Liczba $\sin 170^\circ \cdot \text{tg}\,100^\circ$ jest równa:

   A. $-\cos 10^\circ$ B. $-\sin 10^\circ$ C. $\sin 10^\circ$ D. $\cos 10^\circ$

Zadania otwarte

10. Punkt $P(-48, 14)$ należy do drugiego ramienia kąta α w położeniu standardowym. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

11. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α, wiedząc, że:

a) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ i $\alpha \in (270°, 360°)$ b) $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = 3$ i $\sin\alpha < 0$

12. Oblicz na podstawie definicji wartości funkcji trygonometrycznych kąta:

a) 270° b) 330° c) 225°

13. Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ i $\alpha \in (0°, 360°)$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α.

14. Wiedząc, że $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ i $\sin\alpha < 0$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α.

15. Wiedząc, że $\frac{5\cos\alpha - 4\sin\alpha}{3\sin\alpha} = -2$ dla pewnego kąta α, oblicz tangens kąta α.

D 16. Wykaż, że dla kąta ostrego α równość:

$\operatorname{ctg}(270° - \alpha) \cdot \frac{\sin(180° + \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną.

17. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, oblicz wartość wyrażenia:
$\sin 210° \cdot \cos 120° \cdot \operatorname{tg} 225° \cdot \operatorname{ctg} 240°$.

18. Podaj miarę kąta α, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\alpha \in (90°, 180°)$ b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\alpha \in (90°, 180°)$

c) $\operatorname{tg}\alpha = -1$ i $\alpha \in (270°, 360°)$ d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha \in (0°, 180°)$

19. Oblicz wartość ułamka, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

$$\frac{\cos 120° \cdot \operatorname{ctg} 90° + \operatorname{tg} 225° \cdot \sin 150°}{\operatorname{tg} 210° \cdot \operatorname{ctg} 30° + \cos 135° \cdot \sin 45°}$$

20. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin 120° \cdot \cos 180° \cdot \operatorname{tg} 210°$ b) $\operatorname{ctg} 150° \cdot \sin 30° \cdot \cos 45°$

D 21. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (90°, 180°)$, to $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sin\alpha} + \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha} = 0$.

D 22. Wykaż, że jeśli $\alpha \neq 34^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$, to
$\dfrac{\sin(146^\circ+\alpha)+\cos(304^\circ-\alpha)}{-\sin(326^\circ+\alpha)} = 2$.

D 23. Wykaż, że jeśli $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{4}$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$, to $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2(\pi-\alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2(2\pi-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)} = 1$.

24. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$. Oblicz wartość tej funkcji dla argumentów:

a) $-\dfrac{\pi}{2}$
b) $\dfrac{2\pi}{3}$
c) $k\pi + \dfrac{\pi}{12}$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$

25. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2\sin(-x)$, gdzie $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$. Na podstawie wykresu podaj:
a) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1,
b) maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

26. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, gdzie $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

a) Podaj miejsca zerowe funkcji f.
b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $\dfrac{\pi}{12}$.

27. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x \in \left\langle -\dfrac{5\pi}{3}, -\dfrac{2\pi}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\rangle$.

a) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią OY.
b) Jakie wartości funkcja f przyjmuje dla argumentów należących do przedziału $\left\langle \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{4\pi}{3} \right)$?

28. Ustaw w kolejności od największej do najmniejszej liczby:

a) $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\pi$, $\cos\dfrac{3\pi}{2}$
b) $\operatorname{tg}(\sin 1)$, $\operatorname{tg}\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}(\sin\pi)$, $\operatorname{tg}(\sin 4)$

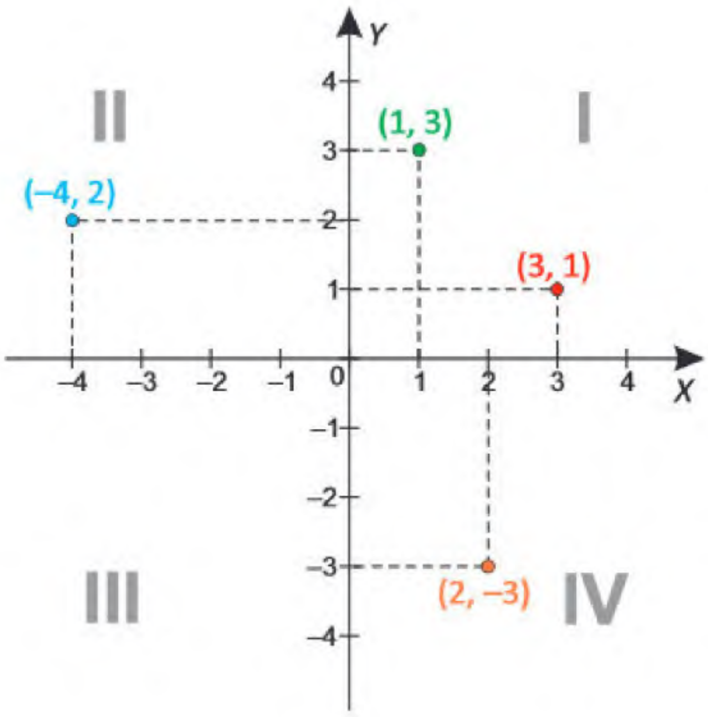
29. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a) $f(x) = \sin\dfrac{x}{3}$
b) $f(x) = 2\cos(1-x)$
c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

6. Geometria analityczna

Odcinek w układzie współrzędnych

Geometria analityczna to dział matematyki, w którym podstawową rolę odgrywa układ współrzędnych na płaszczyźnie. Układ współrzędnych na płaszczyźnie był wstępnie omawiany już w szkole podstawowej. Pojawiał się też w trakcie dotychczasowej nauki w szkole średniej. Przypomnimy i uporządkujemy dotychczasową wiedzę na ten temat.



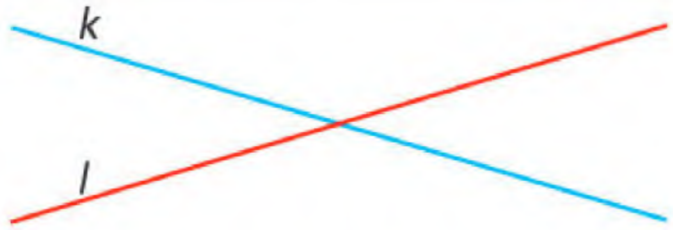
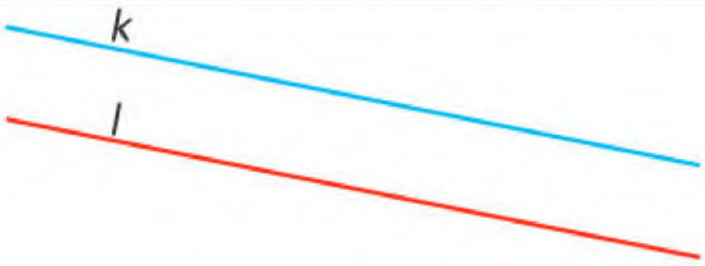
Układem współrzędnych na płaszczyźnie nazywamy dwie prostopadłe osie liczbowe *OX* i *OY*, o wspólnym początku w punkcie *O*. Dzięki niemu każdemu punktowi płaszczyzny można przypisać uporządkowaną parę liczb w sposób jednoznaczny.
Osie układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery części, zwane ćwiartkami układu współrzędnych. Oznaczamy je: I, II, III, IV. Pierwsza ćwiartka to ta, w której znajdują się punkty o obu współrzędnych nieujemnych. Kolejne ćwiartki numerowane są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Jeśli np. punkt o współrzędnych (1, 3) chcemy nazwać punktem *A*, to piszemy $A(1, 3)$ lub $A = (1, 3)$. My stosujemy ten pierwszy, krótszy rodzaj zapisu. Zaznaczanie i odczytywanie punktów w układzie współrzędnych omówione było w szkole podstawowej – podobnie jak wyznaczanie długości odcinka o podanych końcach, czy też wyznaczanie współrzędnych środka takiego odcinka.

Przyporządkowanie punktom w układzie współrzędnych uporządkowanych par liczb umożliwiło opisywanie niektórych figur geometrycznych równaniami lub nierównościami, a także badanie zagadnień geometrycznych metodami algebraicznymi.

W klasie pierwszej pokazaliśmy na przykład, że proste w układzie współrzędnych można opisać pewnymi równaniami.

Zagadnienie geometryczne, polegające na badaniu położenia względem siebie dwóch prostych, jest równoważne zagadnieniu algebraicznemu, polegającemu na badaniu liczby rozwiązań odpowiedniego układu równań.

zagadnienie geometryczne	zagadnienie algebraiczne
 proste *k*, *l* mają 1 punkt wspólny	$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ układ równań ma 1 rozwiązanie
 proste *k*, *l* są równoległe	$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ układ równań jest sprzeczny
 proste *k*, *l* się pokrywają	$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ układ równań jest nieoznaczony

Podstawy geometrii analitycznej stworzyli matematycy francuscy żyjący w XVII w. Jednym z nich był Pierre de Fermat (czyt. *ferma*) – z zawodu prawnik, matematyką zajmujący się jedynie w czasie wolnym. Wprowadził on po raz pierwszy układ współrzędnych, wyprowadził równania linii prostej, paraboli, okręgu oraz hiperboli.
Drugi to Kartezjusz – wybitny filozof, który chciał stworzyć uniwersalną metodę, możliwą do wprowadzenia we wszystkich dziedzinach nauki i prowadzącą do powstawania wiedzy pewnej. Punktem odniesienia była dla Kartezjusza precyzja wnioskowania matematycznego. Wyniki swych badań zawarł on w traktacie filozoficznym *Rozprawa o metodzie*. Dodatkiem do tego traktatu było dzieło *Geometria*, które zawierało zastosowanie w geometrii opisanej w traktacie metody. Polegała ona na połączeniu algebry i geometrii, przez co geometria zyskała ogólną metodę rozwiązywania problemów, a algebra stała się bardziej intuicyjna poprzez ilustracje geometryczne.

Geometria Kartezjusza miała przełomowe znaczenie w rozwoju matematyki. Żyjący ponad 150 lat po Kartezjuszu wybitny matematyk francuski Pierre Simon de Laplace określił to następująco: „Dzień, w którym Kartezjusz sformułował swoją metodę, można uznać za dzień narodzin współczesnej matematyki”.

W tym rozdziale usystematyzujemy i uzupełnimy informacje dotyczące równania prostej. Omówimy także równanie okręgu oraz sposoby rozwiązywania układów równań, z których jedno jest równaniem prostej, a drugie – równaniem okręgu lub równaniem paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Przypomnijmy dwa twierdzenia charakteryzujące odcinek położony w układzie współrzędnych.

Twierdzenie 1.

Jeśli $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, to długość odcinka AB wyraża się wzorem

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dowód tego twierdzenia wynika bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie 2.

Jeśli punkt S jest środkiem odcinka AB, gdzie $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, to

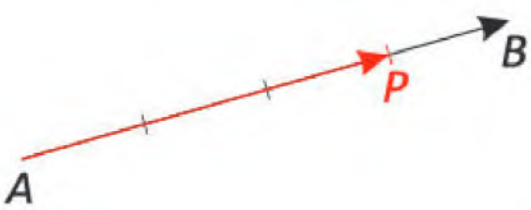
$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Ćwiczenie 1. Punkt $S(-2, -1)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A(2, 1)$. Wyznacz współrzędne punktu B oraz długość odcinka AB.

Przykład 1.

Końcami odcinka AB są punkty $A(-4, -1)$ i $B(12, 7)$. Wyznaczymy taki punkt P należący do odcinka AB, że $|AP| : |PB| = 3 : 1$.

Naszkicujmy rysunek pomocniczy, na którym punkt P jest szukanym punktem.



Warunek $|AP| : |BP| = 3 : 1$ jest równoważny równości

$$\overrightarrow{AP} = 3 \cdot \overrightarrow{PB}$$

Przyjmujemy oznaczenie $P(x, y)$ i otrzymujemy

$$\overrightarrow{AP} = [x - (-4), y - (-1)] = [x + 4, y + 1]$$

$$\overrightarrow{PB} = [12 - x, 7 - y], \text{ więc}$$

$$3 \cdot \overrightarrow{PB} = [36 - 3x, 21 - 3y].$$

Równość wektorów $\overrightarrow{AP}$ i $3 \cdot \overrightarrow{PB}$ oznacza równość odpowiednich współrzędnych:

$$x + 4 = 36 - 3x \quad \wedge \quad y + 1 = 21 - 3y$$
$$x = 8 \quad \wedge \quad y = 5$$

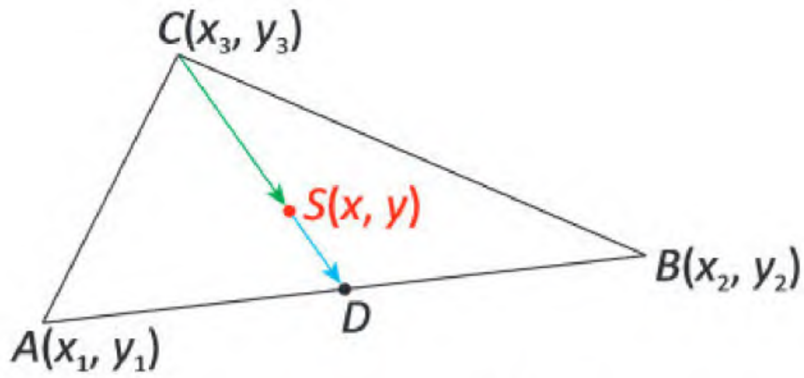
Punkt P ma współrzędne $(8, 5)$.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż zadanie z przykładu 1., stosując dwukrotnie twierdzenie 2.

Ćwiczenie 3. Końcami odcinka AB są punkty $A(-4, -8)$ i $B(1, 2)$. Wyznacz taki punkt P należący do odcinka AB, że $|AP| : |PB| = 1 : 4$.

Niech w układzie współrzędnych dany będzie trójkąt ABC, gdzie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Wyznaczymy współrzędne środka ciężkości S tego trójkąta.
Przypomnijmy: środek ciężkości trójkąta jest punktem, w którym przecinają się środkowe tego trójkąta. Wiemy też, że środek ciężkości dzieli każdą środkową w stosunku 1 : 2.
Wykorzystamy tę własność w naszych obliczeniach.

Przyjmujemy oznaczenia: $S(x, y)$, D – środek boku AB trójkąta ABC. Szkicujemy rysunek.



Wyznaczamy współrzędne punktu D oraz współrzędne wektorów $\overrightarrow{CS}$ i $\overrightarrow{SD}$.

$$D\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Korzystamy z twierdzenia 2.

$$\overrightarrow{CS} = [x - x_3, y - y_3] \qquad \overrightarrow{SD} = \left[\frac{x_1+x_2}{2} - x, \frac{y_1+y_2}{2} - y\right]$$

Ponieważ punkt S dzieli środkową CD odpowiednio w stosunku 1 : 2, więc

$$\overrightarrow{CS} = 2 \cdot \overrightarrow{SD}$$

$$[x - x_3, y - y_3] = 2 \cdot \left[\frac{x_1+x_2}{2} - x, \frac{y_1+y_2}{2} - y\right], \qquad \text{czyli}$$

$$[x - x_3, y - y_3] = [x_1 + x_2 - 2x, y_1 + y_2 - 2y], \qquad \text{zatem}$$

$$x - x_3 = x_1 + x_2 - 2x \quad \wedge \quad y - y_3 = y_1 + y_2 - 2y$$

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \wedge \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.
Jeśli punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, gdzie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$, to

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

Ćwiczenie 4. W trójkącie ABC dane są: $A(-4, -2)$, $C(8, 8)$ oraz $S(5, 1)$, gdzie S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołka B.

Ćwiczenie 5. Na płaszczyźnie dane są trzy punkty: A, B i S. Skonstruuj punkt C, wiedząc, że punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta, którego środkiem ciężkości jest punkt S. Przy jakim położeniu punktów A, B i S istnieje rozwiązanie zadania?

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz długości boków trójkąta ABC, wiedząc, że $A(-6, -3)$, $B(4, -3)$, $C(2, 1)$,

   Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.
2. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, jeśli:
   a) $A(-10, 4)$, $B(6, -2)$
   b) $A(-2, 5)$, $B(4, -3)$
   c) $A(-2, 4)$, $\overrightarrow{AB} = [2, 8]$
   d) $B(-3, -5)$, $\overrightarrow{AB} = [1, -3]$
3. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-2, -3)$, $B(4, 5)$, $C(0, 1)$. Oblicz długości środkowych AD, BE i CF i współrzędne środka ciężkości tego trójkąta.
4. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A(4, 8)$ i $B(-12, 4)$ oraz środek ciężkości $S(-3, 3)$. Oblicz:
   a) współrzędne wierzchołka C
   b) obwód trójkąta ABC.
5. Punkt $S(-2, 3)$ jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, zaś punkt $D(-6, 0)$ – środkiem boku AB. Oblicz:
   a) długość środkowej CD
   b) współrzędne punktu C.
6. Dane są punkty $A(2, -5)$ i $B(-4, 7)$. Wyznacz współrzędne punktu P należącego do odcinka AB, jeśli:
   a) $\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{1}{3}$
   b) $\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{2}{3}$
   c) $\frac{|BP|}{|AP|} = 3$
   d) $\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{3}{4}$

Równanie kierunkowe prostej

W klasie pierwszej omówiliśmy własności funkcji liniowej. Wiesz, że wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest pewna prosta na płaszczyźnie. Mówimy wówczas, że tę prostą opisuje równanie kierunkowe $y = ax + b$. Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, współczynnik b – wyrazem wolnym.

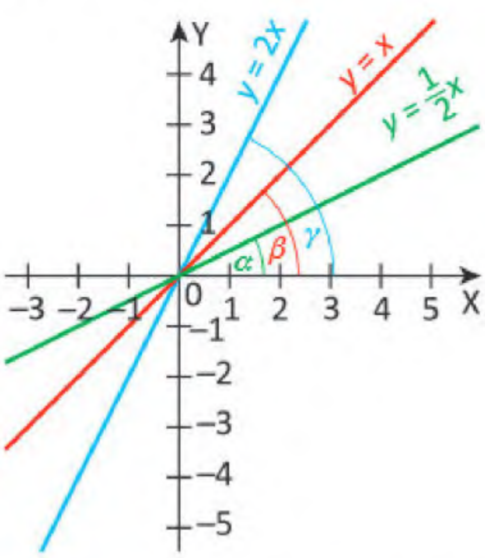
Definicja 1.
Równaniem kierunkowym prostej nazywamy równanie mające postać $y = ax + b$.

Równaniem kierunkowym można opisać tylko te proste, które nie są prostopadłe do osi OX.

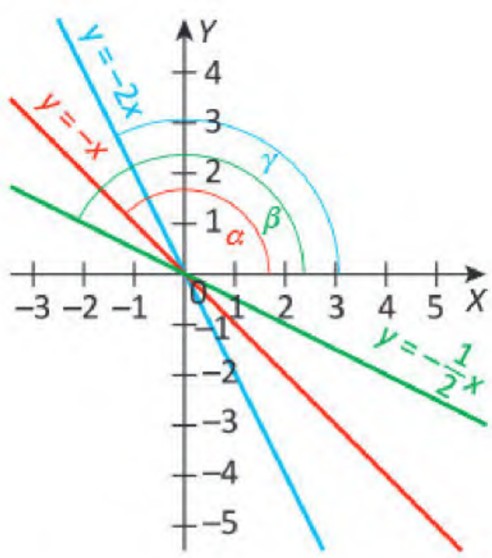
Kąt nachylenia prostej do osi *OX*

Rysunki poniżej przedstawiają przykładowe proste opisane równaniem $y = ax$, jeśli $a > 0$, $a < 0$ oraz $a = 0$.

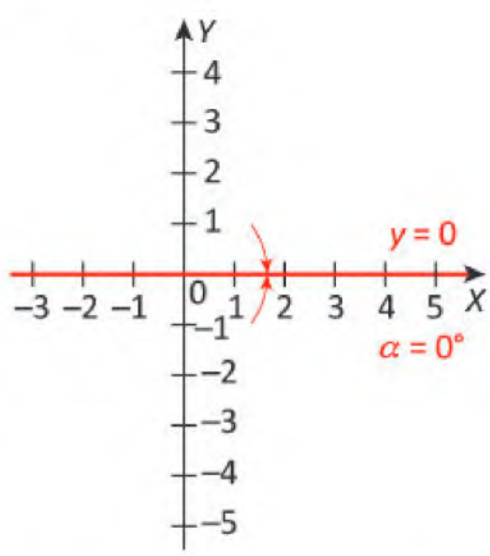
1) $a > 0$



2) $a < 0$



3) $a = 0$



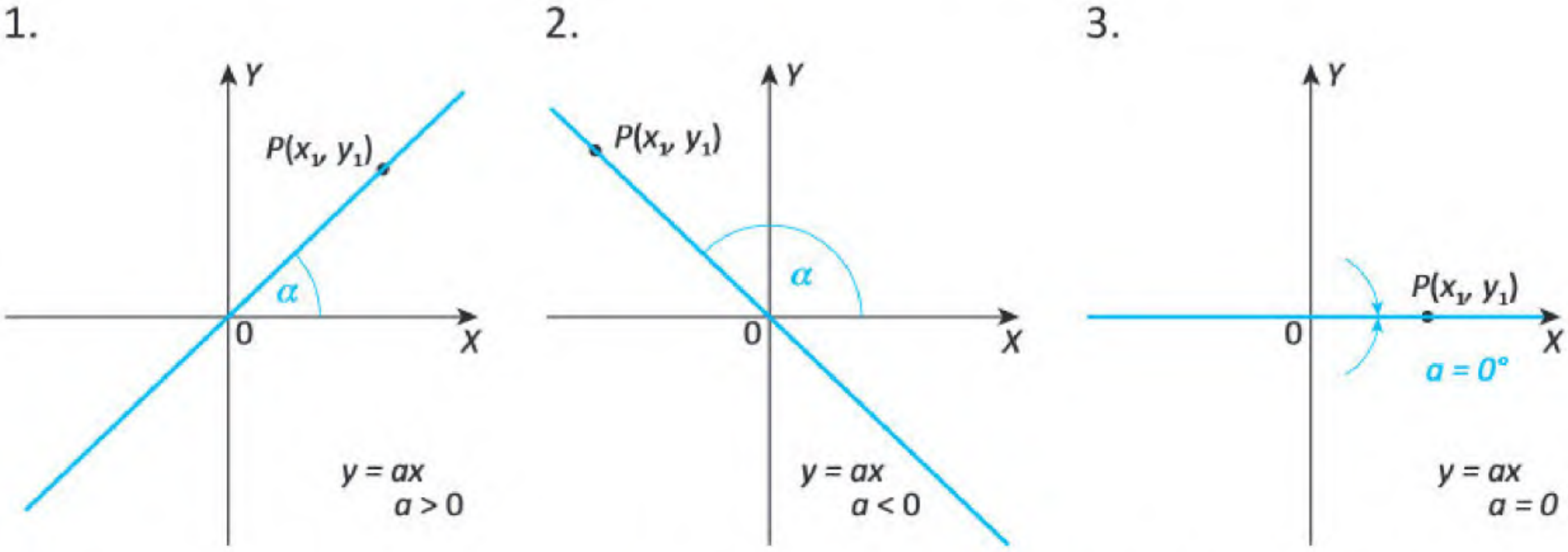
Każdej prostej odpowiada pewien kąt, zwany **kątem nachylenia** prostej do osi OX. Jedno ramię takiego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX, a drugie ramię leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych i zawiera się w danej prostej.

Kąt nachylenia prostej opisanej równaniem kierunkowym $y = ax$ do osi OX jest:

- ostry, jeśli $a > 0$
- rozwarty, jeśli $a < 0$
- równy 0°, jeśli $a = 0$.

Twierdzenie 1.
Prosta opisana równaniem $y = ax$ jest nachylona do osi OX pod takim kątem α, $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ)$ i $\alpha \neq 90^\circ$, że $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Dowód: Rozważmy ponownie proste opisane równaniami postaci $y = ax$.



Na drugim ramieniu kąta α nachylenia prostej do osi OX wybieramy dowolny punkt $P(x_1, y_1)$ różny od punktu $(0, 0)$. Na podstawie definicji tangensa otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

Wiemy również, że punkt $P(x_1, y_1)$ należy do prostej mającej równanie $y = ax$, więc współrzędne punktu P spełniają to równanie, stąd $y_1 = ax_1$. Otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{ax_1}{x_1} = a,$$ co kończy dowód.

Przykład 1.

Napiszemy równanie prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych i nachylonej do osi OX pod kątem $60°$.

Szukaną prostą opisuje równanie $y = ax$. Z twierdzenia 1. wynika, że

$a = \operatorname{tg} 60°$, czyli $a = \sqrt{3}$

Szukane równanie prostej to $y = \sqrt{3}x$.

Przykład 2.

Wyznaczymy kąt nachylenia prostej o równaniu $y = -x$ do osi OX.

Współczynnik kierunkowy w równaniu kierunkowym prostej jest równy -1, zatem

$\operatorname{tg}\alpha = -1$,

gdzie α jest kątem nachylenia prostej do osi OX. Zauważamy, że kąt α jest rozwarty. Wyznaczamy miarę kąta α, korzystając z własności tangensa:

$\operatorname{tg} 45° = 1$ oraz $\operatorname{tg}(180° - \beta) = -\operatorname{tg}\beta$

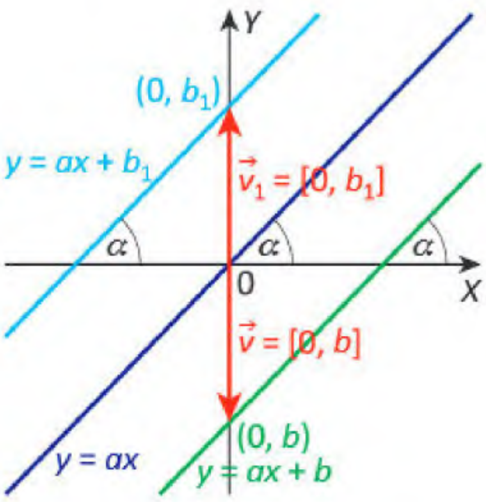
Mamy:

$\operatorname{tg}(180° - 45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$, zatem

$\alpha = 135°$

Prosta o równaniu $y = -x$ jest nachylona do osi OX pod kątem $135°$.

Zauważ, że prosta opisana równaniem $y = ax + b$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego prostej $y = ax$ o wektor $[0, b]$. Ilustruje to rysunek poniżej.



Proste o równaniach

$y = ax$ oraz $y = ax + b$,

są równoległe, a więc są nachylone do osi OX pod tym samym kątem.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Prosta opisana równaniem kierunkowym $y = ax + b$ jest nachylona do osi OX pod takim kątem α, $\alpha \in \langle 0°, 180°)$ i $\alpha \neq 90°$, że $\operatorname{tg} \alpha = a$.

UWAGA: Współczynnik kierunkowy a w równaniu kierunkowym prostej $y = ax + b$ nazywamy też **współczynnikiem kątowym** – ze względu na związek z kątem nachylenia tej prostej do osi OX.

Ćwiczenie 1. Wyznacz współczynnik kątowy w równaniu kierunkowym prostej nachylonej do osi OX pod kątem 150°. Wiedząc dodatkowo, że ta prosta przecina oś OX w punkcie $(\sqrt{3}, 0)$, napisz równanie kierunkowe tej prostej.

Równoległość prostych opisanych równaniami kierunkowymi

Rozważmy dwie proste opisane równaniami $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$. Te proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy są nachylone do osi OX pod tym samym kątem α, czyli tylko wtedy, gdy

$$a = \operatorname{tg} \alpha = a_1$$

Twierdzenie 3.
Proste o równaniach $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = a_1$.

Ćwiczenie 2. Wyznacz wzór funkcji liniowej f, której wykres przecina oś OY w punkcie $A(0, -5)$ i jest równoległy do prostej k: $y = -3x + 7$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty

Wyznaczymy teraz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2), gdzie $x_1 \neq x_2$.

Warunek $x_1 \neq x_2$

znaczy, że rozpatrywana prosta nie jest prostopadła do osi OX.

Można ją więc opisać równaniem kierunkowym $y = ax + b$.

Po podstawieniu współrzędnych (x_1, y_1) do tego równania otrzymujemy:

$y_1 = ax_1 + b,\quad$ stąd $\quad b = y_1 - ax_1$

Równanie prostej można zapisać w postaci

$y = ax + y_1 - ax_1,\qquad$ czyli

(1) $y - y_1 = a(x - x_1)$.

Do otrzymanego równania wstawiamy współrzędne drugiego punktu.

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1), \quad \text{stąd} \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Dokonujemy podstawienia do równania (1):

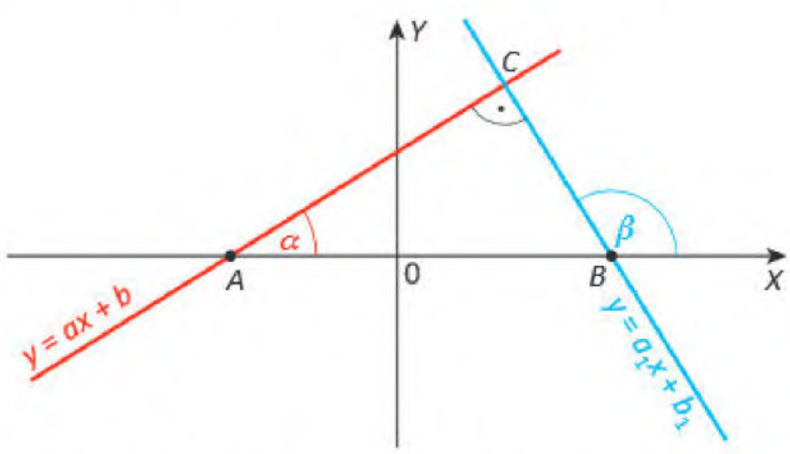
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Otrzymaliśmy następujący wniosek.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2), gdzie $x_1 \neq x_2$, można zapisać w postaci: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Prostopadłość prostych opisanych równaniami kierunkowymi

Naszkicujemy we wspólnym układzie współrzędnych dwie proste opisane równaniami kierunkowymi $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$, gdzie $a > 0$ i $a_1 < 0$. Następnie wyprowadzimy warunek na prostopadłość tych wykresów.



Prosta opisana równaniem $y = ax + b$ przecina oś OX w punkcie A i jest nachylona do osi OX pod takim kątem ostrym α, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Prosta opisana równaniem $y = a_1x + b_1$ przecina oś OX w punkcie B i jest nachylona do osi OX pod takim kątem rozwartym β, że $\operatorname{tg}\beta = a_1$.

Proste te nie są równoległe do osi OX, bo z założenia $a \neq 0$ i $a_1 \neq 0$. Nie są też prostopadłe do osi OX, bo są wykresami funkcji.

Oznaczmy przez C punkt przecięcia tych prostych i rozważmy kąty trójkąta ABC.

$|\sphericalangle BAC| = \alpha \quad$ oraz $\quad |\sphericalangle ABC| = 180^\circ - \beta$

Kąt ACB jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| = 90^\circ, \quad \text{czyli}$$

$$\alpha + 180^\circ - \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ + \alpha$$

Otrzymana równość jest równoważna równości

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha),$$

bo tangens dla dowolnych dwóch miar ze zbioru $(90^\circ, 180^\circ)$ przyjmuje różne wartości. Zatem

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\alpha \neq 0, \text{ bo } \alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$$

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha = -1, \quad \text{stąd} \quad a_1 \cdot a = -1$$

Ćwiczenie 3. Wykaż, że proste opisane równaniami $y = ax + b$ i $y = a_1x + b_1$, przecinające się w punkcie leżącym na osi OX są prostopadłe tylko wtedy, gdy $a \cdot a_1 = -1$.

Twierdzenie 4.
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$, gdzie $a \neq 0$ i $a_1 \neq 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a \cdot a_1 = -1$.

Ćwiczenie 4. Wyznacz równanie prostej l, która jest prostopadła do prostej k: $y = 7 + 4x$ i przecina prostą k w punkcie o odciętej -4.

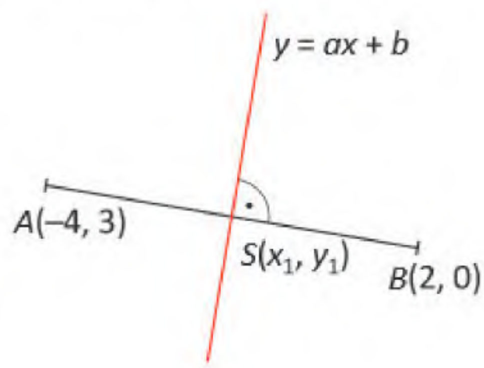
Przykład 3.

Wyznaczymy równanie symetralnej odcinka AB, jeśli $A(-4, 3)$, $B(2, 0)$.

Szkicujemy rysunek pomocniczy. Zauważamy, że

$$x_A \neq x_B.$$

Szukamy równania kierunkowego prostej, prostopadłej do odcinka AB i przechodzącej przez jego środek.



Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB:

$$a_{AB} = \frac{0-3}{2-(-4)} = -\frac{1}{2}$$

Symetralna odcinka AB ma równanie $y = ax + b$, gdzie

$$a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad \text{– korzystamy z twierdzenia 4.}$$

Zatem $a = 2$.

Równanie symetralnej przyjmuje postać $y = 2x + b$.

Teraz znajdujemy współrzędne punktu $S(x_1, y_1)$, będącego środkiem odcinka AB.

$$x_1 = \frac{-4+2}{2} = -1 \quad \text{oraz} \quad y_1 = \frac{3+0}{2} = 1\frac{1}{2}, \quad \text{stąd} \quad S\left(-1, \frac{3}{2}\right).$$

Ponieważ punkt S należy do symetralnej, więc jego współrzędne spełniają równanie tej symetralnej.

$$1{,}5 = 2 \cdot (-1) + b \quad \text{stąd} \quad b = 3{,}5$$

Symetralna odcinka AB ma równanie $y = 2x + 3{,}5$.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Podaj kąt nachylenia do osi OX prostej opisanej równaniem:

   a) $y = -\sqrt{3}\,x$ b) $y = -1$ c) $y = 1 + \frac{x}{\sqrt{3}}$ d) $y = \sqrt{3} - x$

2. Korzystając z tablic matematycznych lub kalkulatora, podaj przybliżoną miarę kąta nachylenia do osi OX prostej o równaniu:

   a) $y = 2{,}356x + 1{,}428$ b) $y = -0{,}81x - 7{,}115$

3. Napisz wzór funkcji liniowej f, której wykres jest nachylony do osi OX pod kątem α i przechodzi przez punkt A, jeśli:

   a) $\alpha = 45°$, $A(3, -2)$ b) $\alpha = 0°$, $A(1, 4)$

   c) $\alpha = 150°$, $A\left(0, \sqrt{2}\right)$ d) $\alpha = 135°$, $A(14, -20)$

4. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych AB i CD. Czy te proste są równoległe?

   a) $A(0, 0)$, $B(-1, -4)$, $C(0, -3)$, $D(7, 25)$ b) $A(5, 7)$, $B(2, 1)$, $C(-3, -2)$, $D(-4, 0)$

5. Napisz równanie kierunkowe prostej l, równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt A, jeśli:

   a) $k\colon y = -2x + 5$, $A\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ b) $y = 2 - \sqrt{5}$, $A(3, -6)$

6. Napisz równanie kierunkowe prostej, do której należą dane punkty A i B.

   a) $A(-2, 1)$, $B(3, -4)$ b) $A(8, 2)$, $B(4, -10)$ c) $A\left(\sqrt{2}, -\sqrt{5}\right)$, $B\left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{5}\right)$

7. Napisz równanie kierunkowe prostej l, prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A, jeśli:

   a) $k\colon y = 0{,}5x - 1$; $A(-4, 0)$ b) $k\colon y = 3 + x$; $A(4, 5)$ c) $k\colon y = -\frac{3}{2}x$; $A(6, 1)$

8. Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach A, B, jeśli:

   a) $A(-6, 13)$, $B(10, -3)$ b) $A(4, 7)$, $B(-2, 7)$ c) $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$

9. Wykres funkcji liniowej f jest prostopadły do prostej k i przecina tę prostą na osi OY w punkcie o rzędnej 4. Wyznacz wzór funkcji f, wiedząc, że tangens kąta nachylenia prostej k do osi OX jest równy -2.

Równanie ogólne prostej

Równaniem kierunkowym można opisać tylko te proste w układzie współrzędnych, które są wykresami funkcji liniowych. Takim równaniem nie można opisać prostych prostopadłych do osi OX.
Omówimy teraz typ równania, którym można opisać dowolną prostą w układzie współrzędnych.

Definicja 1.

Równaniem ogólnym prostej nazywamy równanie mające postać $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.

Warunek $A^2 + B^2 \neq 0$ oznacza, że współczynniki A i B nie mogą być jednocześnie równe zeru.

Każde równanie zapisane w postaci kierunkowej łatwo jest zapisać w postaci ogólnej.

Kierunkowa postać równania prostej	Ogólna postać równania prostej
$y = 2x - 3$ Wówczas $a = 2$, $b = -3$	$-2x + y + 3 = 0$ $A = -2$, $B = 1$, $C = 3$
$y = -4x$ Wówczas $a = -4$, $b = 0$.	$4x + y = 0$ $A = 4$, $B = 1$, $C = 0$
$y = 6$ Wówczas $a = 0$, $b = 6$	$y - 6 = 0$ $A = 0$, $B = 1$, $C = -6$

Równanie ogólne prostej $Ax + By + C = 0$ można przedstawić w postaci kierunkowej tylko wtedy, gdy $B \neq 0$; otrzymujemy $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$.

Ćwiczenie 1. Doprowadź równanie ogólne $10x - 2y + 3 = 0$ do postaci kierunkowej.

Ćwiczenie 2. Naszkicuj w układzie współrzędnych prostą opisaną równaniem ogólnym $2x + 6 = 0$. Czy równanie tej prostej można doprowadzić do postaci kierunkowej?

Zauważ, że wiele równań w postaci ogólnej może opisywać tą samą prostą, na przykład:

$$-2x + y + 4 = 0 \qquad 6x - 3y - 12 = 0 \qquad x - \frac{1}{2}y - 2 = 0$$

Powyższe trzy równania są równoważne.

Przykład 1.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty:

a) $(1, 2)$ i $(-4, 1)$ b) $(2, 3)$ i $(2, -5)$

Ad a) I sposób – Korzystamy bezpośrednio z równania ogólnego prostej:

$Ax + By + C = 0.$

Wstawiamy odpowiednio współrzędne punktów w miejsca x, y i otrzymujemy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} A+2B+C=0 \\ -4A+B+C=0 \end{cases}$$

Jeśli od pierwszego równania odejmiemy drugie, to otrzymamy

$5A + B = 0,$ stąd

$B = -5A$

Zauważmy, że $A \neq 0$. Jeśli $A = 0$, to $B = -5A = 0$, co jest sprzeczne z warunkiem $A^2 + B^2 > 0$. Do jednego z równań układu w miejsce B podstawiamy $-5A$ i wyznaczamy C w zależności od A:

$-4A - 5A + C = 0,$ więc

$C = 9A$

Teraz równanie $Ax + By + C = 0$ można zapisać następująco:

$Ax - 5Ay + 9A = 0,$ gdzie $A \neq 0$.

Dzieląc równanie stronami przez A, otrzymujemy

$x - 5y + 9 = 0$ – szukane równanie ogólne prostej

II sposób – Zauważamy, że punkty $(1, 2)$ i $(-4, 1)$ nie wyznaczają prostej prostopadłej do osi OX. Możemy więc skorzystać z równania prostej w postaci kierunkowej:

$y = ax + b.$

Podstawiamy do tego równania odpowiednio w miejsce x i y współrzędne obu punktów i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2=a+b \\ 1=-4a+b \end{cases},$$ stąd

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{5} \\ b=\dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Zatem równanie kierunkowe ma postać $y = \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$. Teraz zapisujemy je w postaci ogólnej:

$$\frac{1}{5}x - y + \frac{9}{5} = 0$$

Ad b) Zauważamy, że prosta wyznaczona przez punkty $(2, 3)$ i $(2, -5)$ jest zbiorem punktów, których pierwsza współrzędna jest równa 2. Zatem prostą opisuje równanie $x = 2$, stąd

$x - 2 = 0$ – szukane równanie ogólne prostej

UWAGA: Nie istnieje równanie kierunkowe prostej $x - 2 = 0$. Próba wyznaczenia równania kierunkowego prostej przechodzącej przez punkty $(2, 3)$ i $(2, -5)$ prowadzi do sprzecznego układu równań (sprawdź to!).

Ćwiczenie 3. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-5, 4)$ oraz $(-5, -1)$ – najpierw sposobem I przedstawionym w przykładzie 1 a), następnie sposobem przedstawionym w punkcie b).

Równoległość prostych opisanych równaniami ogólnymi

Wyznaczymy teraz warunek na równoległość prostych opisanych równaniami ogólnymi.

Dane są dwie proste równoległe k i l, opisane równaniami:

$k\colon\ Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0,\qquad l\colon\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ {A_1}^2 + {B_1}^2 \neq 0.$

Załóżmy, że $B \neq 0$ i $B_1 \neq 0$. Wówczas możemy zapisać powyższe równania w postaci kierunkowej:

$$k\colon\ y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{oraz} \qquad l\colon\ y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$$

Wiesz, że proste opisane równaniami kierunkowymi są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają jednakowe współczynniki kierunkowe, czyli wtedy, gdy

$-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1}$, stąd

$AB_1 = A_1B$

$AB_1 - A_1B = 0$

Niech teraz $B = 0$. Wówczas prosta k jest prostopadła do osi OX. To znaczy, że prosta l jest równoległa do prostej k wtedy, gdy jest prostopadła do osi OX, czyli wtedy, gdy $B_1 = 0$.

Obliczamy:

$AB_1 - A_1B = A \cdot 0 - A_1 \cdot 0 = 0.$

Z drugiej strony, jeśli spełnione są warunki: $AB_1 - A_1B = 0$ i $B = 0$, to

$AB_1 = 0$ oraz $A \neq 0$, więc

$B_1 = 0$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Jeśli $A^2+B^2 \neq 0$ oraz $A_1{}^2+B_1{}^2 \neq 0$, to proste opisane równaniami $Ax+By+C=0$ i $A_1x+B_1y+C_1=0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $AB_1-A_1B=0$.

Z twierdzenia 1. wynika następujący wniosek.

Dowolną prostą równoległą do prostej o równaniu $Ax+By+C=0$, gdzie $A^2+B^2 \neq 0$, można opisać równaniem $Ax+By+C_1=0$.

Przykład 2.

Sprawdzimy, czy proste k: $2x+4y+5=0$ i l: $-\frac{3}{2}x-3y+7=0$ są równoległe.

Wykonujemy obliczenia – zgodnie z twierdzeniem 1.

$$2 \cdot (-3) - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 4 = -6+6=0$$

Proste k i l są równoległe.

Przykład 3.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej m, która jest równoległa do prostej n: $6x-3y+5=0$ i do której należy punkt $(-2, 6)$.

Zgodnie z ostatnim wnioskiem, równanie prostej m można zapisać w postaci

$$6x-3y+C=0$$

Wyznaczamy C, wstawiając w miejsce x i y współrzędne danego punktu:

$$6 \cdot (-2) - 3 \cdot 6 + C = 0, \qquad \text{stąd}$$

$$C=30$$

Prostą m można opisać równaniem ogólnym $6x-3y+30=0$.

Ćwiczenie 4. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych proste n i m z przykładu 3.

Ćwiczenie 5. Wyznacz równanie ogólne prostej k równoległej do prostej l: $3x-5y+1=0$ i przechodzącej przez początek układu współrzędnych na dwa sposoby:

1) skorzystaj z ostatniego wniosku,
2) skorzystaj z równoległości prostych opisanych równaniami kierunkowymi.

Prostopadłość prostych opisanych równaniami ogólnymi

Wyznaczymy teraz warunek, przy którym proste opisane równaniami ogólnymi są prostopadłe.

Rozpatrzmy równania prostych k oraz l w postaci ogólnej:

k: $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, $\quad$ l: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_1{}^2 + B_1{}^2 \neq 0$.

Załóżmy, że $B \neq 0$ oraz $B_1 \neq 0$. Wówczas możemy przekształcić dane równania do postaci kierunkowej:

$$k\colon\ y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{oraz} \qquad l\colon\ y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$$

Proste opisane równaniami kierunkowymi są prostopadłe, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1. Zatem proste k i l są prostopadłe tylko wtedy, gdy

$\left(-\frac{A}{B}\right) \cdot \left(-\frac{A_1}{B_1}\right) = -1,$ $\quad$ czyli wtedy, gdy

$AA_1 = -BB_1,$ $\quad$ stąd

$AA_1 + BB_1 = 0.$

Niech teraz $B = 0$. Wówczas prosta k jest prostopadła do osi OX. Wtedy prosta l jest prostopadła do prostej k, jeśli jest równoległa do osi OX, czyli wtedy, gdy $A_1 = 0$. Dla takich prostych równość

$AA_1 + BB_1 = 0$

też jest prawdziwa.

Z drugiej strony, jeśli jest spełniony warunek $AA_1 + BB_1 = 0$ oraz $B = 0$, to

$AA_1 = 0$ oraz $A \neq 0$, $\quad$ zatem

$A_1 = 0,$

co znaczy, że prosta l jest równoległa do osi OX, więc proste k i l są prostopadłe.

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Jeśli $A^2 + B^2 \neq 0$ oraz $A_1{}^2 + B_1{}^2 \neq 0$, to proste opisane równaniami $Ax + By + C = 0$ i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $AA_1 + BB_1 = 0$.

Z twierdzenia 2. wynika następujący wniosek.

Dowolną prostą prostopadłą do prostej opisanej równaniem $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, można opisać równaniem: $-Bx + Ay + C_1 = 0$.

Ćwiczenie 6. Sprawdź, korzystając z twierdzenia 2., czy proste k: $2x + 3y - 7 = 0$ i l: $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y + 4\frac{1}{2} = 0$ są prostopadłe.

Przykład 4.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej k przechodzącej przez punkt $(2, -1)$ i prostopadłej do prostej l: $9x - 4y - 7 = 0$.

Zgodnie z ostatnim wnioskiem, równanie prostej k możemy zapisać w postaci

$$4x + 9y + C = 0$$

Obliczamy współczynnik C: $4 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) + C = 0$, stąd $C = 1$

Prostą k można opisać równaniem: $4x + 9y + 1 = 0$.

Przykład 5.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru p, dla których równania

$$px + 2y - 7 = 0 \quad \text{i} \quad 6x + (p+1)y + 5 = 0$$

opisują: a) proste równoległe b) proste prostopadłe.

Dla wyznaczonych wartości p zapiszemy równania tych prostych.

Ad a) Zauważamy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej p istnieją proste określone danymi równaniami, bo $p^2 + 2^2 \neq 0$ i $6^2 + (p+1)^2 \neq 0$.

Proste k: $px + 2y - 7 = 0$ i l: $6x + (p+1)y + 5 = 0$ są równoległe tylko wtedy, gdy

$$p(p+1) - 2 \cdot 6 = 0, \text{ czyli } p^2 + p - 12 = 0, \ \Delta = 49, \ \sqrt{\Delta} = 7 \ p = -4 \text{ lub } p = 3$$

- Jeśli $p = -4$, to równania prostych równoległych k i l przyjmują postać:
  k: $-4x + 2y - 7 = 0$ oraz l: $6x - 3y + 5 = 0$.
- Jeśli $p = 3$, to równania prostych k i l są następujące:
  k: $3x + 2y - 7 = 0$ oraz l: $6x + 4y + 5 = 0$.

Ad b) Równania $px + 2y - 7 = 0$ i $6x + (p+1)y + 5 = 0$ opisują dwie proste prostopadłe tylko wtedy, gdy $p \cdot 6 + 2 \cdot (p+1) = 0$, czyli $p = -0{,}25$. Jeśli $p = -0{,}25$, to równania przyjmują postać $-0{,}25x + 2y - 7 = 0$ oraz $6x + 0{,}75y + 5 = 0$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Prostą k można opisać równaniem kierunkowym $y = 0{,}5x + 2$. Które z podanych równań ogólnych opisuje prostą k?
   a) $x - 2y - 4 = 0$ b) $-3x - 6y + 12 = 0$ c) $2x + y - 4 = 0$ d) $x - 2y + 4 = 0$
2. Dane jest równanie ogólne prostej k. Wyznacz, o ile istnieje, równanie kierunkowe tej prostej.
   a) $x - y + 2 = 0$ b) $3x - \sqrt{3}y = 0$ c) $2x + 2 = 0$ d) $4y - 12 = 0$
3. Oblicz brakujący współczynnik w równaniu ogólnym prostej k, jeśli kąt nachylenia tej prostej do osi OX jest równy α.
   a) k: $2x + By - 3 = 0$, $\alpha = 45^\circ$ b) k: $-4x + By + 7 = 0$, $\alpha = 90^\circ$
   c) k: $Ax + 3y + 8 = 0$, $\alpha = 150^\circ$ d) k: $Ax - \sqrt{2}\,y = 0$, $\alpha = 120^\circ$
4. Sprawdź, czy proste k i l są równoległe, jeśli:
   a) k: $x - 3y + 5 = 0$, l: $4x - 12y + 1 = 0$ b) k: $x - 3y + 4 = 0$, l: $-2x + 6y = 0$
   c) k: $5x - 4y + 1 = 0$, l: $4x - 5y - 1 = 0$ d) k: $x + 3 = 0$, l: $x + y + 3 = 0$

5. Sprawdź, czy proste k i l są prostopadłe, jeśli:
   a) k: $x + 5y + 4 = 0$, l: $-x - 2y = 0$ b) k: $3x - 2y + 9 = 0$, l: $2x + 3y - 8 = 0$
   c) k: $0{,}5x - y - 3 = 0$, l: $-0{,}5x - 0{,}25y + 1 = 0$
   d) k: $0{,}2x + 4 = 0$, l: $5y - 0{,}25 = 0$

6. Wyznacz równanie ogólne prostej l, równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P, jeśli:
   a) k: $-2x + 5y + 1 = 0$, $P(0, -3)$ b) k: $3x - 2y + 4 = 0$, $P(-1, 0)$
   c) k: $5x - 5 = 0$, $P(4, -9)$ d) k: $3y + 6 = 0$, $P(-5, 2)$

7. Wyznacz równanie ogólne prostej l, prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P, jeśli:
   a) k: $x + 2y + 3 = 0$, $P(4, 0)$ b) k: $2x + 4 - \sqrt{3} = 0$, $P(2, -1)$
   c) k: $\sqrt{2}\,x - 3y = 0$, $P\left(-\sqrt{2}, -1\right)$ d) k: $3x + 6y - 2 = 0$, $P(0, 5)$
   e) k: $0{,}5x + 0{,}2y - 10 = 0$, $P(-6, 8)$ f) k: $-0{,}75x + 0{,}25y + 7 = 0$ $P(-2, 2)$

8. Wyznacz równanie ogólne prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty P i Q.
   a) $P(2, 1)$, $Q(-3, 4)$ b) $P(0, -2)$, $Q(3, 7)$ c) $P(2, 5)$, $Q(2, -3)$
   d) $P(-1, 3)$, $Q(2, 3)$ e) $P(6, -3)$, $Q(-2, 5)$ f) $P(20, -6)$, $Q(-8, 14)$

9. Wyznacz liczbę C, dla której proste k, l, m przecinają się w jednym punkcie, jeśli: k: $x + y + 1 = 0$, l: $x + C = 0$, m: $3x - y - 9 = 0$.

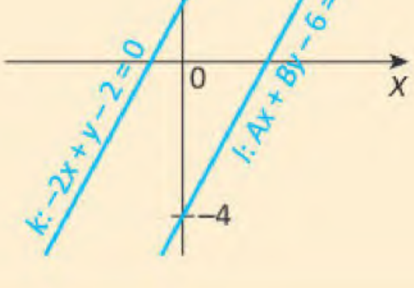
10. Dla jakiej wartości parametru m proste k: $mx + (m + 4)y - 5 = 0$ oraz l: $(m + 1)x - my - 10 = 0$ przecinają się na osi odciętych?

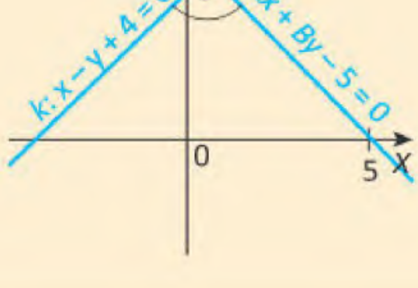
11. Dla jakiej wartości parametru m proste k: $x - my + m + 4 = 0$ oraz l: $2mx + y - m - 1 = 0$ przecinają się na osi rzędnych?

12. Wyznacz wartość parametru m, dla której proste
    k: $(m - 1)x + (m + 1)y - 5m = 0$ oraz l: $3x - 2y + 4 = 0$ są:
    a) równoległe b) prostopadłe.
    Dla wyznaczonej wartości m podaj równanie prostej k.

13. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których proste
    k: $(m^2 - 2)x - y = 0$ oraz l: $mx - y + 6 = 0$ są prostopadłe.

14. Na podstawie danych na rysunku poniżej wyznacz współczynniki A, B w równaniu ogólnym prostej l.

a)


b)


Równanie okręgu

Wiesz, że okrąg o środku w punkcie S i promieniu r, to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny P, których odległość od środka S jest równa r, czyli $|SP| = r$, $r > 0$. Wyznaczymy równanie opisujące zbiór wszystkich punktów w prostokątnym układzie współrzędnych, które leżą w odległości r od ustalonego punktu $S(x_S, y_S)$.

Obliczamy długość odcinka SP:

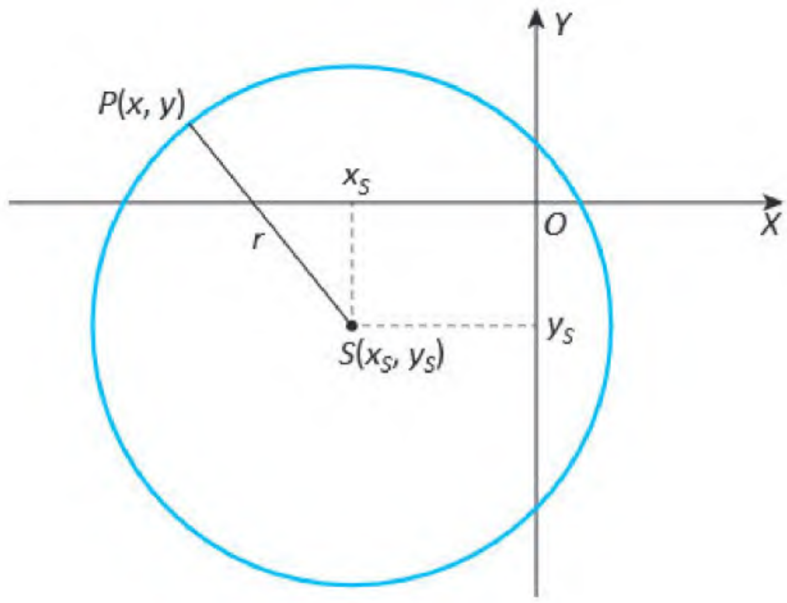
$$|SP| = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2}$$

zatem

$$\sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2} = r$$

Obie strony równania są nieujemne, więc możemy je podnieść do kwadratu i w ten sposób otrzymamy równanie równoważne:

$$(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$$



Otrzymaliśmy równanie okręgu o środku w punkcie $S(x_S, y_S)$ i promieniu r, $r > 0$. Współrzędne każdego punktu należącego do tego okręgu spełniają równanie $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$.
I odwrotnie, jeśli współrzędne punktu $P(x, y)$ spełniają to równanie, to punkt $P(x, y)$ należy do okręgu o środku w punkcie $S(x_S, y_S)$ i promieniu r, $r > 0$.

Definicja 1.

Równanie $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$, nazywamy **równaniem kanonicznym okręgu**.

Z równania kanonicznego okręgu łatwo odczytać współrzędne środka okręgu i jego promień.

Przykład 1.

Równanie $x^2 + (y - 9)^2 = 10$ opisuje okrąg o środku w punkcie o współrzędnych $(0, 9)$ i promieniu równym $\sqrt{10}$. Sprawdzimy, czy punkty $A(3, 8)$, $B(2, 6)$ należą do tego okręgu.

Po podstawieniu współrzędnych punktu A w miejsce x i y do równania okręgu otrzymujemy zależność prawdziwą:

$(-3)^2 + (8 - 9)^2 = 10$, czyli $9 + 1 = 10$

Jeśli podobnie podstawimy współrzędne punktu B, to otrzymamy równość:

$2^2 + (-3)^2 = 10$, która jest sprzeczna.

Punkt A należy do danego okręgu, natomiast punkt B nie należy do tego okręgu.

Ćwiczenie 1. Naszkicuj w układzie współrzędnych okrąg z przykładu 1. Zaznacz punkty A i B.

Ćwiczenie 2. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $(-2, 4)$ i promieniu 16. Podaj przykładowe dwa punkty, które należą do tego okręgu.

Przekształcimy teraz równanie $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$, korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy. Mamy

$$x^2 - 2x_S x + x_S^2 + y^2 - 2y_S y + y_S^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2x_S x - 2y_S y + x_S^2 + y_S^2 - r^2 = 0$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$a = -2x_S, \quad b = -2y_S, \quad c = x_S^2 + y_S^2 - r^2$$

Otrzymujemy równanie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, które jest równaniem okręgu, o ile $x_S^2 + y_S^2 - c > 0$, czyli $a^2 + b^2 - 4c > 0$ (dlaczego?).

Wniosek: Jeśli $a^2 + b^2 - 4c > 0$, to równanie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ opisuje okrąg o środku w punkcie $S(x_S, y_S)$ i promieniu r, gdzie $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ oraz $x_S = -\frac{a}{2}$, $y_S = -\frac{b}{2}$.

Równanie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, gdzie $a^2 + b^2 - 4c > 0$, nazywamy **równaniem okręgu w postaci zredukowanej** lub **równaniem ogólnym okręgu**.

Ćwiczenie 3. Równanie $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ opisuje okrąg, bo $(-6)^2 + 8^2 - 4 \cdot 16 > 0$. Stosując wzory z ostatniego wniosku, wyznacz środek i promień tego okręgu. Następnie narysuj ten okrąg w układzie współrzędnych.

Równanie okręgu w postaci zredukowanej można doprowadzić do postaci kanonicznej.

Przykład 2.

Doprowadzimy równanie okręgu $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ do postaci kanonicznej.

Przekształcamy lewą stronę równania:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$$
$$\underbrace{x^2 - 6x + 9 - 9} + \underbrace{y^2 + 8y + 16} = 0$$
$$\underbrace{(x-3)^2 - 9} + \underbrace{(y+4)^2} = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9, \qquad \text{stąd } S(3, -4), \quad r = 3.$$

Przykład 3.

Postępując podobnie, jak w przykładzie 2, sprawdzimy, czy równanie
$x^2+y^2-4x-10y+29=0$ opisuje okrąg.

Mamy:

$$\underbrace{x^2-4x}+\underbrace{y^2-10y}+29=0$$

$$\underbrace{(x-2)^2-4}+\underbrace{(y-5)^2-25}+29=0$$

$$(x-2)^2+(y-5)^2=0$$

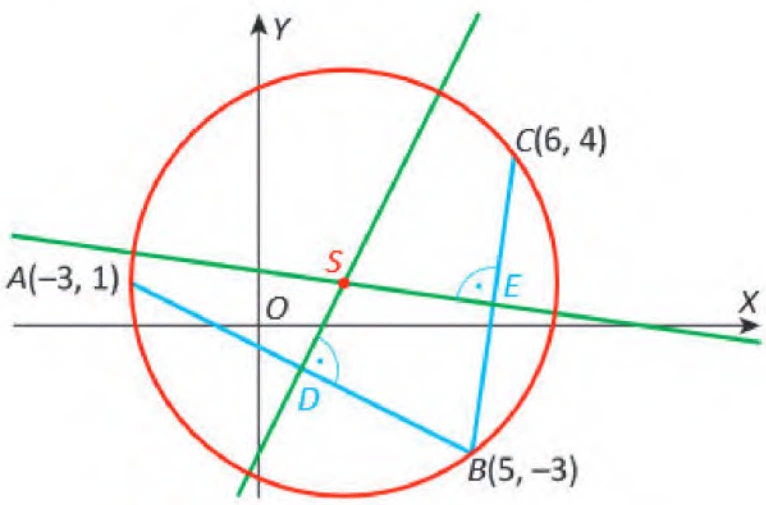
Suma kwadratów jest równa zero tylko wtedy, gdy każdy składnik tej sumy jest równy zero. Zatem ostatnie równanie spełnia tylko jedna para liczb $(2, 5)$.

Równanie $x^2+y^2-4x-10y+29=0$ nie jest równaniem okręgu, lecz opisuje punkt o współrzędnych $(2, 5)$.

Przykład 4.

Napiszemy równanie okręgu wyznaczonego przez trzy punkty: $A(-3, 1)$, $B(5, -3)$, $C(6, 4)$.

Środek okręgu jest punktem równoodległym od punktów A, B, C, więc jest on punktem przecięcia symetralnych odcinków AB i BC.



Rozwiązanie może się składać z następujących etapów:

1) Wyznaczamy środek D odcinka AB.
   $D(1, -1)$ twierdzenie 2. ze str. 292
2) Obliczamy współczynnik kierunkowy a_1 prostej AB.
   $a_1=\frac{-1}{2}$ $a_1=\frac{-3-1}{5-(-3)}$, zobacz str. 298
3) Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka AB.
   $y=2x-3$ (przeprowadź obliczenia) zobacz przykład 3. ze str. 299
4) Wyznaczamy środek E odcinka BC.
   $E\left(5\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
5) Obliczamy współczynnik kierunkowy a_2 prostej BC.
   $a_2=7$
6) Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka BC.
   $y=\frac{-1}{7}x+\frac{9}{7}$

7) Wyznaczamy środek S okręgu. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{-1}{7}x + \frac{9}{7} \end{cases}$$ i otrzymujemy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, stąd $S(2, 1)$

8) Obliczamy promień okręgu, na przykład

$r = |SA| = 5$

9) Zapisujemy równanie okręgu wyznaczonego przez punkty A, B i C.

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

<u>II sposób</u> – Korzystamy z równania okręgu w postaci kanonicznej.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie (a, b) – współrzędne środka okręgu, r – promień, $(r > 0)$

Współrzędne punktów A, B, C spełniają równanie okręgu. To spostrzeżenie prowadzi nas do układu trzech równań z trzema niewiadomymi.

$$\begin{cases} (-3 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2 \\ (5 - a)^2 + (-3 - b)^2 = r^2 \\ (6 - a)^2 + (4 - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Porządkujemy każde równanie tego układu.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 6a - 2b + 10 = r^2 \\ a^2 + b^2 - 10a + 6b + 34 = r^2 \\ a^2 + b^2 - 12a - 8b + 52 = r^2 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami od pierwszego równania drugie oraz od drugiego równania trzecie. Otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi a i b.

$$\begin{cases} 16a - 8b = 24 \\ 2a + 14b = 18 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Obliczamy r^2. Korzystamy na przykład z pierwszego równania początkowego układu równań

$r^2 = (-3 - 2)^2 + (1 - 1)^2$

$r^2 = 25$

Ostatecznie początkowy układ równań jest równoważny układowi:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ r^2 = 25 \end{cases}$$

Na koniec zapisujemy równanie okręgu wyznaczonego przez punkty A, B i C:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dane jest równanie okręgu w postaci kanonicznej. Podaj środek i promień tego okręgu.
   a) $(x+2)^2+(y-1)^2=4$ b) $(x-3)^2+y^2=6\frac{1}{4}$
   c) $x^2+y^2=121$ d) $(-x-7)^2+(y+4)^2=5$
2. Dany jest środek S i promień r okręgu. Napisz równanie tego okręgu w postaci kanonicznej; następnie doprowadź je do postaci zredukowanej.
   a) $S(6, 0), r=3$ b) $S(-2, 3), r=1$ c) $S(7, -1), r=9$
3. Dane jest równanie okręgu w postaci zredukowanej. Napisz równanie okręgu w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne środka i promień okręgu.
   a) $x^2+y^2-2x-3=0$ b) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$
   c) $x^2+y^2+16x+2y=0$ d) $x^2+y^2-20y+36=0$
   e) $x^2+y^2+10x-2y+10=0$ f) $x^2+y^2-\sqrt{8}\,x+y=0$
4. Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór punktów, opisany danym równaniem.
   a) $x^2+y^2+6x=0$ b) $x^2+y^2-2xy=0$
   c) $x^2+y^2-12x+36=0$ d) $x^2+y^2-3x-3y+\frac{1}{2}=0$
5. Dane jest równanie okręgu oraz punkty A i B. Sprawdź, które z tych punktów należą do okręgu.
   a) $x^2+y^2+5x=0,\ A(-1, 2), B(-2, \sqrt{6})$
   b) $x^2+(y-1)^2=13,\ A(2, -2),\ B(4, -1)$
6. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S, przechodzącego przez punkt A.
   a) $S(0, -1),\ A(-3, 3)$ b) $S(2, -4),\ A(7, 8)$
7. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B, którego środek znajduje się na prostej k.
   a) $A(2, -2), B(6, 0),\ k\colon y=x-2$ b) $A(-6, -3), B(-1, 2),\ k\colon 2x+y+8=0$
8. Napisz równanie okręgu, do którego należą punkty A, B i C.
   a) $A(-3, 2), B(-2, 1), C(0, 1)$ b) $A(-3, 5), B(-5, 1), C(4, -2)$
9. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory:
   $A=\{(x, y)\colon x\in \boldsymbol{R}\wedge y\in \boldsymbol{R}\wedge x^2+y^2+4x-2y-4=0\}$
   $B=\{(x, y)\colon x\in \boldsymbol{R}\wedge y\in \boldsymbol{R}\wedge x^2+y^2-4x+4y-8=0\}$.
   Następnie wyznacz zbiory: $A\cup B$, $A-B$, $B-A$, $A\cap B$.

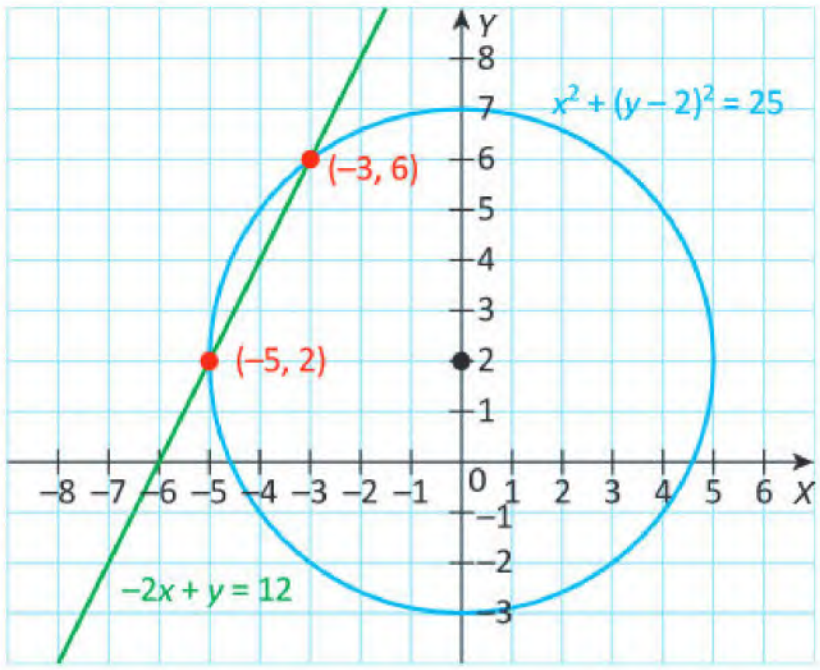
Wyznaczanie w układzie współrzędnych punktów wspólnych prostych, okręgów i parabol

Naszkicujmy w jednym układzie współrzędnych okrąg opisany równaniem $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ oraz prostą o równaniu ogólnym $-2x + y - 12 = 0$.

Jeśli rysunek wykonamy wystarczająco starannie, to zauważymy, że dana prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne, których współrzędne są odpowiednio równe:

$(-5, 2)$ i $(-3, 6)$.

Sprawdź rachunkiem, że podane pary liczb spełniają zarówno równanie prostej, jak i równanie okręgu.



Dokładne współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu można wyznaczyć algebraicznie. W tym celu wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 25 \\ -2x + y - 12 = 0 \end{cases}$$

Stosujemy metodę podstawiania. Wyznaczamy y z drugiego równania i wstawiamy odpowiednie wyrażenie w miejsce y do pierwszego równania.

$$\begin{cases} x^2 + (2x+12-2)^2 = 25 \\ y = 2x+12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + (2x+10)^2 = 25 \\ y = 2x+12 \end{cases}$$

Porządkujemy i rozwiązujemy pierwsze równanie. Jest to równanie kwadratowe z niewiadomą x.

$$\begin{cases} x^2 + 4x^2 + 40x + 100 = 25 \\ y = 2x+12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 15 = 0 \\ y = 2x+12 \end{cases} \qquad \Delta = 4,\ \sqrt{\Delta} = 2,\ x = \frac{-8-2}{2\cdot 1} \text{ lub } x = \frac{-8+2}{2\cdot 1}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = -5 \lor x = -3 \\ y = 2x+12 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = -5 \\ y = 2x+12 \end{cases} \lor \begin{cases} x = -3 \\ y = 2x+12 \end{cases} \right)$$

Stąd

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=6 \end{cases}$$

Układ równań ma dwa rozwiązania: $(-5, 2)$ i $(-3, 6)$.

Przykład 1.

Rozwiążemy układ równań: $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y-31=0 \\ 5x+4y=30 \end{cases}$ i przedstawimy interpretację graficzną tego układu.

Z drugiego równania wyznaczamy np. x i otrzymane wyrażenie wstawiamy w miejsce x do pierwszego równania

$$\begin{cases} \left(\frac{-4}{5}y+6\right)^2+y^2+6\left(\frac{-4}{5}y+6\right)-2y-31=0 \\ x=\frac{-4}{5}y+6 \end{cases}$$

Porządkujemy pierwsze równanie. Jest to równanie kwadratowe z niewiadomą y.

$$\begin{cases} \frac{16}{25}y^2-\frac{48}{5}y+36+y^2-\frac{24}{5}y+36-2y-31=0 \\ x=\frac{-4}{5}y+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-10y+25=0 \\ x=\frac{-4}{5}y+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-5)^2=0 \\ x=\frac{-4}{5}y+6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=5 \\ x=2 \end{cases}$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie: $(2, 5)$.

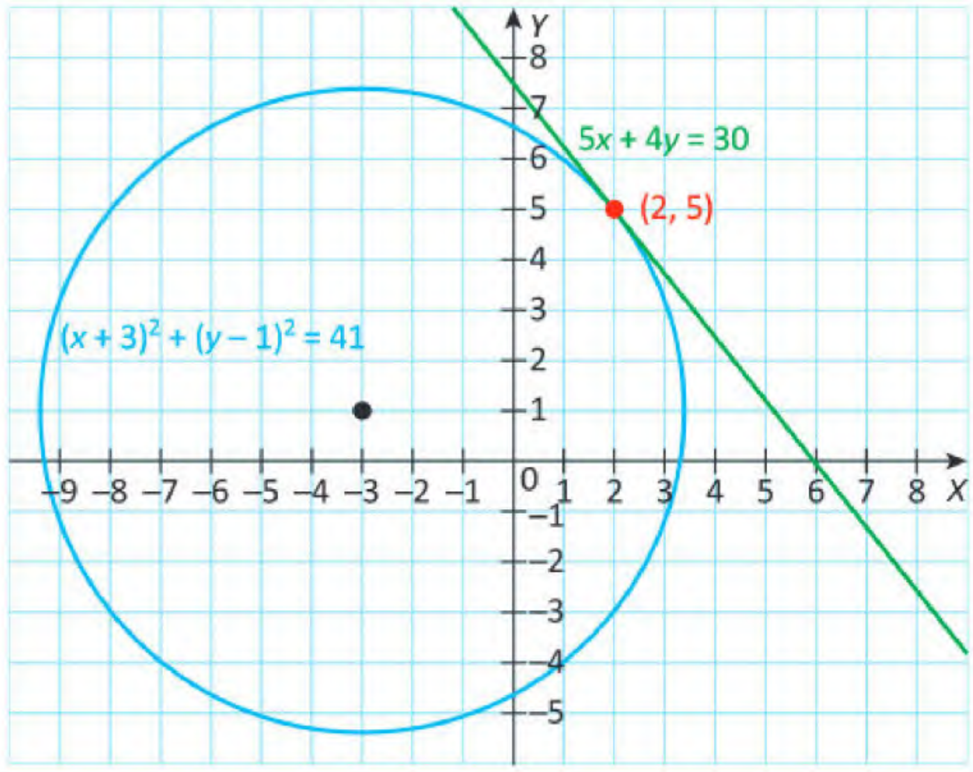
Aby przedstawić interpretację graficzną układu, ustalmy najpierw, jaki zbiór punktów opisuje każde z równań tego układu. Przekształcamy pierwsze równanie:

$$x^2+y^2+6x-2y-31=0$$
$$x^2+6x+9-9+y^2-2y+1-1-31=0$$
$$(x+3)^2+(y-1)^2=41$$

Powyższe równanie opisuje okrąg o środku w punkcie $(-3, 1)$ i promieniu $\sqrt{41}$.

Drugie równanie opisuje prostą, do której należą punkty: $(6, 0)$, $\left(0, 7\frac{1}{2}\right)$.

Szkicujemy prostą i okrąg w jednym układzie współrzędnych.



Na podstawie rysunku odczytujemy, że ten okrąg i dana prosta mają tylko jeden punkt wspólny: $(2, 5)$.

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(2, 5)$.

Przykład 2.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases}(x-4)^2+(y-1)^2=13\\ -x+4y=15\end{cases}$.

Postępujemy podobnie, jak w przykładzie 1.

$$\begin{cases}(4y-15-4)^2+(y-1)^2=13\\ x=4y-15\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4y-19)^2+(y-1)^2=13\\ x=4y-15\end{cases}$$

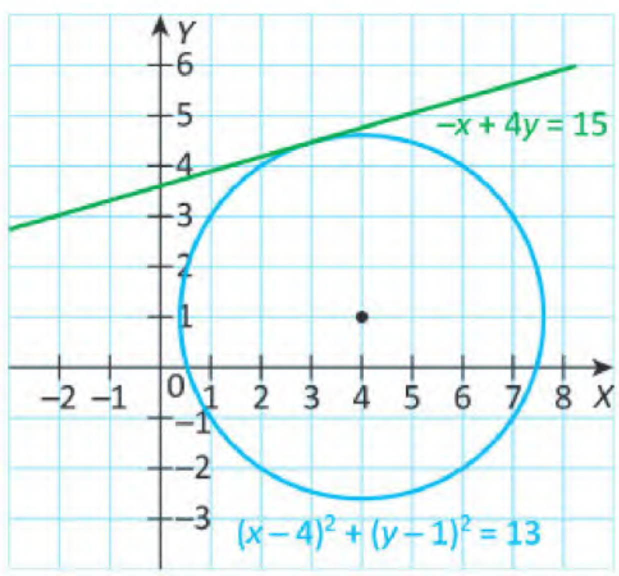
Porządkujemy pierwsze równanie

$$\begin{cases}17y^2-154y+349=0\\ x=4y-15\end{cases}$$

$\Delta = 154^2 - 4 \cdot 17 \cdot 349 = 23\,716 - 23\,732 = -16 < 0$

Okazuje się, że równanie kwadratowe nie ma rozwiązań, bo wyróżnik tego równania jest ujemny. Wobec tego układ równań też nie ma rozwiązań, czyli jest sprzeczny.

UWAGA: Próbując podać rozwiązania powyższego układu na podstawie jego interpretacji graficznej, możemy popełnić błąd. Rysunek obok pokazuje, że nawet starannie wykonane wykresy mogą doprowadzić do błędnego wniosku, że prosta jest styczna do okręgu, a układ równań ma jedno rozwiązanie.



Dopiero duże powiększenie rysunku na komputerze ujawnia, że prosta jest rozłączna z okręgiem, czyli układ równań jest sprzeczny.
Sprawdź to.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż algebraicznie układ równań $\begin{cases} -x+3y=13 \\ x^2+y^2+8x+4y-5=0 \end{cases}$ i podaj jego interpretację graficzną w układzie współrzędnych.

Przykład 3.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} y=x^2-8x+13 \\ 5x+y=11 \end{cases}$.

Podobnie jak w poprzednich przykładach stosujemy metodę podstawiania.

$$\begin{cases} y=-5x+11 \\ -5x+11=x^2-8x+13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-5x+11 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \qquad \Delta=1,\ \sqrt{\Delta}=1,\ x=\frac{3-1}{2\cdot 1} \text{ lub } x=\frac{3+1}{2\cdot 1}$$

$$\begin{cases} y=-5x+11 \\ x=1 \vee x=2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}\right)$$

Układ równań ma dwa rozwiązania: $(1, 6)$ oraz $(2, 1)$.

Zauważ, że pierwsze równanie układu $\begin{cases} y=x^2-8x+13 \\ 5x+y=11 \end{cases}$ opisuje parabolę, a drugie równanie opisuje prostą. Naszkicujmy te wykresy we wspólnym układzie współrzędnych.

Mamy

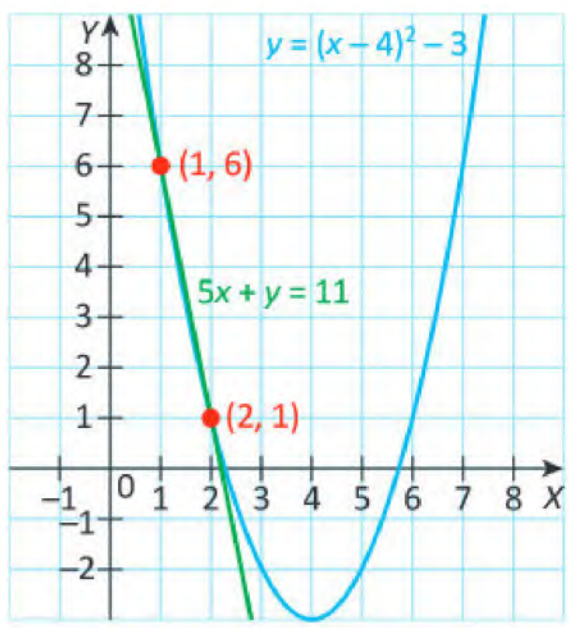
$y=x^2-8x+13=x^2-8x+16-3$, stąd

$y=(x-4)^2-3$

Osią symetrii paraboli jest prosta $x=4$, a jej wierzchołek znajduje się w punkcie $(4, -3)$.

Prostą i parabolę przedstawia rysunek obok. Potwierdza on poprawność rozwiązania algebraicznego danego układu równań.

Czy łatwo byłoby rozwiązać dany układ tylko sposobem graficznym?



Ćwiczenie 2. Rozwiąż algebraicznie układ równań $\begin{cases} y=-0{,}5x^2-3x-0{,}5 \\ -2x+y=12 \end{cases}$. Przedstaw jego interpretację graficzną w układzie współrzędnych.

Przykład 4.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases}(x+7)^2+(y-1)^2=10\\(x+2)^2+(y+4)^2=20\end{cases}$ i przedstawimy jego interpretację w układzie współrzędnych.

W obu równaniach układu stosujemy wzory skróconego mnożenia.

$$\begin{cases}x^2+14x+49+y^2-2y+1-10=0\\x^2+4x+4+y^2+8y+16-20=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+14x-2y+40=0\\x^2+y^2+4x+8y=0\end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i do tak otrzymanego równania dopisujemy jedno, np. drugie równanie ostatniego układu.

$$\begin{cases}10x-10y+40=0\\x^2+y^2+4x+8y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=y-4\\(y-4)^2+y^2+4(y-4)+8y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=y-4\\y^2-8y+16+y^2+4y-16+8y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=y-4\\y(y+2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x=-4\\y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=-6\\y=-2\end{cases}\right)$$

Układ równań ma dwa rozwiązania: $(-4, 0)$ oraz $(-6, -2)$.

Szkicujemy w układzie współrzędnych okręgi opisane równaniami układu.

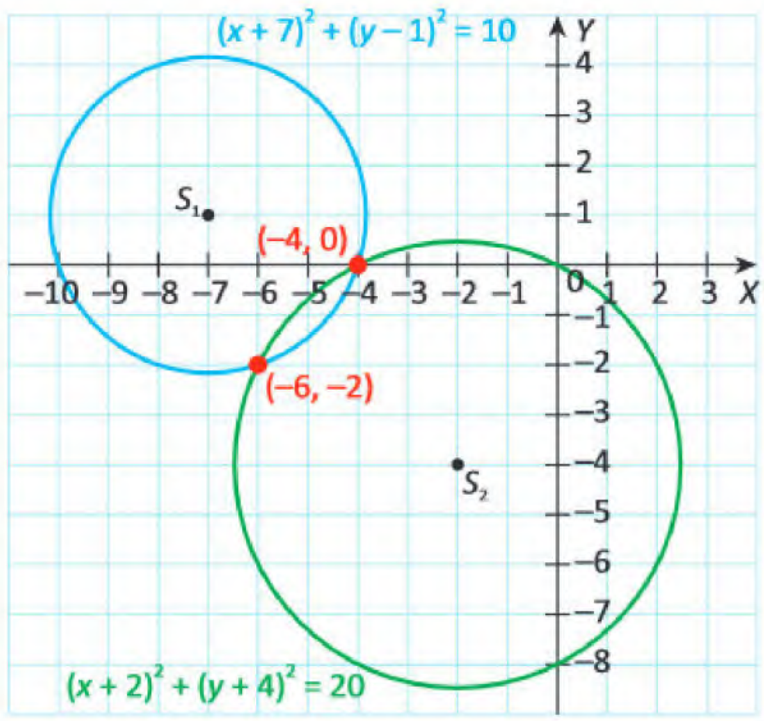
$(x+7)^2+(y-1)^2=10$

$S_1=(-7,1),\ r_1=\sqrt{10}$

$(x+2)^2+(y+4)^2=20$

$S_2=(-2,-4),\ r_2=2\sqrt{5}$

Okręgi te przecinają się w dwóch punktach: $(-4, 0)$ oraz $(-6, -2)$.



Ćwiczenie 3. Rozwiąż układ równań $\begin{cases}(x-9)^2+(y+4)^2=5\\ x^2+y^2-18x+8y+92=0\end{cases}$.

Jak są położone względem siebie okręgi opisane równaniami tego układu?

Przykład 5.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases}(x-4)^2+y^2=34\\ (x-2)^2-y^2=0\end{cases}$.

Zauważ, że pierwsze równanie opisuje okrąg o środku w punkcie $(4,\ 0)$ i promieniu $\sqrt{34}$. Przekształćmy drugie równanie, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$(x-2)^2-y^2=0 \Leftrightarrow [(x-2-y)(x-2+y)=0] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2-y=0 \vee x-2+y=0)$$

Drugie równanie układu opisuje sumę dwóch prostych:

$y=x-2$ oraz $y=-x+2$

Układ równań przekształcamy równoważnie.

$$\begin{cases}(x-4)^2+y^2=34\\ (x+2)^2-y^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)^2+y^2=34\\ y=x-2 \vee y=-x+2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}(x-4)^2+y^2=34\\ y=x-2\end{cases} \vee \begin{cases}(x-4)^2+y^2=34\\ y=-x+2\end{cases}\right)$$

Wyznaczamy współrzędne punktów wspólnych danego okręgu i poszczególnych prostych:

$$\begin{cases}(x-4)^2+(x-2)^2=34\\ y=x-2\end{cases} \vee \begin{cases}(x-4)^2+(-x+2)^2=34\\ y=-x+2\end{cases}$$

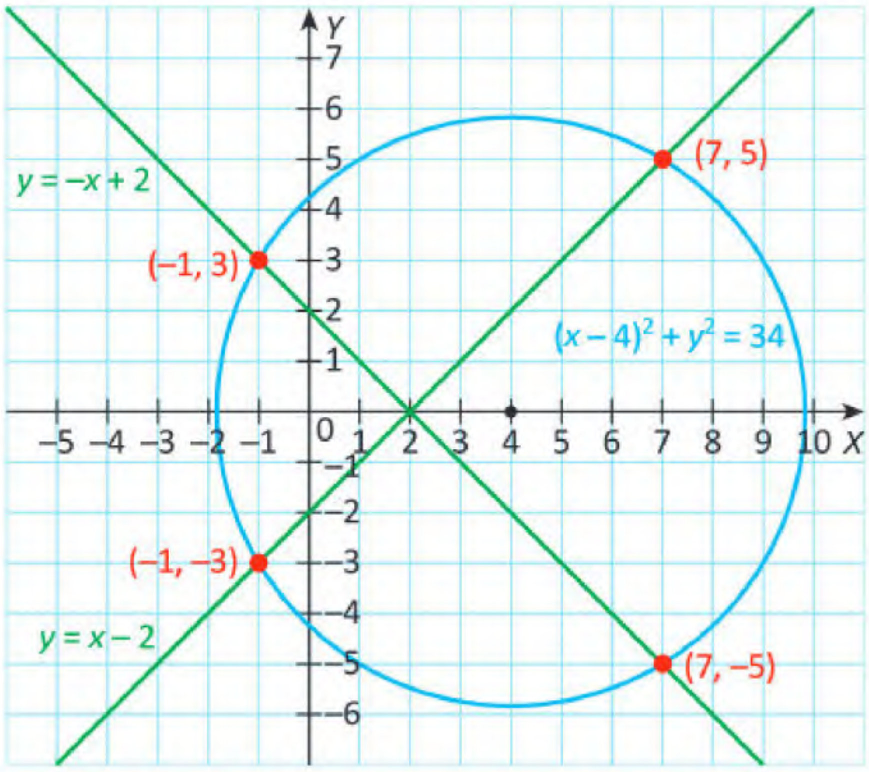
$$\begin{cases}x^2-6x-7=0\\ y=x-2\end{cases} \vee \begin{cases}x^2-6x-7=0\\ y=-x+2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1 \vee x=7\\ y=x-2\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1 \vee x=7\\ y=-x+2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1\\ y=-3\end{cases} \vee \begin{cases}x=7\\ y=5\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases} \vee \begin{cases}x=7\\ y=-5\end{cases}$$

Układ równań ma cztery rozwiązania: $(-1,\ -3)$, $(7,\ 5)$, $(-1,\ 3)$, $(7,\ -5)$.

Rysunek poniżej przedstawia interpretację graficzną układu równań z przykładu 5.



Ćwiczenie 4. Zastanów się, ile rozwiązań może mieć układ dwóch równań, z których jedno opisuje okrąg, a drugie sumę dwóch prostych.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż algebraicznie dany układ równań.

a) $\begin{cases} y = -x^2 \\ y + 2x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ y = (x+2)^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases}$

Przedstaw interpretację graficzną tego układu w układzie współrzędnych.

2. Rozwiąż algebraicznie dany układ równań.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-5)^2 = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 9 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$

Przedstaw interpretację graficzną tego układu w układzie współrzędnych.

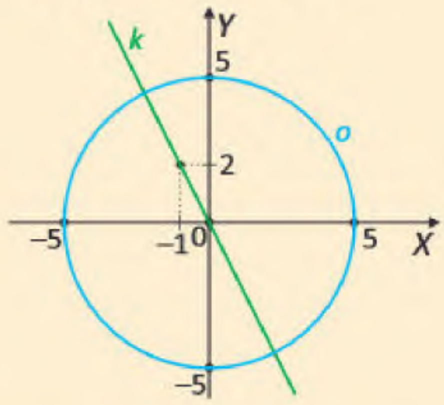
3. Przedstaw interpretację graficzną danego układu w układzie współrzędnych. Następnie rozwiąż ten układ algebraicznie.

a) $\begin{cases} 3x + 6 = 0 \\ y = 2x^2 - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ 5x + 6 = 3y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 2 \end{cases}$

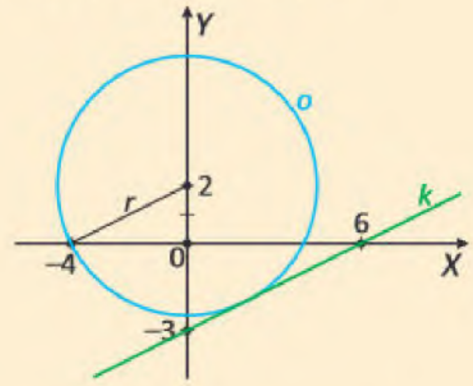
d) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y = 4x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = (x+3)^2 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 10x - 8 = 0 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

4. Zapisz równania dwóch krzywych znajdujących się na rysunku poniżej. Następnie oblicz współrzędne punktów wspólnych tych krzywych, wiedząc, że rysunek przedstawia:

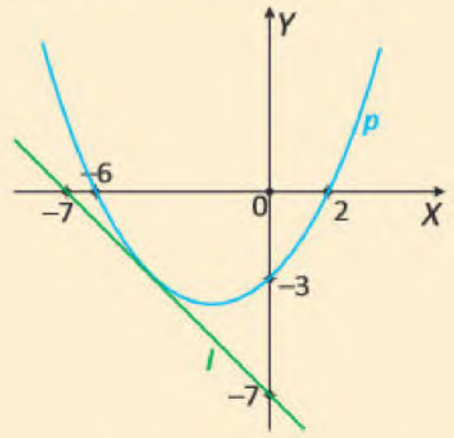
a) okrąg o i prostą k



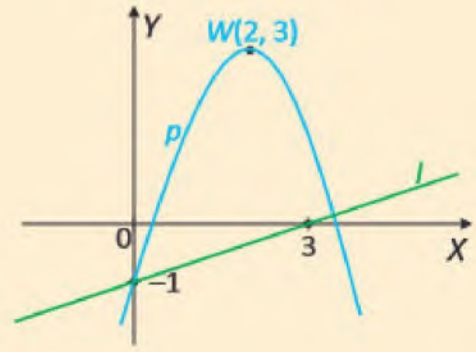
b) okrąg o i prostą k



c) parabolę p i prostą l



d) parabolę p i prostą l



5. Rozwiąż algebraicznie dany układ równań. Następnie przedstaw jego interpretację graficzną w układzie współrzędnych.

a) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x+1)^2+y^2=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2=9y^2 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (y-5)(3x+y-5)=0 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+8)^2+(y-5)^2=5 \\ (x+2)^2+(y-2)^2=20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x+3)^2+y^2=13 \\ x^2+(y+3)^2=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y=x^2-2 \\ x^2+(y+1)^2=1 \end{cases}$

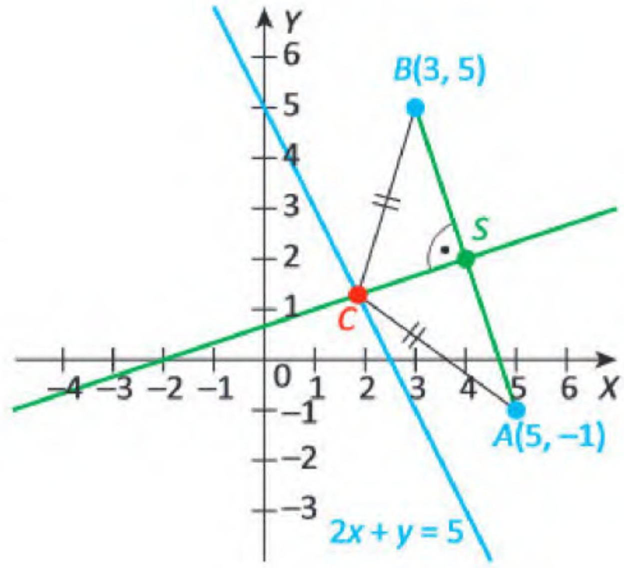
g) $\begin{cases} 4x^2+4xy+y^2=25 \\ (x-3)^2+(y+1)^2=5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (x+4)^2+(y-3)^2=25 \\ (x+3)^2+(y-2)^2=9 \end{cases}$

Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej

Przykład 1.

Dana jest prosta k o równaniu $2x+y=5$ i dwa punkty $A(5,-1)$, $B(3,5)$. Wyznaczymy na prostej k taki punkt C, że $|AC|=|BC|$.



Wykorzystamy następującą własność: **symetralna odcinka jest zbiorem punktów równoodległych od jego końców.**

Punkt wspólny danej prostej i symetralnej odcinka AB jest szukanym punktem C.

1) Wyznaczamy środek S odcinka AB.

   $S(4,2)$ – twierdzenie 2 str. 292

2) Obliczamy współczynnik kierunkowy a_1 prostej AB.

   $$a_1=\frac{5-(-1)}{3-5}=-3 \qquad a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

3) Obliczamy współczynnik kierunkowy a_2 symetralnej odcinka AB.

   $$a_2=\frac{1}{3} \qquad a_1\cdot a_2=-1$$

4) Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka AB.

   $$y=\frac{1}{3}x+b \qquad S(4,2)$$

   $$2=\frac{1}{3}\cdot 4+b,\quad \text{stąd}\quad b=\frac{2}{3}$$

   Symetralną odcinka AB opisuje równanie $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

5) Wyznaczamy punkt C, rozwiązując układ równań:

   $$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{7} \\ y=\frac{9}{7} \end{cases} \qquad \text{(Sprawdź!)}$$

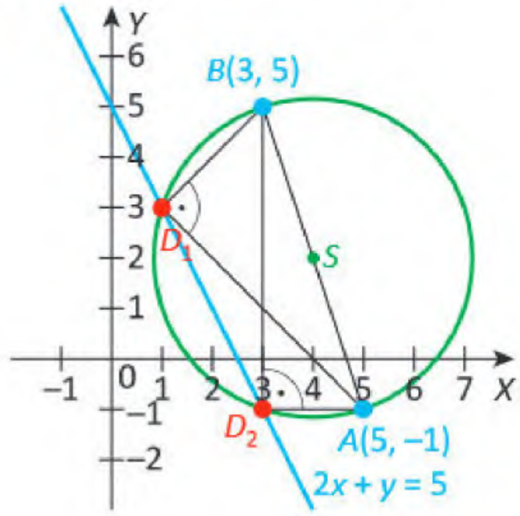
   $$C\left(\frac{13}{7},\frac{9}{7}\right)$$

Szukanym punktem jest punkt $C\left(\frac{13}{7},\frac{9}{7}\right)$.

Przykład 2.

Dana jest prosta k o równaniu $2x + y = 5$ i dwa punkty $A(5, -1)$, $B(3, 5)$. Wyznaczymy na prostej k taki punkt D, że $|\sphericalangle ADB| = 90°$.

Wykorzystamy własność: **kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.**



1) Znajdujemy równanie okręgu, którego środek S jest środkiem odcinka AB, a promień jest równy $|AS|$.

$$S\left(\frac{5+3}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) \text{ czyli } S(4, 2)$$

$$|AS|^2 = (5-4)^2 + (-1-2)^2 = 10$$

Równanie okręgu:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$$

2) Wyznaczamy punkty wspólne prostej k i okręgu.

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ (x-4)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}\right)$$

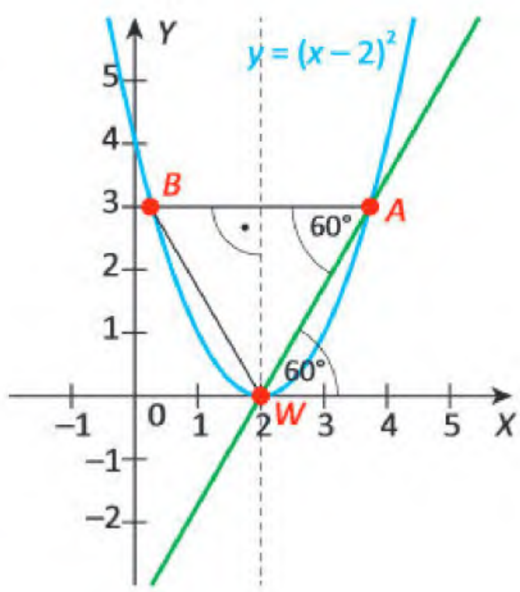
Istnieją dwa punkty $D_1(1, 3)$, $D_2(3, -1)$, dla których $|\sphericalangle AD_1B| = |\sphericalangle AD_2B| = 90°$.

Dwa punkty spełniają warunki zadania: $D_1(1, 3)$ i $D_2(3, -1)$.

Ćwiczenie 1. Korzystając z odpowiedniego równania okręgu, wyznacz na prostej k: $2x - y = 0$ punkt B, którego odległość od punktu $A(5, 0)$ jest równa $2\sqrt{10}$.

Przykład 3.

Znajdziemy na paraboli $y = (x-2)^2$ punkty A i B, które wraz z wierzchołkiem paraboli W wyznaczą trójkąt równoboczny.



Osią symetrii paraboli jest prosta $x = 2$. Jeden z wierzchołków trójkąta równobocznego pokrywa się z wierzchołkiem W paraboli, więc pozostałe dwa wierzchołki A i B są położone symetrycznie względem prostej $x = 2$. Zatem odcinek AB jest równoległy do osi OX, a prosta AW jest nachylona do osi OX pod kątem $60°$ (zobacz rysunek obok).

1) Wyznaczamy równanie prostej AW.

$y = ax + b$

$a = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$ – twierdzenie 2. str. 297

$y = \sqrt{3}x + b$ $\quad W(2, 0)$

$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

2) Wyznaczamy współrzędne punktu A.

$$\begin{cases} y=(x-2)^2 \\ y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ y=3 \end{cases} \right)$$

(2, 0) – współrzędne punktu W

Współrzędne punktu A są równe $\left(2+\sqrt{3}, 3\right)$.

3) Punkt B jest położony symetrycznie do punktu A względem prostej $x = 2$, zatem $x=2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ i $y=3$, czyli $B\left(2-\sqrt{3}, 3\right)$.

Szukane punkty mają następujące współrzędne: $A\left(2+\sqrt{3}, 3\right)$ i $B\left(2-\sqrt{3}, 3\right)$.

UWAGA: Współrzędne punktu B można też obliczyć, wyznaczając najpierw równanie prostej BW. W tym celu wystarczy zauważyć, że jest ona nachylona do osi OX pod kątem 120°.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dane są punkty: $A(-2, 5)$, $B(4, -3)$. Wyznacz na prostej k: $y = 2x + 4$ punkt C tak, aby $|AC| = |BC|$.
2. Oblicz współrzędne ortocentrum trójkąta ABC, jeśli $A(-5, 1)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 9)$.
3. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(-3, -2)$, $B(11, 10)$, $C(0, 7)$. Wyznacz:
   a) równanie prostej zawierającej środkową CS
   b) punkt D, będący spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu B.
4. Punkt W jest wierzchołkiem paraboli $y = x^2 - 6x + 5$. Znajdź na tej paraboli punkt A, wiedząc, że prosta AW jest nachylona do osi OX pod kątem 135°.
5. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli $A(-5, 2)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 6)$.
6. Prosta k: $x - y + 7 = 0$ przecina okrąg $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$ w punktach A i B. Oblicz długość cięciwy AB.
7. Dane są punkty: $A(-2, 2)$, $B(3, 2)$. Wyznacz na prostej k: $x - y + 5 = 0$ punkt C tak, aby: a) $|AC| = |AB|$ b) $|BC| = |AB|$.
8. Dane są punkty: $A(-6, 1)$, $B(2, 1)$. Wyznacz na osi OY punkt C tak, aby trójkąt ABC był prostokątny.
9. Dane są punkty: $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$. Oblicz współrzędne punktu C, wiedząc, że $|\sphericalangle ACB| = 90°$, a tangens kąta nachylenia prostej AC do osi OX jest równy 2.
10. Wyznacz na paraboli $y = 0{,}25(x + 3)^2$ punkty A, B, C, wiedząc, że trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny, a bok AB jest równoległy do osi OX.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6.

Test

1. Współrzędne środka odcinka o końcach $A(-5, 6)$, $B(3, -4)$ są równe:
A. $(4, 1)$ B. $(1, -1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, 4)$

2. Środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A(-10, -7)$, $B(-3, -4)$, $C(1, 5)$ ma współrzędne:
A. $(-4, -2)$ B. $(-6, -3)$ C. $(-6, -2)$ D. $(-4, -3)$

3. Długość odcinka o końcach $A\left(\sqrt{3}-1, 2\right)$ i $B\left(\sqrt{3}+1, 0\right)$ jest równa:
A. $2\sqrt{3}+2$ B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{2}$

4. Jeśli $A(-3, -5)$, $B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, to prostą AB opisuje równanie ogólne:
A. $11x - 7y - 32 = 0$ B. $13x - 11y - 16 = 0$
C. $13x + 11y + 94 = 0$ D. $7x - 11y - 34 = 0$

5. Prosta k: $y = 2x - 3$ jest prostopadła do prostej l: $y = (a + 3)x - 2$, jeśli:
A. $a = -\frac{1}{2}$ B. $a = -3\frac{1}{2}$ C. $a = \frac{1}{2}$ D. $a = -2\frac{1}{2}$

6. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 4y + 10 = 0$.
A. $3x + 4y = 0$ B. $-4x + 3y = 0$ C. $-6x + 8y = 5$ D. $9x + 12y = 30$

7. Prosta k: $px + 2y - 1 = 0$ jest prostopadła do prostej l: $6x - 4y + 1 = 0$, jeśli:
A. $p = -3$ B. $p = 3$ C. $p = 1\frac{1}{3}$ D. $p = -1\frac{1}{3}$

8. Kąt nachylenia prostej $\sqrt{3}x + 3y - 1 = 0$ do osi OX jest równy:
A. $150°$ B. $135°$ C. $120°$ D. $30°$

9. Równanie $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Zatem:
A. $S(-3, 1)$, $r = 4$ B. $S(-3, 1)$, $r = 2$ C. $S(3, -1)$, $r = 4$ D. $S(3, -1)$, $r = 2$

10. Układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$:
A. nie ma rozwiązań B. ma tylko jedno rozwiązanie
C. ma dwa rozwiązania D. ma więcej niż dwa rozwiązania

11. Równanie $x^2 - y^2 = 0$ opisuje:
A. punkt $O(0, 0)$ B. prostą $y = x$
C. prostą $y = -x$ D. sumę prostych $y = x$ oraz $y = -x$

Zadania otwarte

12. Odcinek o końcach $A(-7, 4)$ $B(3, -1)$ podziel kolejno punktami C, D, E, F na pięć równych części.

13. W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołki $A(-3, -1)$ i $B(5, 1)$. Punkt $S(2, 4)$ jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Oblicz:
    a) współrzędne wierzchołków C, D,
    b) długości boków równoległoboku $ABCD$.

14. Dana jest prosta k: $4x - 2y + 3 = 0$. Wyznacz równanie prostej l:
    a) równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-1, -5)$
    b) prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-2, 0)$.

15. Wyznacz równanie ogólne symetralnej odcinka AB, jeśli $A(-9, 7)$, $B(5, -3)$.

16. Wyznacz równanie kierunkowe prostej k, nachylonej do osi OX pod kątem α i przecinającej oś OX w punkcie o odciętej równej 3, jeśli:
    a) $\alpha = 150°$ b) $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

17. Prosta k jest nachylona do osi OX pod kątem $60°$. Prosta l jest prostopadła do prostej k i przecina prostą l w punkcie $P(\sqrt{3}, 3)$. Oblicz współrzędne punktów przecięcia prostych k i l z osiami układu współrzędnych.

D 18. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 0)$, $B(8, 0)$, $C(6, 4)$ jest prostokątny.

19. Napisz równanie okręgu o promieniu 4, współśrodkowego z okręgiem o: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$.

20. Rozwiąż algebraicznie dany układ równań. Następnie przedstaw jego ilustrację graficzną.

    a) $\begin{cases} 4x - 5y + 15 = 0 \\ -3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 3 = 2x^2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + 4x = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 20 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$

D 21. Wykaż, że proste k: $x + 3y - 7 = 0$ i l: $2x - y + 7 = 0$ przecinają się w punkcie należącym do okręgu o środku w punkcie $S(1, 2)$ i promieniu $\sqrt{10}$.

22. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(-5, 0)$ i $B(1, 4)$, jeśli jego środek należy do prostej k: $y = 2x - 1$.

23. Dane są punkty $A(1, -4)$, $B(1, 2)$. Wyznacz punkt C tak, aby trójkąt ABC był prostokątny, a jego wysokość CD zawierała się w osi odciętych.

24. Dane są punkty $A(-5, -1)$, $B(7, -1)$, $C(3, 7)$. Oblicz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC.

25. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, gdzie $\vec{u}=[a,-2]$ oraz $\vec{v}=[-4-a,a]$ są równoległe. Dla wyznaczonej wartości a zapisz wektor $\vec{u}$ w zależności od $\vec{v}$.

26. Prosta k: $Ax+8y-8=0$ jest równoległa do prostej l: $2x+Ay-12=0$.
    a) Oblicz współczynnik A.
    b) Naszkicuj obie proste w jednym układzie współrzędnych.

27. Wyznacz liczbę a, dla której proste k: $-ax+(3-a)y+6=0$ i l: $(a+1)x+y+2=0$ są prostopadłe. Dla wyznaczonej wartości parametru a naszkicuj proste k i l w układzie współrzędnych.

28. Rozwiąż układ równań i zilustruj go graficznie.

    a) $\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2=25\\(x+3)^2+(y-2)^2=10\end{cases}$
    b) $\begin{cases}x^2+y^2=5\\(x-6)^2+(y+3)^2=20\end{cases}$
    c) $\begin{cases}x^2=4y^2\\x^2+y^2=25\end{cases}$
    d) $\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=1\\y=x^2+2x+1\end{cases}$

29. Dla jakich wartości parametru a proste k: $ax+y-1=0$ oraz l: $ax-y-3=0$, przecinają się w punkcie, który należy do okręgu o środku $S(2, 1)$ i promieniu $r=\sqrt{5}$?

30. Dany jest punkt $A(0, 6)$. Punkty B i C należą do dodatniej półosi odciętych. Wyznacz współrzędne tych punktów, wiedząc, że $|\sphericalangle ACB|=45^\circ$ oraz $|\sphericalangle CAB|=15^\circ$.

31. Punkty $A(2, 3)$ i $B(4, -1)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

32. W okrąg o środku $S(6, 4)$ wpisano trójkąt równoboczny ABC, którego jednym z wierzchołków jest punkt $A(2, 6)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

33. Dane są punkty $A(-8, -2)$, $C(0, 2)$ oraz prosta k: $x-3y+14=0$. Wyznacz punkty B i D, wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, a wierzchołek D należy do prostej k.

D 34. Dane są punkty $A(-8, 0)$, $B(0, 4)$, $O(0, 0)$. Punkt C różny od puntu B jest punktem wspólnym prostej AB i okręgu o średnicy BO. Wyznacz współrzędne punktu C i wykaż, że punkt C należy do okręgu o średnicy AO.

35. Okręgi $o_1\colon (x+4)^2+(y-1)^2=8$ oraz $o_2\colon (x+1)^2+y^2=10$ przecinają się w punktach A i B.
    a) Wyznacz współrzędne punktów A i B.
    b) Napisz równanie ogólne prostej AB.

7. Geometria płaska – rozwiązywanie trójkątów, pole trójkąta, pole koła

Twierdzenie sinusów

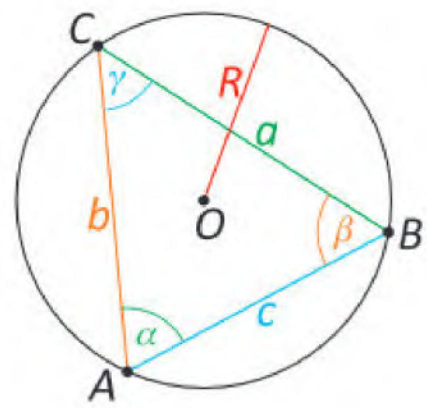
Ćwiczenie 1. Boki trójkąta *ABC* mają długości *a*, *b*, *c*, a kąt przy wierzchołku *A* jest równy α. Oblicz promień *R* okręgu opisanego na trójkącie *ABC*. Ile jest równy iloraz $\frac{a}{\sin\alpha}$? Wykonaj obliczenia, jeśli:

a) $a=6,\ b=8,\ c=10$ b) $a=b=c=6$ c) $a=b=10,\ c=12$

Twierdzenie 1. Twierdzenie sinusów
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenia:

a, *b*, *c* – długości boków trójkąta *ABC*
α, β, γ – kąty leżące odpowiednio naprzeciwko boków *a*, *b*, *c*
R – promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*
O – środek okręgu



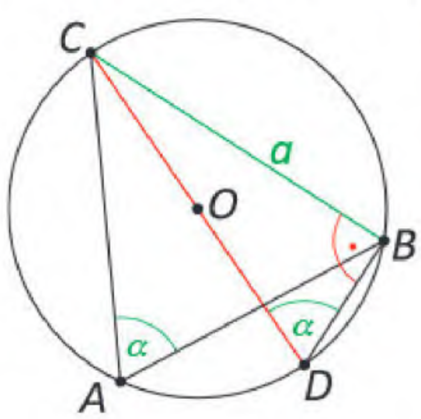
Teza:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Dowód: Wykażemy, że $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$. Rozważymy trzy przypadki.

<u>I przypadek</u>: Kąt α jest ostry. Punkt *O* jest wewnątrz trójkąta.

Prowadzimy średnicę *CD* okręgu i łączymy punkt *D* z punktem *B*. Ponieważ kąt *CBD* jest oparty na półokręgu, więc powstały trójkąt *CDB* jest prostokątny. Kąt wpisany *CDB* jest oparty na tym samym łuku *BC*, co kąt wpisany *CAB*,



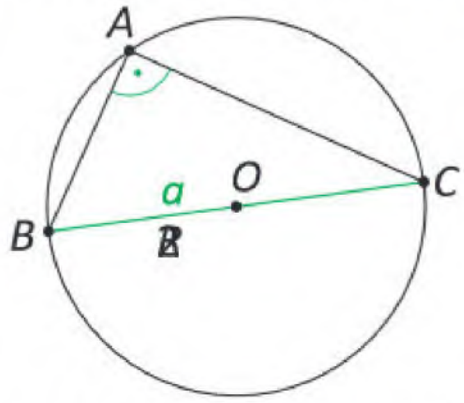
więc $|\sphericalangle CDB|=|\sphericalangle CAB|=\alpha$.

Wyznaczamy sinus kąta *CDB*:

$$\sin\alpha=\frac{|CB|}{|CD|}=\frac{a}{2R},\quad \text{stąd}\quad \frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

<u>II przypadek</u>: Kąt α jest prosty. Punkt O jest na boku trójkąta.

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest jednocześnie średnicą okręgu opisanego na trójkącie, stąd



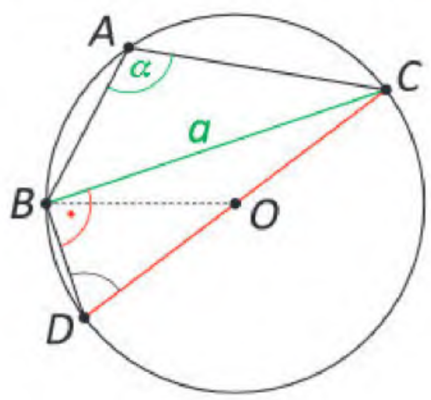
$a = 2R$.

Kąt α jest równy 90°, więc $\sin\alpha = 1$.

Otrzymujemy: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{2R}{1} = 2R$

<u>III przypadek</u>: Kąt α jest rozwarty. Punkt O jest na zewnątrz trójkąta.

Analogicznie jak w przypadku I, prowadzimy średnicę CD okręgu i otrzymujemy trójkąt prostokątny CDB, w którym



$|\sphericalangle DBC| = 90^\circ, \quad |DC| = 2R$ oraz $|BC| = a$.

Z własności kątów: środkowego i wpisanego w okrąg, opartych na tym samym łuku, wynika, że:

– kąt wklęsły BOC jest równy 2α

– kąt wypukły BOC jest równy $360^\circ - 2\alpha$, stąd

$|\sphericalangle BDC| = \dfrac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha$

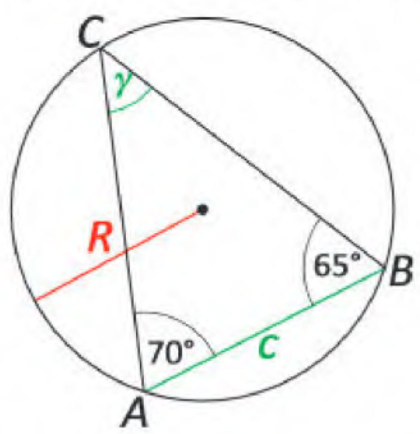
Obliczamy sinus kąta BDC: $\sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{|BC|}{|DC|} = \dfrac{a}{2R}$

Ze wzoru redukcyjnego otrzymujemy $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, zatem $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$. W każdym z trzech omawianych przypadków pokazaliśmy, że prawdziwa jest równość $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Podobnie można wykazać, że $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$ oraz $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Przykład 1.

W trójkącie ABC mamy dane: $\alpha = 70^\circ, \beta = 65^\circ$ oraz $|AB| = \sqrt{8}$. Wyznaczymy średnicę okręgu opisanego na tym trójkącie.

Z twierdzenia sinusów wynika, że $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$. Wiemy, że $c = \sqrt{8}$. Wyznaczamy $\sin\gamma$:



$\gamma = 180^\circ - (70^\circ + 65^\circ) = 45^\circ$, stąd

$\sin\gamma = \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, zatem

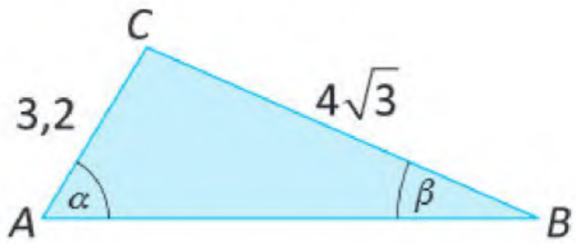
$$2R = \frac{\sqrt{8}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{8} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} \cdot 2 = 4.$$

Średnica okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równa 4.

Przykład 2.

Obliczymy miarę kąta α w trójkącie ABC, jeśli $a = 4\sqrt{3}$, $b = 3{,}2$ oraz $\sin\beta = 0{,}4$ (zobacz rysunek poniżej).

Zauważamy, że $a > b$. Zatem $\alpha > \beta$. Kąt β jest ostry i $\sin\beta \approx 0{,}4$, odczytując z tablic lub korzystając z kalkulatora, stwierdzamy, że $\beta \approx 24°$. Szukany kąt α należy do przedziału $(24°, 156°)$.



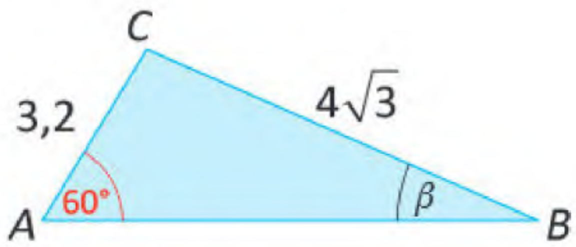
Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{4\sqrt{3}}{\sin\alpha} = \frac{3{,}2}{0{,}4}$$

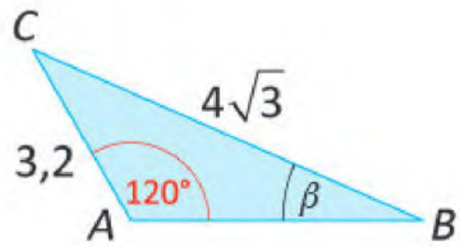
$$8 \cdot \sin\alpha = 4\sqrt{3}, \text{ stąd } \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania.

$\alpha = 60°$



$\alpha = 120°$



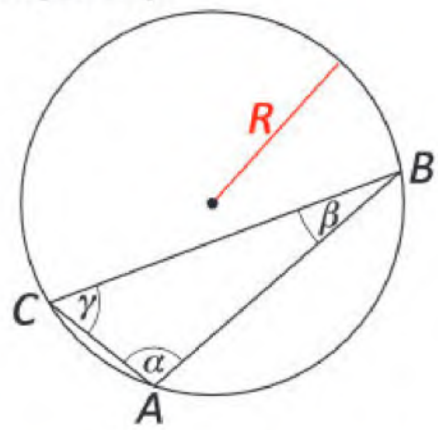
Przykład 3.

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC o kątach α, β, γ jest równy $|AC|$. Obliczymy miarę kąta β tego trójkąta, wiedząc, że cosinus kąta α jest ujemny.

Z twierdzenia sinusów otrzymujemy równość

$$\frac{|AC|}{\sin\beta} = 2R \text{ oraz wiemy, że } |AC| = R, \text{ zatem}$$

$$\frac{R}{\sin\beta} = 2R, \qquad \text{stąd} \qquad \sin\beta = \frac{1}{2}.$$



Ponieważ $\cos\alpha < 0$, więc α jest kątem rozwartym.
Z tego wynika, że pozostałe kąty trójkąta są ostre, w szczególności kąt β jest ostry.

$$\sin\beta = \frac{1}{2} \text{ i } \beta \in (0°, 90°) \quad \text{więc} \quad \beta = 30°.$$

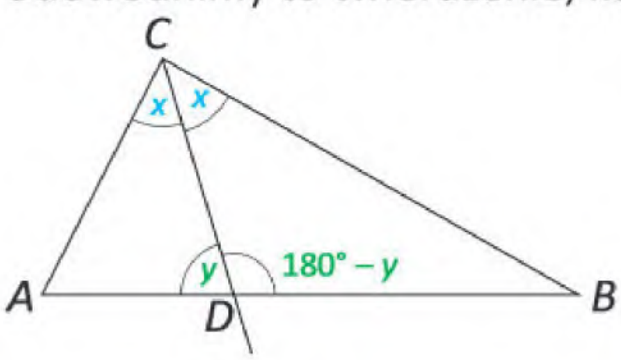
Ćwiczenie 2. W trójkącie ABC dane są długości boków a i b oraz kąt α. Jaką miarę może mieć kąt β, jeśli:

a) $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $\alpha = 45°$ b) $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{12}$, $\alpha = 30°$?

Przykład 4.

W rozdziale 4. omówiliśmy twierdzenie charakteryzujące dwusieczną kąta wewnętrznego trójkąta: *W dowolnym trójkącie ABC, w którym CD jest odcinkiem dwusiecznej kąta wewnętrznego tego trójkąta, prawdziwa jest równość:* $\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|CB|}$.

Udowodnimy to twierdzenie, korzystając z twierdzenia sinusów.



Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku obok.
Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta *ADC*.

$\frac{|AD|}{\sin x}=\frac{|AC|}{\sin y}$, stąd otrzymujemy

(1) $\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{\sin x}{\sin y}$

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta *BCD*.

$\frac{|DB|}{\sin x}=\frac{|CB|}{\sin(180°-y)}$, ale $\sin(180°-y)=\sin y$, więc $\frac{|DB|}{\sin x}=\frac{|CB|}{\sin y}$, czyli

(2) $\frac{|DB|}{|CB|}=\frac{\sin x}{\sin y}$

Prawe strony równości (1) i (2) są równe, możemy więc przyrównać lewe strony tych równości.

$\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{|DB|}{|CB|}$, czyli $\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|CB|}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz długość boku *a* oraz promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*, jeśli:
   a) $\alpha=30°, \beta=45°, b=4\sqrt{2}$ b) $\alpha=45°, \beta=120°, b=6$.
2. Oblicz miarę kąta α trójkąta *ABC*, w którym:
   a) $a=20\sqrt{3}, b=10\sqrt{3}, \sin\beta=0{,}25$ b) $a=4, c=2\sqrt{6}, \gamma=60°$.
3. W trójkącie *ABC* dane są: *a*, *c* oraz $\cos\alpha$. Oblicz $\cos\gamma$, jeśli:
   a) $a=\sqrt{7}, c=1, \cos\alpha=-0{,}75$ b) $a=2, c=4, \cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$.
4. Suma długości boków *BC* i *AC* trójkąta *ABC* jest równa 20,5 cm. Wiedząc, że $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ oraz $\sin\beta=\frac{2}{3}$, wyznacz promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC*.

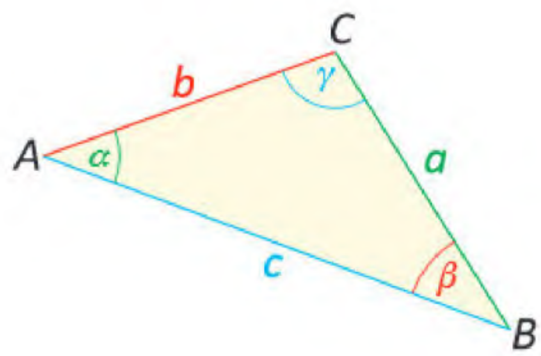
Twierdzenie cosinusów

Kolejnym ważnym twierdzeniem opisującym związek między bokami i kątami trójkąta jest twierdzenie cosinusów.

Twierdzenie 1. Twierdzenie cosinusów
W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

Założenie:

a, b, c – długości boków trójkąta ABC
α, β, γ – miary kątów trójkąta ABC

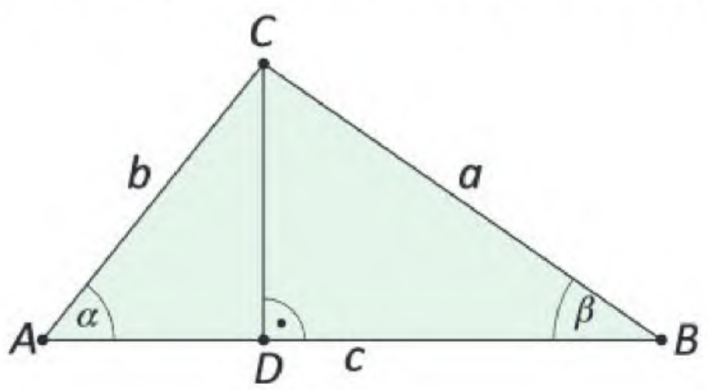


Teza:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Dowód: Udowodnimy pierwszy z tych wzorów. Rozpatrzymy trzy przypadki.

I przypadek – kąt α jest ostry. Wówczas przynajmniej jeszcze jeden kąt tego trójkąta jest ostry. Przyjmijmy, że jest to kąt β. Wówczas:



Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C (kąty α i β są ostre, więc punkt D leży między punktami A i B). W trójkącie prostokątnym ADC mamy:

$|CD| = b \cdot \sin\alpha$ oraz $|AD| = b \cdot \cos\alpha$,
więc
$|DB| = c - b \cdot \cos\alpha$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD otrzymujemy:

$$|CB|^2 = |DB|^2 + |CD|^2$$

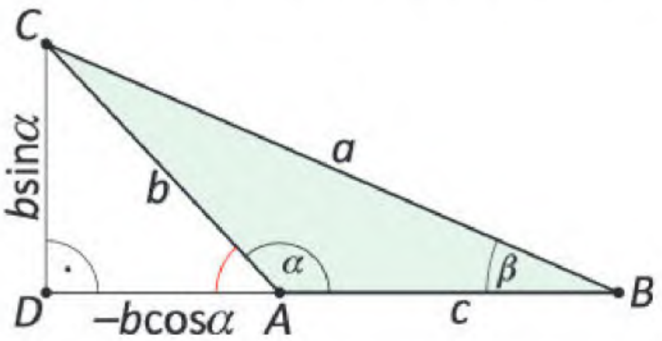
Zatem

$$a^2 = (c - b \cdot \cos\alpha)^2 + (b \cdot \sin\alpha)^2 = c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \text{ czyli}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,$$ co kończy dowód w I przypadku.

II przypadek – kąt α jest prosty. Wówczas $\cos\alpha = 0$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,$$ co kończy dowód w II przypadku.

<u>III przypadek</u> – kąt α jest rozwarty



Spodek wysokości CD leży na przedłużeniu boku AB. Wtedy $|\sphericalangle CAD| = 180° - \alpha$ oraz

$$|AD| = b \cdot \cos(180° - \alpha) = -b \cdot \cos\alpha,$$
$$|CD| = b \cdot \sin(180° - \alpha) = b \cdot \sin\alpha.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla ΔDBC mamy

$$a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + [c + (-b \cdot \cos\alpha)]^2, \quad \text{stąd}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,$$

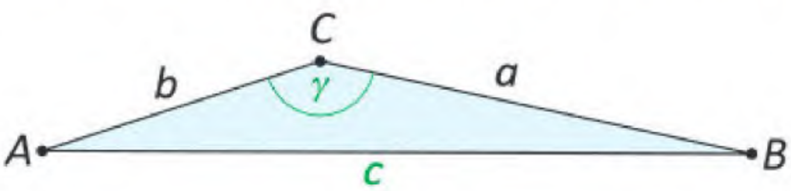
co kończy dowód w III przypadku.

Zatem wzór $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ jest prawdziwy dla dowolnego kąta α. Podobnie można udowodnić pozostałe dwa wzory.

Przykład 1.

Długości dwóch boków trójkąta wynoszą $4\sqrt{3}$ i 6, a miara kąta zawartego między tymi bokami jest równa 150°. Obliczymy długość trzeciego boku tego trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku poniżej.



Mamy:
$a = 4\sqrt{3}$, $b = 6$, $\gamma = 150°$,
c – długość trzeciego boku.

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$c^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 150°, \text{ gdzie}$$

$$\cos 150° = -\cos 30° = \frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$c^2 = 48 + 36 + 72$$
$$c^2 = 156$$
$$c = 2\sqrt{39}$$

Trzeci bok trójkąta ma długość $2\sqrt{39}$.

Jeśli mamy trzy boki trójkąta, to możemy zastosować twierdzenie cosinusów do obliczenia miary dowolnego kąta tego trójkąta. W tym celu wyznaczamy cosinus tego kąta z odpowiedniego wzoru (zobacz twierdzenie 1).

W dowolnym trójkącie – przy oznaczeniach z twierdzenia 1. – prawdziwe są wzory:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

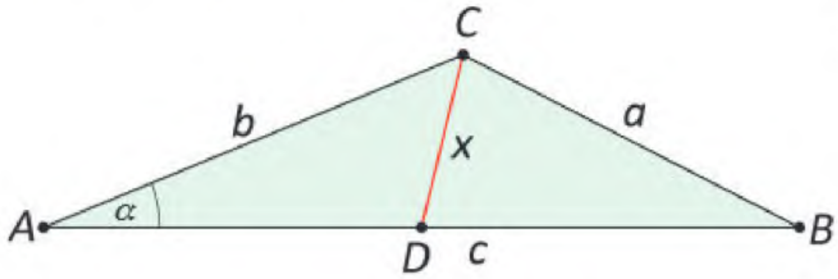
Ćwiczenie 1. W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości boków: $|BC| = 3$ cm oraz $|AB| = |AC| = \sqrt{3}$ cm. Oblicz miarę kąta BAC na dwa sposoby:

a) stosując twierdzenie cosinusów,

b) prowadząc wysokość trójkąta na podstawę i stosując funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

Przykład 2.

Obliczymy długość środkowej CD w trójkącie ABC, jeśli dane są długości boków trójkąta: $a = 5$, $b = 6$, $c = 10$.



Wprowadźmy oznaczenia:

$|\sphericalangle DAC| = \alpha$, $\alpha \in (0°, 180°)$

$|CD| = x$, $x > 0$, gdzie

CD – środkowa trójkąta.

Rozpatrujemy trójkąty ADC oraz ABC.

Wyznaczymy w obu trójkątach cosinus kąta α. W trójkącie ADC otrzymujemy:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - x^2}{2b \cdot \frac{1}{2}c}, \qquad \text{ale } b = 6 \text{ i } c = 10, \text{ stąd}$$

$$\cos\alpha = \frac{36 + 25 - x^2}{60} = \frac{61 - x^2}{60}.$$

Analogicznie obliczamy $\cos\alpha$ w trójkącie ABC:

$$\cos\alpha = \frac{36 + 100 - 25}{120} = \frac{111}{120}, \qquad \text{zatem}$$

$$\frac{61 - x^2}{60} = \frac{111}{120}, \text{ stąd } x^2 = \frac{11}{2}, \text{ czyli } x = \frac{\sqrt{22}}{2}, \ x > 0$$

Środkowa CD ma długość $\frac{\sqrt{22}}{2}$.

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli a, b, c, gdzie $0 < a < c < b$, są długościami boków trójkąta oraz $\frac{b-c}{a} = \frac{a+c}{b+c}$, to kąt leżący naprzeciwko boku mającego długość b jest równy 120°.

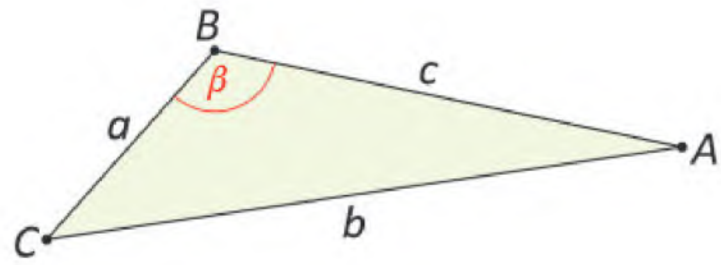
Założenie:

a, b, c – długości boków trójkąta ABC

$a < c < b$,

$|\sphericalangle ABC| = \beta$

$\frac{b-c}{a} = \frac{a+c}{b+c}$



Teza: $\beta = 120^\circ$

Dowód: Z założenia $\frac{b-c}{a} = \frac{a+c}{b+c}$ otrzymujemy $(b-c)(b+c) = a(a+c)$, stąd

$b^2 = a^2 + c^2 + ac$

Natomiast z twierdzenia cosinusów mamy:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

Porównujemy prawe strony równości:

$a^2 + c^2 + ac = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$,

$2ac \cdot \cos\beta = -ac$

$\cos\beta = \frac{-1}{2}$

Ponieważ $\beta \in (0^\circ, 180^\circ)$ i $\cos\beta = \frac{-1}{2}$, więc $\beta = 120^\circ$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, stosując twierdzenie cosinusów, że trójkąt o bokach długości:
   a) 5 cm, 7 cm, 8 cm jest ostrokątny,
   b) 10 cm, 7 cm, 6 cm jest rozwartokątny.

2. Dwa boki trójkąta mają długość a i b, a kąt trójkąta zawarty między tymi bokami jest równy γ. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta, jeśli:
   a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 60^\circ$
   b) $a = 6$ cm, $b = 9$ cm, $\gamma = 135^\circ$.

3. Dwa boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = \sqrt{3} - 1$ oraz $|BC| = \sqrt{3} + 1$. Oblicz miarę kąta ABC, jeśli:
   a) $|AC| = \sqrt{8 - 2\sqrt{2}}$
   b) $|AC| = \sqrt{8 + 2\sqrt{2}}$.

4. Oblicz długości przekątnych równoległoboku, którego boki mają długość 3 cm i 9 cm, a kąt ostry jest równy 60°.

5. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|AC| = 6$ cm. Oblicz długości środkowych AD i BE.

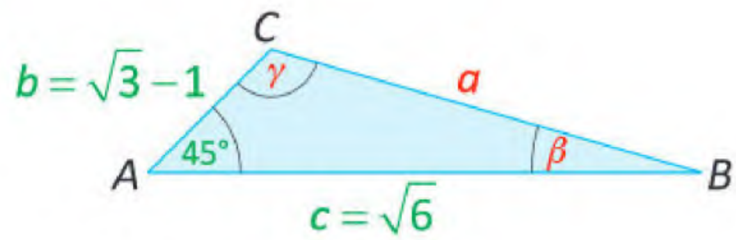
Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania zadań

Twierdzenie sinusów i cosinusów zwykle stosuje się do rozwiązywania trójkątów. **Rozwiązywanie trójkąta** polega na obliczaniu nieznanych długości boków tego trójkąta i nieznanych miar jego kątów wewnętrznych, na podstawie danych informacji o tym trójkącie. Na przykład, znając długości dwóch boków trójkąta i miarę kąta zawartego między tymi bokami, możemy wyznaczyć długość trzeciego boku i miary pozostałych dwóch kątów.

Przykład 1.

Rozwiążemy trójkąt ABC, w którym: $|AB| = \sqrt{6}$, $|AC| = \sqrt{3} - 1$, $|\sphericalangle BAC| = 45°$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
Mamy wyznaczyć miary dwóch kątów i długość jednego boku.



Obliczamy długość boku BC. Korzystamy z twierdzenia cosinusów

$a^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{6}\cdot\cos 45°$, czyli $a^2 = 4$, stąd

$a = 2$, bo $a > 0$

Wyznaczamy miary kątów β i γ.

<u>I sposób</u> – stosujemy twierdzenie cosinusów.

$$(\sqrt{6})^2 = 2^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\cos\gamma$$

$\cos\gamma = -0{,}5$ i $\gamma \in (0°, 180°)$, więc $\gamma = 120°$

Wówczas $\beta = 180° - (120° + 45°) = 15°$

<u>II sposób</u> – stosujemy twierdzenie sinusów. Uwzględniamy informację, że $b < a < c$

$$\frac{2}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{6}}{\sin\gamma}, \text{ czyli } \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sin\gamma}, \quad \text{stąd } \sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ i } \gamma \in (0°, 180°), \text{ więc}$$

$\gamma = 60°$ lub $\gamma = 120°$

Miara kąta γ nie może być równa 60°, bo wtedy największym kątem byłby kąt β:

$\beta = 180° - (60° + 45°) = 75°$,

co przeczyłoby własności: w trójkącie naprzeciwko najdłuższego boku leży największy kąt. Zatem

$\gamma = 120°$ i $\beta = 15°$

Szukane wielkości to: $|BC| = 2$, $|\sphericalangle CBA| = 15°$, $|\sphericalangle ACB| = 120°$.

Ćwiczenie 1. Korzystając z danych z przykładu 1., oblicz: a) $\sin 15^\circ$, b) $\cos 15^\circ$.

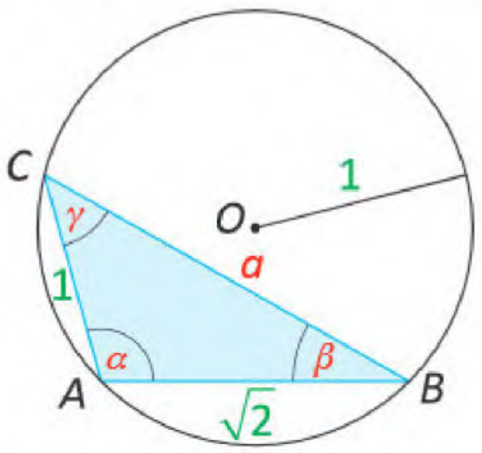
Zauważ, że obliczenie cosinusa kąta wewnętrznego trójkąta jednoznacznie określa ten kąt, inaczej jest w przypadku sinusa takiego kąta. (Dlaczego?)

Ćwiczenie 2. Wyznacz cosinusy kątów wewnętrznych trójkąta, którego boki mają długość: 13, 20, 21. Na tej podstawie wyznacz przybliżone miary kątów tego trójkąta.

Przykład 2.

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o promieniu R, gdzie $R=1$, przy czym $|AB|=\sqrt{2}$ i $|AC|=1$. Rozwiążemy trójkąt ABC.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Wyznaczamy kąt γ. Stosujemy twierdzenie sinusów

$$\frac{|AB|}{\sin\gamma}=2R,\ \text{czyli}\ \frac{\sqrt{2}}{\sin\gamma}=2, \qquad \text{stąd}$$

$$\sin\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ i }\ \gamma\in(0^\circ, 180^\circ), \quad \text{więc}$$

$$\gamma=45^\circ\ \text{lub}\ \gamma=135^\circ.$$

<u>I przypadek</u> – $\gamma=45^\circ$. Obliczamy długość boku BC. Stosujemy twierdzenie cosinusów.

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2-2|AC|\cdot|BC|\cdot\cos\gamma,\ \text{czyli}\ 2=1+a^2-2\cdot1\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2-\sqrt{2}a-1=0 \qquad \Delta=6, \qquad a_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \qquad a_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}<0$$

Drugie rozwiązanie równania kwadratowego jest ujemne, więc $|BC|=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

Wyznaczamy kąt β, stosując twierdzenie cosinusów.

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\beta,\ \text{czyli}$$

$$1=2+\frac{8+4\sqrt{3}}{4}-\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\cos\beta,\ \text{zatem}\ \ 3+\sqrt{3}=\left(2+2\sqrt{3}\right)\cos\beta,\ \text{stąd}$$

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ i }\ \beta\in(0^\circ, 180^\circ), \quad \text{więc} \quad \beta=30^\circ$$

Teraz obliczamy kąt α

$$\alpha=180^\circ-\left(45^\circ+30^\circ\right)=105^\circ$$

<u>II przypadek</u> – $\gamma = 135°$. Obliczamy długość boku BC. Stosujemy twierdzenie cosinusów.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos\gamma, \text{ czyli } 2 = 1 + a^2 + 2 \cdot 1 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2 + \sqrt{2}a - 1 = 0 \qquad \Delta = 6, \qquad a_1 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, \qquad a_2 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} < 0$$

Drugie rozwiązanie równania kwadratowego jest ujemne, więc $|BC| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Wyznaczamy kąt β; stosujemy twierdzenie cosinusów

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos\beta, \text{ czyli}$$

$$1 = 2 + \frac{8-4\sqrt{3}}{4} - \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \cdot \cos\beta, \text{ zatem } 3-\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}-2\right)\cos\beta, \text{ stąd}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ i } \beta \in (0°, 180°), \text{ więc } \beta = 30°$$

Obliczamy kąt α

$$\alpha = 180° - (135° + 30°) = 15°$$

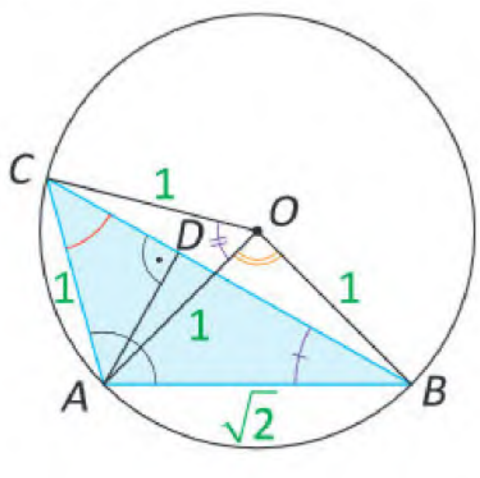
Istnieją dwa trójkąty spełniające warunki zadania;

w pierwszym: $|BC| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, $|\sphericalangle A| = 105°$, $|\sphericalangle B| = 30°$, $|\sphericalangle C| = 45°$;

w drugim: $|BC| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $|\sphericalangle A| = 15°$, $|\sphericalangle B| = 30°$, $|\sphericalangle C| = 135°$.

UWAGA: Zadanie z przykładu 2. można też rozwiązać inaczej, o ile zauważymy, że musimy rozpatrzeć dwa przypadki.

<u>I przypadek</u>



Trójkąt AOC jest równoboczny, zatem $|\sphericalangle AOC| = 60°$,

$$|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle AOC| = 30° \qquad \text{– twierdzenie 1 str. 203}$$

Trójkąt ABO ma boki długości 1, 1, $\sqrt{2}$, a więc jest to trójkąt prostokątny i $|\sphericalangle AOB| = 90°$. – twierdzenie 12 str. 182

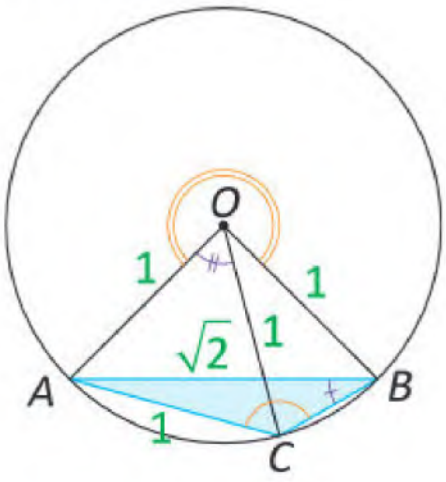
$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle AOB| = 45° \qquad \text{– twierdzenie 1 str. 203}$$

Tak więc $|\sphericalangle BAC| = 180° - (30° + 45°) = 105°$

Aby obliczyć długość boku BC, wystarczy poprowadzić wysokość AD trójkąta ABC i rozważyć dwa trójkąty: trójkąt prostokątny równoramienny ADC oraz trójkąt prostokątny ABD o kątach ostrych 30° i 60°. Otrzymamy wówczas

$$|CD| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad |DB| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

II przypadek



Trójkąt ACO jest równoboczny, zatem

$$|\sphericalangle AOC| = 60°,$$

$$|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle AOC| = 30°$$ – twierdzenie 1 str. 203

Trójkat ABO jest prostokątny, więc kąt wklęsły BOA ma miarę 270°, stąd

$$|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BOA| = 135°$$ – twierdzenie 1 str. 203

Ostatecznie

$$|\sphericalangle CAB| = 15°$$

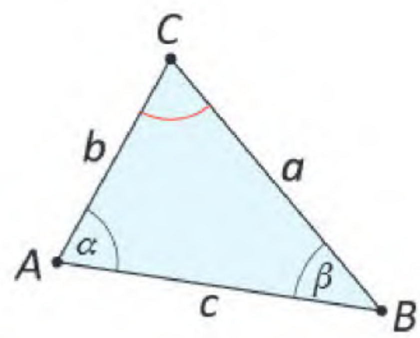
W tym przypadku bok BC najwygodniej jest obliczyć za pomocą twierdzenia cosinusów.

Przykład 3.

Udowodnimy, że jeśli α, β są miarami kątów w trójkącie oraz $\sin\beta + 2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha+\beta) = 0$, to ten trójkąt jest równoramienny.

Założenie:
  α, β - miary kątów trójkąta ABC
  a, b, c – długości boków trójkąta ABC
  $\sin\beta + 2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha+\beta) = 0$

Teza:
  trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym



Dowód: Z założenia wiemy, że

(1) $\sin\beta + 2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha+\beta) = 0$

Równość tę przekształcimy do równości wyrażającej zależność między długościami boków a, b, c trójkąta.

Z twierdzenia sinusów mamy $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Do równości (1) w miejsce $\sin\beta$ podstawiamy $\frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$ i otrzymujemy:

$$\frac{b \cdot \sin\alpha}{a} + 2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha+\beta) = 0$$

Mnożymy równość stronami przez a i dzielimy przez $\sin\alpha$, bo $\sin\alpha \neq 0$. Otrzymujemy:

(2) $b + 2a \cdot \cos(\alpha+\beta) = 0$

Pozostaje wyrazić $\cos(\alpha+\beta)$ za pomocą długości boków trójkąta. Zauważamy, że

$|\sphericalangle ACB| = 180° - (\alpha+\beta)$, więc

$\cos|\sphericalangle ACB| = -\cos(\alpha+\beta)$

Stosujemy twierdzenie cosinusów:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos|\sphericalangle ACB|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\alpha + \beta), \text{ stąd}$$

$$2a \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{b}$$

Podstawiamy wyrażenie $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{b}$ do równości (2) w miejsce $2a \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

Mamy:

$$b + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{b} = 0 \quad / \cdot b$$

$$b^2 + c^2 - a^2 - b^2 = 0, \text{ czyli}$$

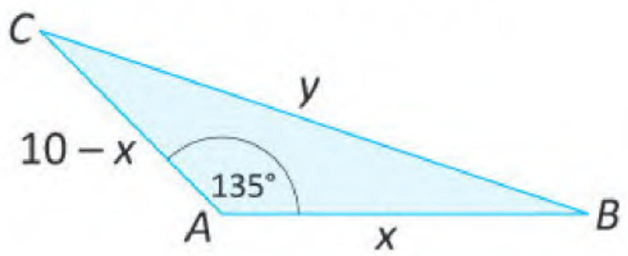
$$c^2 = a^2, \text{ stąd}$$

$$c = a, \quad \text{bo } a > 0 \text{ i } c > 0$$

Otrzymaliśmy, że dwa boki trójkąta mają tę samą długość, zatem trójkąt jest równoramienny, co kończy dowód.

Przykład 4.

W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| + |AC| = 10$ i $|\sphericalangle BAC| = 135°$. Jaką najmniejszą długość może mieć bok BC?



Oznaczmy

$$|AB| = x, \text{ wtedy } |AC| = 10 - x$$

$$|BC| = y$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów.

Zauważmy, że $x > 0$ i $10 - x > 0$, stąd $x \in (0, 10)$.

Otrzymujemy

$$y^2 = x^2 + (10 - x)^2 - 2 \cdot x \cdot (10 - x) \cdot \cos 135°, \text{ gdzie } x \in (0, 10)$$

$$y^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 - (20x - 2x^2) \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y^2 = (2 - \sqrt{2})x^2 - 10(2 - \sqrt{2})x + 100, \text{ stąd}$$

$$y = \sqrt{(2 - \sqrt{2})x^2 - 10(2 - \sqrt{2})x + 100}, \quad \text{bo } y > 0$$

Chcemy wyznaczyć najmniejszą wartość, jaką może przyjmować y. Rozważmy funkcję

$$f(x) = (2 - \sqrt{2})x^2 - 10(2 - \sqrt{2})x + 100, \text{ gdzie } x \in (0, 10)$$

Jeśli wyznaczymy argument x, dla którego funkcja kwadratowa f przyjmuje najmniejszą wartość, to również dla tego samego argumentu najmniejszą wartość przyjmie funkcja

$$y = \sqrt{f(x)},$$

ponieważ funkcja, która dowolnej liczbie rzeczywistej nieujemnej przyporządkowuje pierwiastek kwadratowy z tej liczby, jest rosnąca.

Mamy

$$f(x)=(2-\sqrt{2})x^2-10(2-\sqrt{2})x+100, \text{ gdzie } x \in (0, 10)$$

$$x_w=\frac{10(2-\sqrt{2})}{2(2-\sqrt{2})}=5, \qquad 5 \in (0, 10)$$

Współczynnik przy x^2 jest równy $2-\sqrt{2}$ i jest dodatni. Funkcja kwadratowa f przyjmuje dla argumentu 5 najmniejszą wartość. Obliczamy tę wartość:

$$f(5)=(2-\sqrt{2})5^2-10(2-\sqrt{2})\cdot 5+100=25(2+\sqrt{2}), \quad \text{stąd}$$

$$y=\sqrt{f(5)}=\sqrt{25(2+\sqrt{2})}=5\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Najmniejsza długość boku BC jest równa $5\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. W trójkącie ABC boki mają długość: $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, a kąty przy wierzchołkach A, B, C są odpowiednio równe α, β, γ. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli:
   a) $c=\sqrt{2},\ \beta=30°,\ \gamma=45°$
   b) $a=5,\ b=5\sqrt{3},\ \alpha=30°$
   c) $a=7,\ c=14,\ \gamma=60°$
   d) $b=8{,}7;\ \alpha=150°, \beta=10°$.
2. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o promieniu 1, przy czym $|AB|=\sqrt{3}$ i $|AC|=\sqrt{2}$. Rozwiąż trójkąt ABC.
3. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o promieniu 1, przy czym $|AB|=\sqrt{3}$ i $|AC|=1$. Rozwiąż trójkąt ABC.
4. **D** Wykaż, że jeśli boki trójkąta są równe 5 cm, 7 cm, 8 cm, to jeden z kątów tego trójkąta jest równy 60°. Następnie oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 1 mm.
5. O trójkącie ABC wiemy, że $|\sphericalangle BAC|=120°$, $|AC|=5$ oraz $|AB|+|BC|=10$.
   a) Wyznacz długości boków AB i BC.
   b) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
   c) Wyznacz przybliżone miary kątów ostrych tego trójkąta.
6. O trójkącie ABC wiemy, że $|\sphericalangle BAC|=60°$, $|BC|=2|AB|$ oraz $|AB|+|BC|+|CA|=20$.
   a) Wyznacz długości boków trójkąta ABC.
   b) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
7. W trójkącie ABC kąt ACB jest równy 120°. Dwusieczna tego kąta przecina bok AB w punkcie D. Wiedząc, że $|AC|=3$ oraz $|BC|=6$, oblicz:
   a) długość odcinka AD
   b) długość odcinka CD.

8. Dwa krótsze boki AB i AC trójkąta prostokątnego mają długość 21 cm i 28 cm. Oblicz:
   a) długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta przy wierzchołku A dzieli bok BC,
   b) długość odcinka dwusiecznej kąta prostego, zawartego w tym trójkącie.

D 9. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta, to $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.

D 10. Wykaż, że jeśli kąty trójkąta α, β, γ spełniają warunek: $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin^2\gamma$, to ten trójkąt jest prostokątny.

11. Rozpatrujemy trójkąt, którego suma długości dwóch boków jest równa 14, a kąt między tymi bokami jest równy 60°. Jaki najmniejszy obwód może mieć ten trójkąt?

12. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| + |BC| = 4$ oraz $|\sphericalangle CBA| = 30°$. Jaką najmniejszą długość może mieć bok AC?

13. W pewnym trójkącie cosinus najmniejszego kąta jest równy 0,75. Wyznacz długości boków tego trójkąta wiedząc, że wyrażają się one kolejnymi liczbami naturalnymi.

14. W pewnym trójkącie cosinus najmniejszego kąta jest równy 0,6. Długości boków są liczbami naturalnymi. Jeden z boków jest krótszy od najdłuższego boku o 8, a drugi bok o 1. Oblicz obwód tego trójkąta.

D 15. Z wierzchołka A trójkąta ABC poprowadzono półprostą, która przecina bok BC w punkcie D. Wykaż, że stosunek promieni okręgów opisanych na trójkącie ADC oraz na trójkącie ABD nie zależy od kąta, jaki tworzy półprosta $AD^{\rightarrow}$ z bokiem BC.

D 16. Boki równoległoboku mają długość a i b, zaś przekątne c i d. Wykaż, że jeśli długości przekątnych różnią się o 4, to cosinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{c+d}{ab}$.

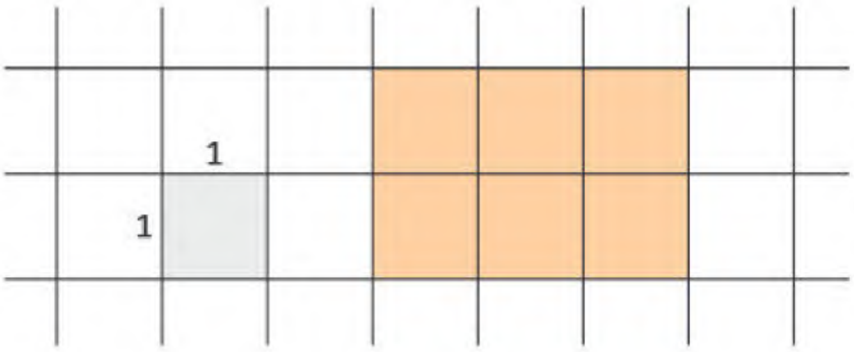
D 17. W trójkącie ABC długości boków AB i AC pozostają w stosunku 2 : 3, a punkt D jest środkiem boku AB. Wykaż, że jeśli $|CD| = |BC|$, to kąt trójkąta przy wierzchołku A jest równy 60°.

18. W trójkącie dane są dwa kąty: $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$ oraz długość c boku leżącego między nimi.
   a) Zapisz długości pozostałych boków w zależności od c.
   b) Wyznacz dokładną wartość sinusa kąta 75°.

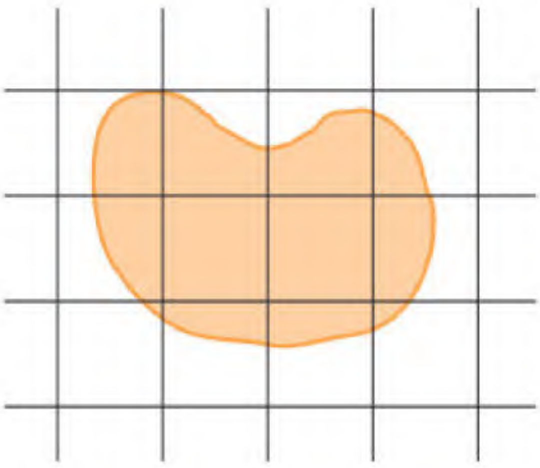
D 19. Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt rozwartokątny, którego długości boków wyrażają się kolejnymi liczbami naturalnymi.

Pole figury płaskiej

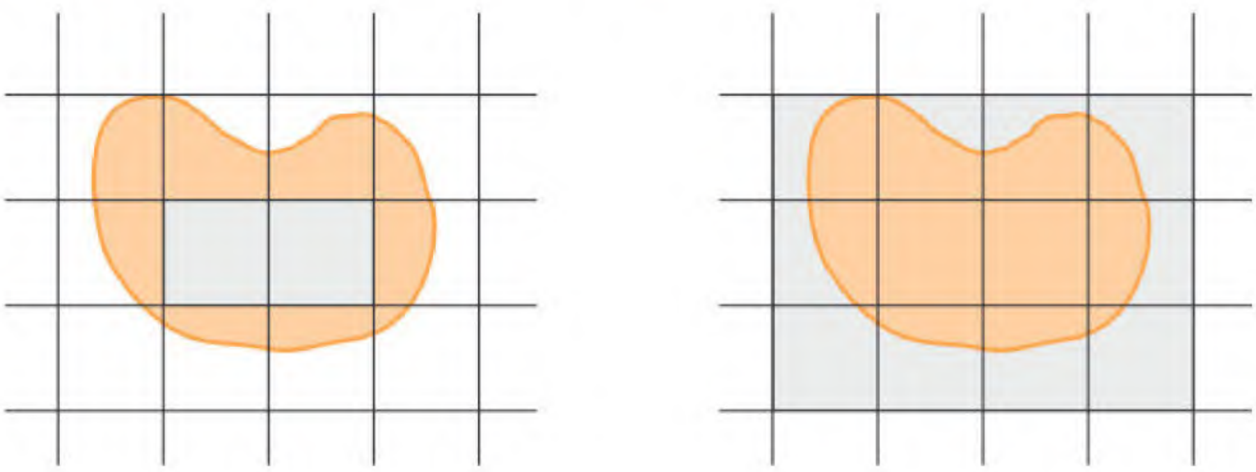
Pole jest liczbą, którą można przyporządkować pewnym figurom płaskim. Aby określić pole, buduje się tzw. sieci kwadratowe. Na początku ustala się jednostkę – Jest nią kwadrat o boku 1, nazywany kwadratem jednostkowym. Za jego pomocą mierzymy pola różnych figur.



Aby zmierzyć na przykład pole prostokąta o bokach mających długość 2 i 3, dzielimy ten prostokąt na kwadraty identyczne z kwadratem jednostkowym. Wówczas zauważamy, że w tym prostokącie mieści się sześć takich kwadratów. Tak więc pole tego prostokąta jest równe 6.
Załóżmy teraz, że chcemy znaleźć pole pomarańczowej figury na rysunku poniżej.

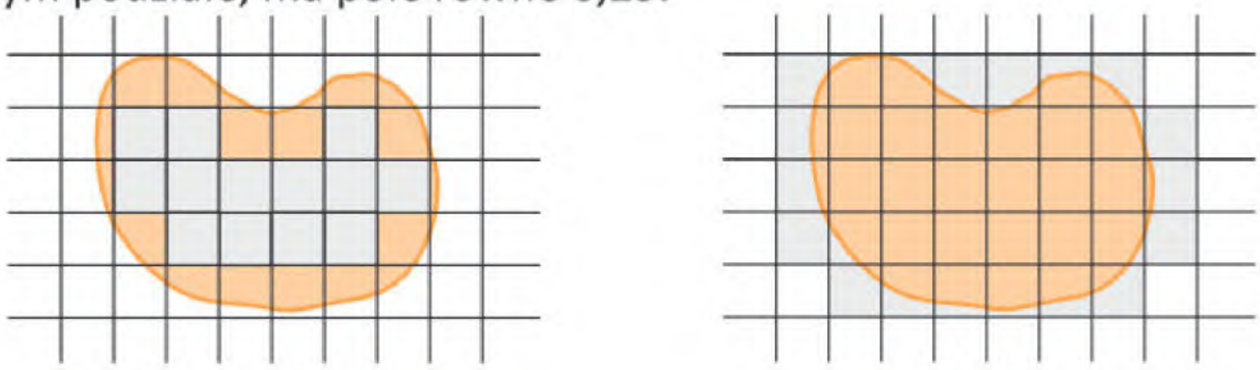


W tej figurze zawierają się dwa kwadraty jednostkowe, więc jej pole P na pewno spełnia nierówność $P \geqslant 2$. Zaznaczamy teraz wszystkie kwadraty, które mają z rozważaną figurą co najmniej jeden punkt wspólny.



Widać, że takich kwadratów jest 12, więc na pewno $P \leqslant 12$. Mamy zatem pierwsze przybliżenie pola naszej figury: $2 \leqslant P \leqslant 12$. Przybliżenie to oczywiście nie jest dokładne.

Żeby znaleźć lepsze przybliżenie, zagęszczamy sieć, dzieląc każdy z kwadratów jednostkowych na 4 jednakowe kwadraty. Oczywiście każdy kwadrat, którym dysponujemy po tym podziale, ma pole równe 0,25.



Zliczamy najpierw wszystkie uzyskane kwadraty, które leżą całkowicie wewnątrz danej figury. Jest ich 13 i mają w sumie pole równe $13 \cdot 0{,}25$, czyli 3,25. Zatem $P \geqslant 3{,}25$. Następnie zauważamy, że jest 37 takich kwadratów, które mają co najmniej jeden punkt wspólny z daną figurą, stąd $P \leqslant 37 \cdot 0{,}25$, czyli $P \leqslant 9{,}25$. Otrzymaliśmy w ten sposób drugie przybliżenie pola naszej figury:

$$3{,}25 \leqslant P \leqslant 9{,}25$$

Aby otrzymać bardziej dokładne przybliżenie pola P, możemy znowu każdy z kwadratów podzielić na cztery mniejsze kwadraciki, tym razem o polach 0,0625. Otrzymamy wówczas:

$$71 \cdot 0{,}0625 \leqslant P \leqslant 124 \cdot 0{,}0625 \quad \text{czyli} \quad 4{,}4375 \leqslant P \leqslant 7{,}75.$$

Postępując tak dalej, wyznaczylibyśmy coraz dokładniejsze przybliżenia pola P:

- z niedomiarem $2 < 3{,}25 < 4{,}4375 < \ldots$ oraz
- z nadmiarem $12 > 9{,}25 > 7{,}75 > \ldots$

Liczby: 2 3,25 4,4375 ... dążą do pewnej liczby, którą nazywamy miarą wewnętrzną danej figury. Liczby: 12 9,25 7,75 ... również dążą do pewnej liczby, którą nazywamy miarą zewnętrzną tej figury. Jeśli miary: wewnętrzna i zewnętrzna są równe i nie zależą od wyboru sieci i sposobu zagęszczania, to tę wspólną wartość nazywamy polem figury. Można wykazać, że pole naszej figury jest równe ok. 5,82.

Istnieją też figury, które nie mają pola. Rozważmy w układzie współrzędnych kwadrat, którego wierzchołkami są punkty o współrzędnych: (0, 0), (0, 1), (1, 0) i (1, 1). Z tego kwadratu usuwamy wszystkie punkty, których obie współrzędne są liczbami wymiernymi. Otrzymujemy figurę F, której miara wewnętrzna jest równa 0, bo nie istnieje żaden kwadrat dowolnie zagęszczonej sieci, który zawierałby się w tej figurze. Natomiast miara zewnętrzna figury F jest równa 1. To znaczy, że figurze F nie można przyporządkować pola.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

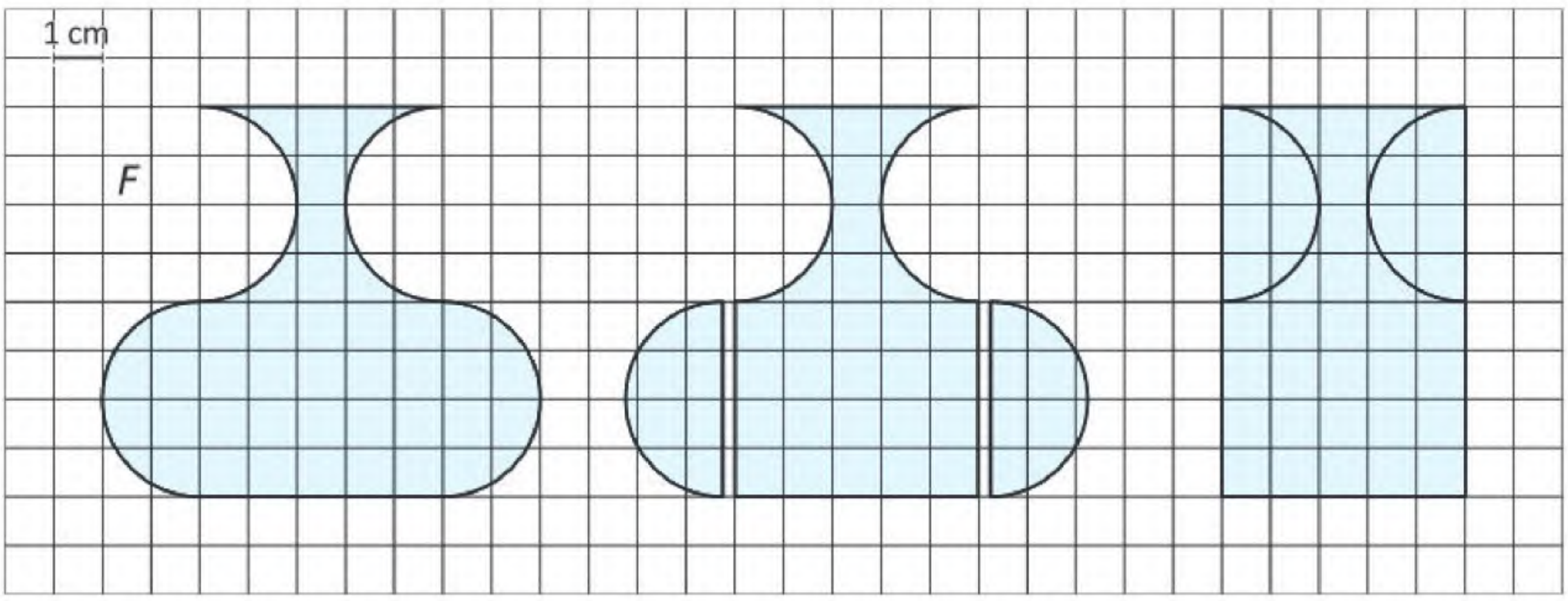
Twierdzenie 1. *Własności pola*

1) Pole figury jest liczbą nieujemną.
2) Pola figur przystających, wyznaczone przy tej samej jednostce, są równe.
3) Jeśli figura F składa się z dwóch figur F_1 i F_2, mających pola i wnętrzami rozłącznych, to pole figury F jest równe sumie pól figur F_1 i F_2 przy tej samej jednostce.
4) Kwadrat o boku jednostkowym ma pole równe 1.

Można też udowodnić, że każda figura ograniczona, której brzeg jest utworzony z odcinków lub łuków, ma pole.

Przykład 1.

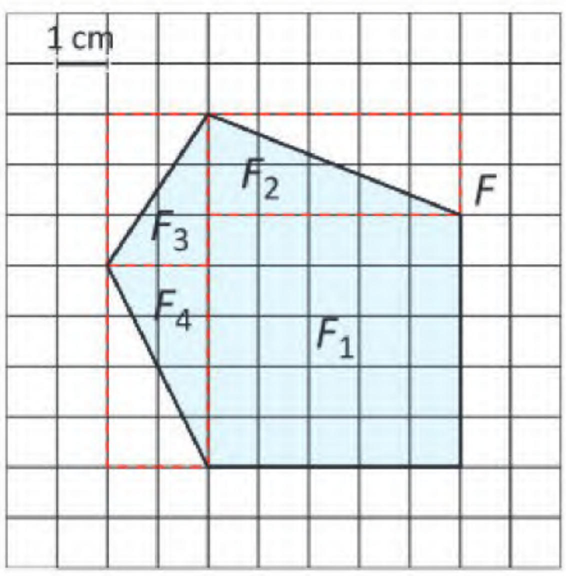
Obliczymy pole figury F, wykorzystując dane na rysunku.



Możemy postąpić tak: „odcinamy” dwa półkola i składamy nową figurę o takim samym polu. Pole nowej figury – prostokąta – obliczamy bez kłopotu. Pole figury F jest równe 40 cm^2.

Przykład 2.

Obliczymy pole figury F, przedstawionej na rysunku poniżej.



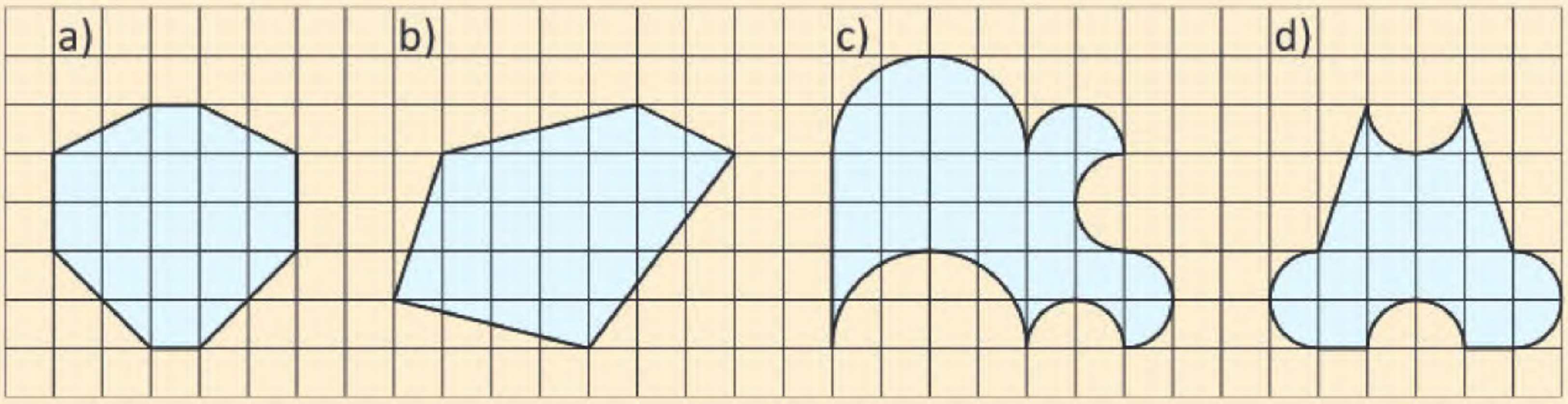
Tym razem postępujemy tak: dzielimy wielokąt na znane figury, np. trójkąty prostokątne i prostokąt. Pole figury F jest sumą pól powstałych figur F_1, F_2, F_3, F_4. Ponieważ F_1 jest kwadratem o boku mającym długość 5 cm, zatem $P_{F_1} = 25\ \text{cm}^2$.

Figura F_2 jest połową prostokąta o bokach mających długość 2 cm i 5 cm, więc $P_{F_2} = \frac{1}{2} \cdot (2\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm}) = 5\ \text{cm}^2$. Podobnie F_3 jest połową prostokąta, którego boki mają długość 2 cm i 3 cm, a F_4 – połową prostokąta o bokach mających długość 2 cm i 4 cm. Otrzymujemy zatem: $P_{F_3} = \frac{1}{2} \cdot (3\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm}) = 3\ \text{cm}^2$ i $P_{F_4} = \frac{1}{2} \cdot (2\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm}) = 4\ \text{cm}^2$. Obliczamy pole figury F:

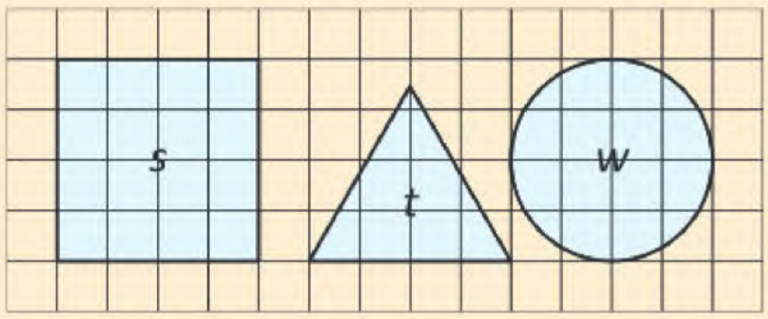
$P = 25\ \text{cm}^2 + 5\ \text{cm}^2 + 3\ \text{cm}^2 + 4\ \text{cm}^2 = 37\ \text{cm}^2$.

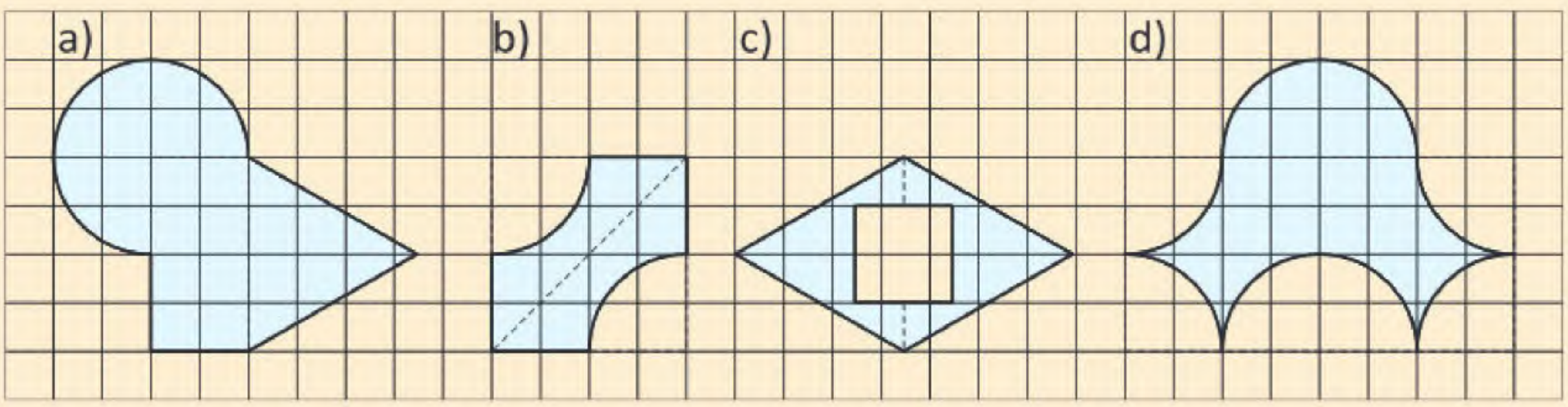
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Pole jednej kratki jest równe 1. Oblicz pola poniższych figur.



2. Na rysunku obok dane są trzy figury: kwadrat, trójkąt równoboczny i koło, których pola są odpowiednio równe: s, t, w. Wyraź pola figur umieszczonych poniżej za pomocą pól s, t, w.



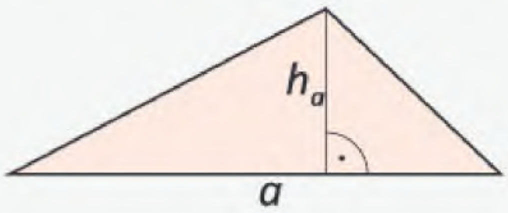


3. Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 12 cm. Punkty K, L, M, N należą odpowiednio do boków AB, BC, CD, AD. Wiedząc, że $|AK| : |KB| = 1 : 2$, $|BL| : |LC| = 1 : 5$, $|DM| : |MC| = 7 : 5$ oraz $|DN| = |AN|$, oblicz pole czworokąta $KLMN$.

Pole trójkąta, cz. 1

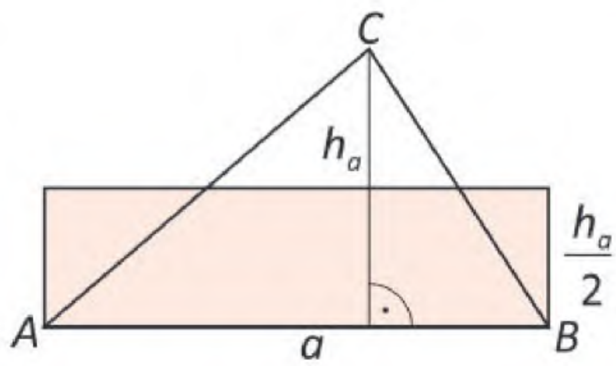
Trójkąt jest figurą, która ma pole. Do obliczania pola trójkąta stosujemy różne wzory. Jeden z nich znasz ze szkoły podstawowej.

Twierdzenie 1.
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.



$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

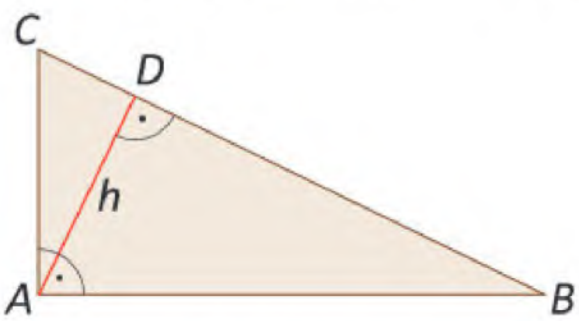
Ćwiczenie 1. Wskaż na rysunku obok trójkąty przystające. Następnie wykaż, że pole trójkąta *ABC* jest równe polu zamalowanego prostokąta.



Ćwiczenie 2. Pole prostokąta na rysunku obok jest równe 10 cm^2. Jakie jest pole pomalowanego na niebiesko trójkąta?

Przykład 1.

W trójkącie prostokątnym *ABC* kąt *BAC* jest prosty oraz $|AB| = 15$ cm, $|BC| = 17$ cm. Obliczymy wysokość h trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A.



Na mocy twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość boku *AC*:

$$|AC|^2 = 289 - 225 = 64$$
$$|AC| = 8, \quad |AC| > 0$$

Teraz możemy zastosować dwukrotnie wzór na pole trójkąta *ABC*:

$$\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC|, \qquad \text{stąd} \qquad |BC| \cdot h = |AB| \cdot |AC|.$$

$$17 \cdot h = 15 \cdot 8, \quad \text{więc} \quad h = 7\frac{1}{17}.$$

Wysokość h jest równa $7\frac{1}{17}$ cm.

Ćwiczenie 3. Wyznacz wysokość h z przykładu 1., korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że pole trójkąta równobocznego o boku mającym długość a jest równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

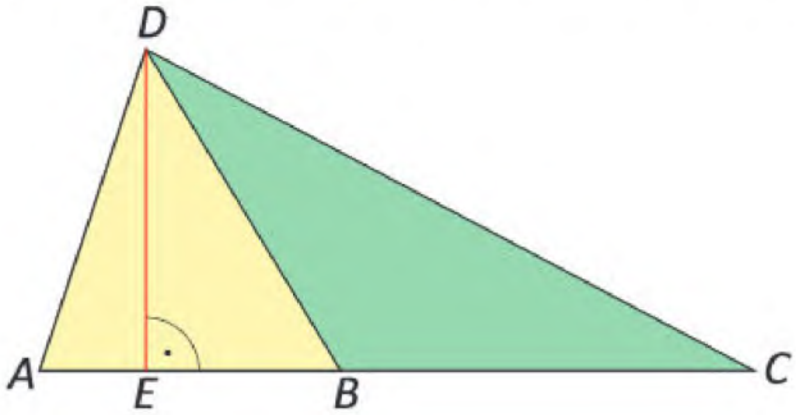
Zauważ, że na rysunku poniżej trójkąty ABD i BCD mają wspólną wysokość DE.

$$P_{ABD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DE|$$

$$P_{BCD} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |DE|$$

Wówczas:

$$\frac{P_{ABD}}{P_{BCD}} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

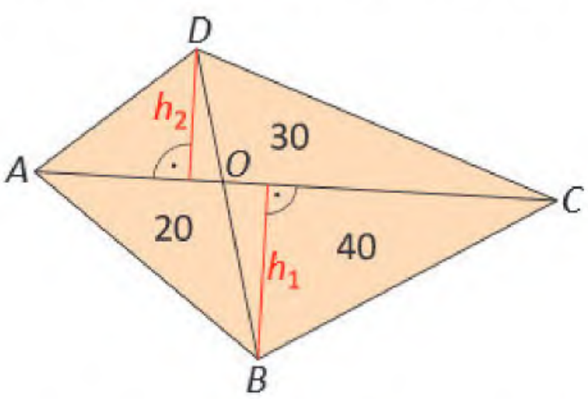


Jeśli dwa trójkąty mają taką samą wysokość, to stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, do których ta wysokość została poprowadzona.

Ćwiczenie 5. Wykaż, że środkowa w trójkącie dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.

Przykład 2.

Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Trzy spośród trzech wyznaczonych w ten sposób trójkątów mają pola odpowiednio równe 20, 30 i 40, jak na rysunku poniżej. Obliczymy pole czwartego trójkąta.



Obliczymy pole trójkąta AOD.
Zauważamy, że trójkąty ABO i OBC mają wspólną wysokość h_1, poprowadzoną z wierzchołka B. Zatem

$$\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{P_{ABO}}{P_{OBC}}, \text{ więc } \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

Podobnie, trójkąty AOD i OCD mają wspólną wysokość h_2. W takim razie

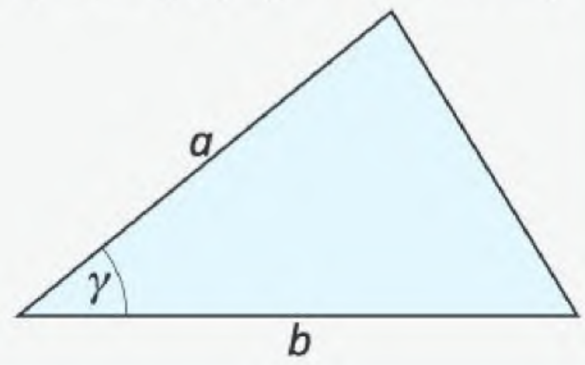
$$\frac{P_{AOD}}{P_{OCD}} = \frac{|AO|}{|OC|}, \text{ więc } \frac{P_{AOD}}{30} = \frac{1}{2}, \text{ stąd } P_{AOD} = 15.$$

Pole czwartego trójkąta jest równe 15.

Twierdzenie 2.

Pole trójkąta o bokach długości a, b i kącie γ zawartym między tymi bokami wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

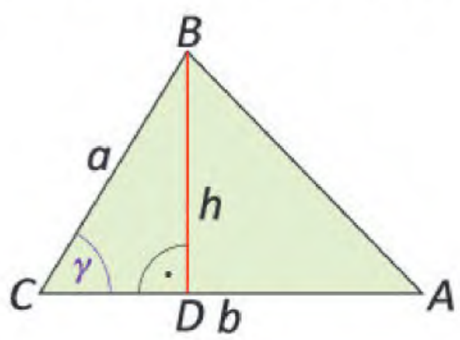


Założenie: $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma$

Teza: $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$

Dowód:

<u>I przypadek</u> – Kąt γ jest ostry.



Prowadzimy wysokość BD, $|BD| = h$.
Z definicji sinusa kąta w trójkącie prostokątnym CDB mamy

$$\sin\gamma = \frac{h}{a}, \qquad \text{stąd} \quad h = a \cdot \sin\gamma$$

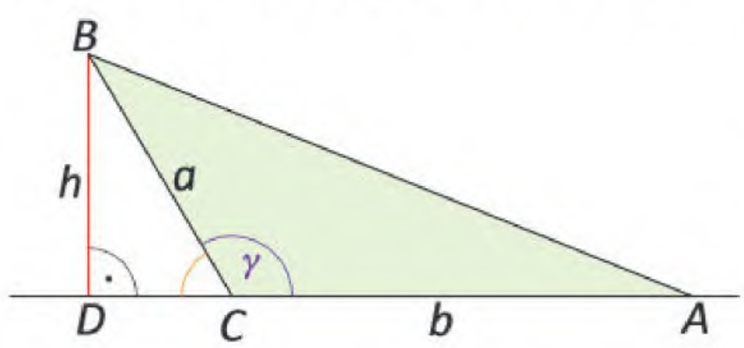
Wówczas $P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$

<u>II przypadek</u> – Kąt γ jest prosty.

Wówczas pole trójkąta wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2} a \cdot b$. Ale $\sin\gamma = \sin 90^\circ = 1$, więc

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

<u>III przypadek</u> – Kąt γ jest rozwarty.



Prowadzimy wysokość BD na przedłużenie podstawy CA, $|BD| = h$.
W trójkącie prostokątnym DCB mamy:

$|\sphericalangle DCB| = 180^\circ - \gamma$, stąd

$$\frac{h}{a} = \sin(180^\circ - \gamma)$$

$$h = a \cdot \sin(180^\circ - \gamma)$$

Ponieważ $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$, więc $h = a \cdot \sin\gamma$. Wówczas

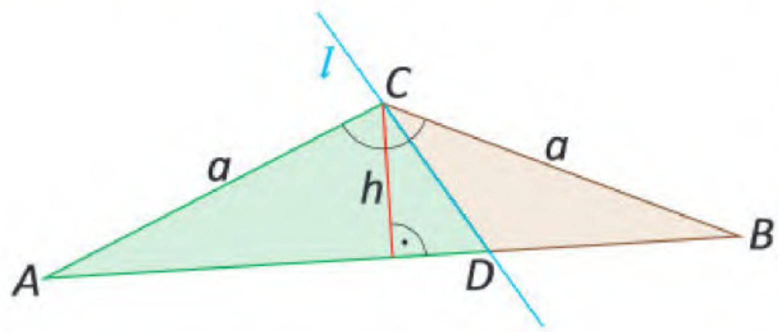
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma,$$

co kończy dowód.

Ćwiczenie 6. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki mają długość 4 cm i 5 cm, a kąt zawarty między tymi bokami jest równy: a) 45° b) 150°.

Przykład 3.

W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami jest równy 150°. Pokażemy, że prosta przechodząca przez wierzchołek tego kąta i dzieląca ten kąt w stosunku 4 : 1 dzieli bok przeciwległy temu kątowi w stosunku $\sqrt{3} : 1$.



Wprowadźmy oznaczenia:
l – prosta dzieląca kąt ACB w stosunku 4 : 1
D – punkt przecięcia prostej l z bokiem AB
$|AC| = |BC| = a$
Pokażemy, że $|AD| : |DB| = \sqrt{3} : 1$.

Z założenia $|\sphericalangle ACD| : |\sphericalangle DCB| = 4 : 1$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 150°$, więc
$|\sphericalangle ACD| = 120°$, $|\sphericalangle DCB| = 30°$.

Obliczamy pola trójkątów ADC i DBC:

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |CD| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot |CD|$$

$$P_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |CD| \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{4} \cdot |CD|$$

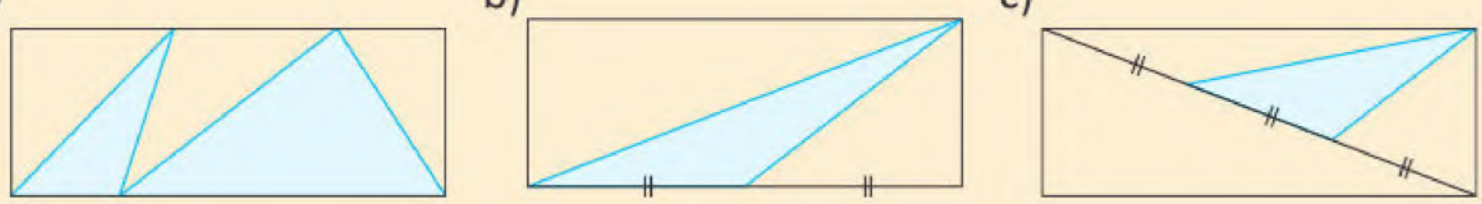
Trójkąty ADC i BCD mają wspólną wysokość h, poprowadzoną z wierzchołka C.
Ponieważ $P_{ADC} : P_{DBC} = \sqrt{3} : 1$, więc $|AD| : |DB| = \sqrt{3} : 1$.

Ćwiczenie 7. Wyznacz pole trójkąta ABC z przykładu 3. oraz długość odcinka CD w zależności od długości boku a.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Pole prostokąta jest równe P. Wyznacz pole figury pomalowanej na niebiesko.

a) b) c)

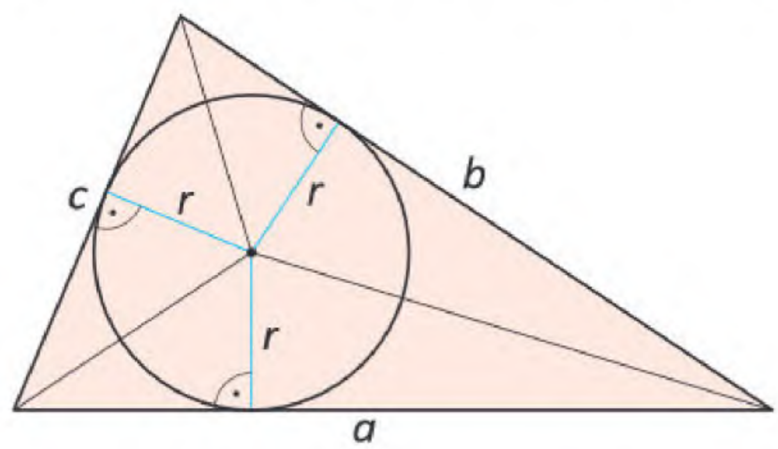


2. Pole trójkąta równobocznego jest równe $9\sqrt{3}$ dm^2. Oblicz wysokość tego trójkąta. Ile jest równy promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i promień okręgu opisanego na tym trójkącie?

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Oblicz wysokość tego trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka C, jeśli:
   a) $|AC| = 5$ cm, $|BC| = 12$ cm,
   b) $|AC| = 6$ cm i środkowa CE ma długość 5 cm.
4. Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli:
   a) $|AB| = 9$ cm, $|AC| = 10$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 30°$,
   b) $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 120°$.
5. W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami jest równy α, a pole tego trójkąta wynosi P. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli:
   a) $\alpha = 45°$, $P = 9\sqrt{2}$ cm^2 b) $\alpha = 150°$ i $P = 20{,}25$ cm^2.
6. Dwa boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 7$ cm. Wiedząc, że pole tego trójkąta jest równe 21 cm^2, wyznacz:
   a) sinus kąta ABC,
   b) wysokości opuszczone na boki AB i BC.
7. Rozpatrujemy trójkąty, których dwa boki mają długość: 6 cm i 8 cm, a kąt między tymi bokami ma miarę α, gdzie $\alpha \in (0°, 180°)$. Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta, który ma największe pole.
8. *D* Wykaż, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.
9. *D* Wykaż, że w dowolnym trójkącie trzy przecinające się środkowe wyznaczają sześć trójkątów o równych polach.
10. Pole trójkąta jest równe P, a kąt między bokami długości a i b jest równy γ. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli:
   a) $P = 30$ cm^2, $a = 5$ cm, $\cos\gamma = -\frac{5}{13}$,
   b) $P = 18$ cm^2, $b = 10$ cm, $\sin\gamma = 0{,}6$.
11. Dane jest pole P trójkąta i długości dwóch jego boków b i c. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli:
   a) $P = 6\sqrt{5}$, $b = 4$, $c = 9$ b) $P = 4{,}5\sqrt{7}$, $b = \sqrt{21}$, $c = \sqrt{48}$.
12. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|\sphericalangle ACB| = 120°$. Punkt D należy do boku AB. Oblicz pola trójkątów ADC i DBC, jeśli:
   a) $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB|$ b) $|\sphericalangle ACD| = 30°$.
13. W trójkącie ABC boki AC i BC mają odpowiednio długość: 10 cm i 16 cm. Wiedząc, że długość środkowej poprowadzonej z punktu C jest równa 7 cm, oblicz:
   a) długość boku AB b) pole trójkąta ABC.

Pole trójkąta, cz. 2

Rozważmy trójkąt o bokach mających długość a, b, c, w który wpisano okrąg o promieniu r. Wyznaczymy pole P tego trójkąta w zależności od a, b, c oraz r.



Ze środka okręgu wpisanego w trójkąt prowadzimy odcinki do wierzchołków trójkąta. Odcinki te dzielą trójkąt na trzy trójkąty, których podstawami są odcinki mające długość a, b, c, natomiast wysokości poprowadzone na te podstawy są równe r. Możemy więc zapisać:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

$$P = p \cdot r, \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Pole trójkąta równa się iloczynowi promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt i połowy obwodu tego trójkąta.

Przykład 1.

W trójkąt ABC o polu 260 cm^2 wpisano okrąg o promieniu 5 cm. Obliczymy obwód trójkąta ABC.

Wiemy już, że $P = p \cdot r$, gdzie p – połowa obwodu trójkąta, r – promień okręgu wpisanego w trójkąt. Zatem:

$$p = \frac{P}{r} \qquad p = \frac{260}{5}$$

$$p = 52, \quad \text{stąd}$$

$$2p = 104$$

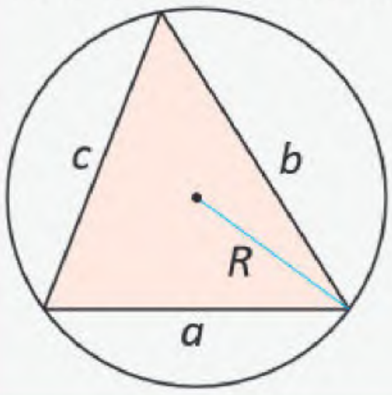
Obwód trójkąta ABC jest równy 104 cm.

Podamy jeszcze dwa wzory na pole trójkąta, które są przydatne w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.

Ćwiczenie 1. Oblicz pole trójkąta o obwodzie 10 cm, jeżeli promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 1 cm.

Twierdzenie 2.

Pole P trójkąta o bokach mających długość a, b, c wyraża się wzorem:



$$P = \frac{abc}{4R},$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ostatnie twierdzenie jest prostym wnioskiem z twierdzenia sinusów. Mamy bowiem

$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, gdzie γ jest kątem zawartym między bokami długości a i b,

stąd otrzymujemy

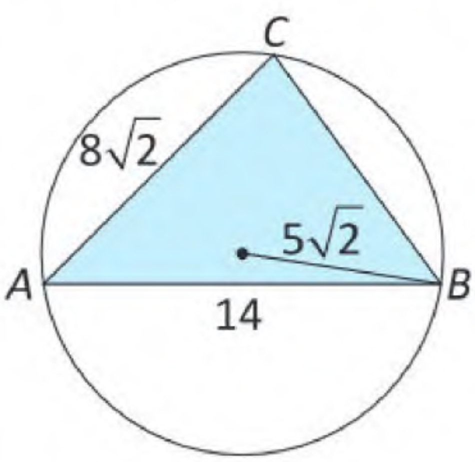
$$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Przykład 2.

W trójkącie ABC dwa boki mają długość: $|AB| = 14$, $|AC| = 8\sqrt{2}$, a promień R okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $5\sqrt{2}$. Wiedząc, że pole trójkąta ABC jest równe 56, obliczymy długość trzeciego boku tego trójkąta.



Z twierdzenia 2. mamy:

$$P = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4R}, \quad \text{więc}$$

$$56 = \frac{14|BC| \cdot 8\sqrt{2}}{4 \cdot 5\sqrt{2}}, \quad \text{stąd}$$

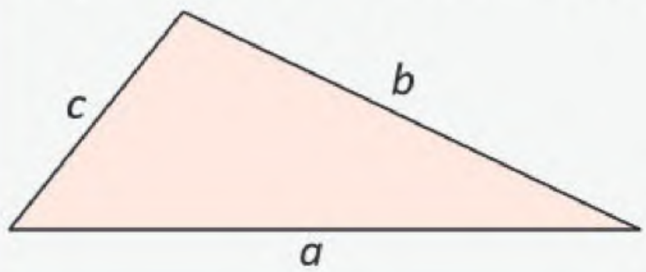
$$|BC| = 10.$$

Bok BC trójkąta ABC ma długość 10.

Ćwiczenie 2. Dla trójkąta ABC z przykładu 2. wyznacz dwoma sposobami:
a) miarę kąta BAC b) promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie 3. Wzór Herona

Pole P trójkąta o bokach mających długość a, b, c wyraża się wzorem:



$$P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

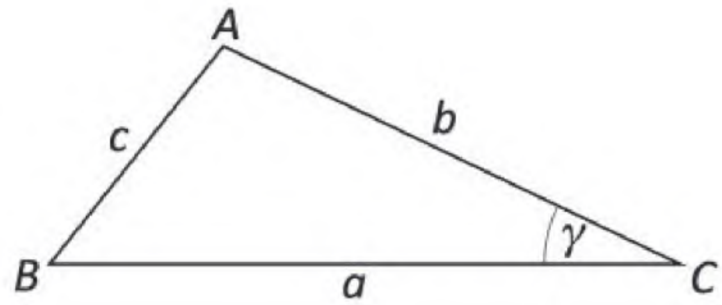
gdzie $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, czyli p jest połową obwodu tego trójkąta.

Założenie: a, b, c – długości boków dowolnego trójkąta ABC

P – pole trójkąta ABC

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

Teza: $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



Dowód:

Z twierdzenia 2. ze str. 348 wiemy, że

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma,$$

gdzie γ jest kątem trójkąta ABC zawartym między bokami mającymi długość a, b.
Wyznaczymy $\sin\gamma$ w zależności od długości boków trójkąta: a, b, c.
Z „jedynki trygonometrycznej" otrzymujemy zależność:

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}\ \vee\ \sin\gamma=-\sqrt{1-\cos^2\gamma}$$

Ponieważ $\gamma\in(0°, 180°)$, zatem $\sin\gamma>0$, a więc

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\sqrt{(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)}$$

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy zależność:

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \text{ zatem}$$

$$1-\cos\gamma=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}=\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń, a następnie wzór na różnicę kwadratów.
Podobnie otrzymujemy:

$$1+\cos\gamma=\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}$$

Mamy zatem:

$$\sin\gamma=\sqrt{\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}\cdot\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}}$$

Zauważmy teraz, że zachodzą następujące równości:

$c-a+b=a+b+c-2a=2p-2a$

$a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b$

$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c$, stąd

$$\sin\gamma=\frac{1}{2ab}\sqrt{(2p-2a)(2p-2b)2p(2p-2c)}=\frac{4}{2ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$P=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, zatem}$$

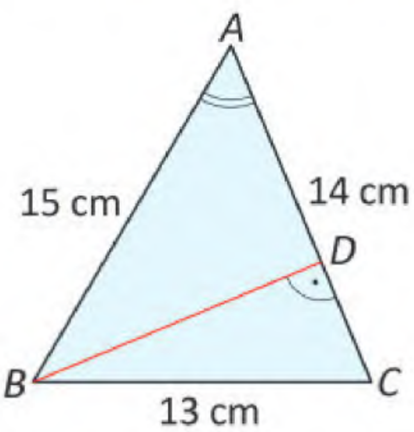
$$P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{,}$$ co kończy dowód twierdzenia.

Przykład 3.

W trójkącie ABC mamy dane: $|AB|=15$ cm, $|BC|=13$ cm, $|AC|=14$ cm. Obliczymy:

a) pole trójkąta ABC,

b) wysokość BD opuszczoną na bok AC.



Ad a) Obliczymy pole trójkąta ABC, korzystając ze wzoru Herona:

$$P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, gdzie } p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$p=\frac{13+14+15}{2}=21$$

Obliczamy pole trójkąta:

$$P=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{7^2\cdot 3^2\cdot 2^4}=7\cdot 3\cdot 4=84$$

Pole trójkąta ABC jest równe 84 cm^2.

Ad b) Obliczamy wysokość BD, wykorzystując wcześniej obliczone pole:

$$P=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD| \qquad 84=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot|BD| \qquad |BD|=12$$

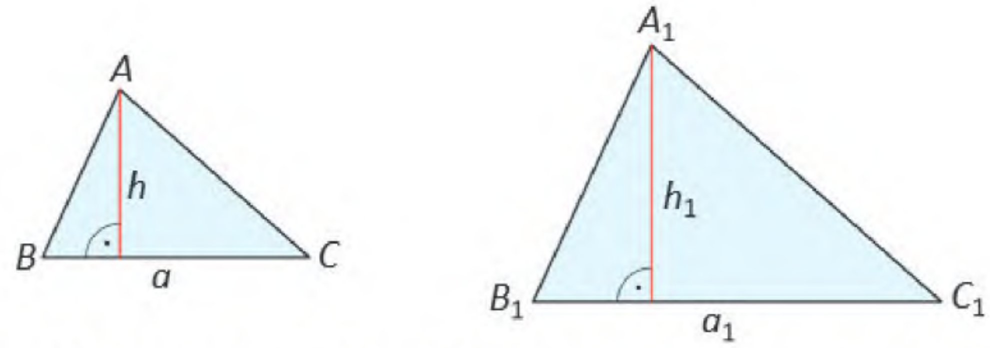
Sprawdź, czy rozumiesz.
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Niech L, P, r oznaczają odpowiednio obwód trójkąta, pole trójkąta i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz:
   a) P, jeśli $L=30$ cm, $r=1{,}6$ cm,
   b) L, jeśli $P=30$ cm^2, $r=1{,}4$ cm,
   c) r, jeśli $P=60$ cm^2, $L=50$ cm.

2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 10{,}5$ cm, $|BC| = 5$ cm i $\sin(\sphericalangle ABC) = 0{,}8$. Oblicz:
   a) pole trójkąta ABC,
   b) długość boku AC,
   c) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
3. Boki trójkąta mają długość: 21 cm, 20 cm, 13 cm. Oblicz:
   a) pole trójkąta,
   b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
   c) wysokości w tym trójkącie.
4. Boki trójkąta mają długość 25 cm, 39 cm, 56 cm. Oblicz:
   a) pole trójkąta,
   b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
   c) sinus najmniejszego kąta.
5. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 6 cm, a promień okręgu wpisanego w trójkąt jest równy 1,5 cm. Wiedząc, że pole tego trójkąta wynosi 12 cm^2, oblicz:
   a) długość ramion tego trójkąta,
   b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
   c) sinus kąta między ramionami trójkąta.
6. Bok AB trójkąta ABC ma długość 20 cm, a środkowa CD ma długość 6 cm. Wiedząc, że cosinus kąta ADC jest równy $\frac{1}{8}$, oblicz:
   a) pole trójkąta ABC,
   b) promień okręgu wpisanego w trójkąt ADC,
   c) promień okręgu opisanego na trójkącie DBC.
7. Dane są długości boków trójkąta ABC: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 14$ cm, $|AC| = 16$ cm. Oblicz:
   a) pole trójkąta ABC,
   b) miarę kąta w trójkącie przy wierzchołku A ,
   c) długość odcinka AD dwusiecznej kąta BAC.
8. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 8$ cm, $|\sphericalangle BCA| = 120^\circ$. Wiedząc, że odcinek CD dwusiecznej ma długość 5 cm, oblicz:
   a) długość boku BC,
   b) pola trójkątów ADC i DBC,
   c) stosunek długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ADC i DBC.
9. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 17 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt – 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.
10. Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego obwód jest równy 70 cm, a pole wynosi 210 cm^2.

Pola trójkątów podobnych

Rozważmy dwa trójkąty: trójkąt ABC oraz trójkąt $A_1B_1C_1$ – podobny do trójkąta ABC w skali k, $k > 0$.



Z podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC w skali k wynika, że

$$a_1 = k \cdot a \text{ oraz } h_1 = k \cdot h.$$

Obliczmy pola tych trójkątów.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \qquad P_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot a \cdot k \cdot h = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h, \quad \text{stąd}$$

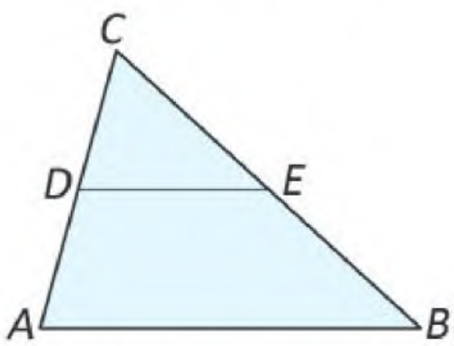
$$\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = k^2$$

Twierdzenie 1.

Stosunek pól figur podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład 1.

W trójkącie ABC poprowadzono odcinek DE, $DE \parallel AB$, który podzielił trójkąt ABC na trójkąt DEC i trapez $ABED$. Stosunek pól trójkąta DEC i trapezu $ABED$ wynosi 1 : 3. Obliczymy $|CE| : |EB|$.



Potrafisz już uzasadnić, że trójkąty DEC i ABC są podobne.
Oznaczmy skalę podobieństwa trójkąta DEC do trójkąta ABC przez k, $k > 0$. Niech $P_{DEC} = x$.

Z twierdzenia 1. wynika, że

$$k^2 = \frac{P_{DEC}}{P_{ABC}} = \frac{x}{x+3x} = \frac{1}{4}, \qquad \text{zatem} \qquad k = \frac{1}{2}.$$

Otrzymujemy:

$$\frac{|CE|}{|CB|} = \frac{1}{2}, \qquad \text{zatem} \qquad \frac{|CE|}{|EB|} = \frac{1}{1}$$

Punkt E jest środkiem odcinka CB, czyli $|CE| : |EB| = 1 : 1$.

Ćwiczenie 1. W trójkącie ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB i dzielącą bok AC na dwa odcinki w stosunku 1 : 2, licząc od wierzchołka C. Oblicz, jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole trójkąta odciętego przez tę prostą.

Przykład 2.

Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC jest o 25% większy od obwodu trójkąta ABC. Obliczymy, o ile procent pole trójkąta ABC jest mniejsze od pola trójkąta $A_1B_1C_1$.

Niech k oznacza skalę podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC, zaś L_1 i L – odpowiednio obwody trójkąta $A_1B_1C_1$ i trójkąta ABC.
Stosunek obwodów trójkątów podobnych jest równy skali podobieństwa, zatem

$$L_1 = k \cdot L$$

Z danych zadania wynika, że $L_1 = 1{,}25 \cdot L$, więc $k = 1{,}25 = \frac{5}{4}$.

Z twierdzenia 1. otrzymujemy

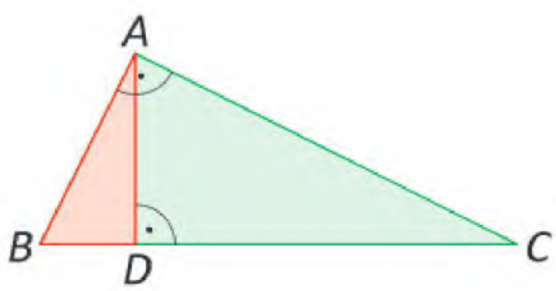
$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{25}{16} \cdot P_{ABC} \quad \text{stąd} \quad P_{ABC} = \frac{16}{25} \cdot P_{A_1B_1C_1}, \quad \text{czyli} \quad P_{ABC} = 0{,}64 \cdot P_{A_1B_1C_1}$$

Pole trójkąta ABC jest mniejsze od pola trójkąta $A_1B_1C_1$ o 36%.

Ćwiczenie 2. Trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są podobne. Pole trójkąta ABC stanowi 36% pola trójkąta $A_1B_1C_1$. Podaj skalę podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC. O ile procent obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest większy od obwodu trójkąta ABC?

Przykład 3.

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość 3 cm i 6 cm. Odcinek AD jest wysokością w tym trójkącie. Obliczymy pola trójkątów BDA i ADC.



Obliczamy pole trójkąta ABC

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

Z cechy (kkk) podobieństwa trójkątów wynika, że trójkąty prostokątne ABD i ADC są podobne, bowiem

$$|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle CDA| = 90^\circ \text{ oraz}$$
$$|\sphericalangle DBA| = 90^\circ - |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAC|$$

Stosunek długości boków CA i AB wyznacza skalę podobieństwa trójkąta ADC do trójkąta BDA. Trójkąt ADC jest podobny do trójkąta ABD w skali k, gdzie

$$k = \frac{6}{3} \quad \text{czyli} \quad k = 2.$$

W takim razie $P_{ADC} = 2^2 \cdot P_{ABD}$, czyli $P_{ADC} = 4 \cdot P_{ABD}$. Mamy

$P_{ABC} = P_{ADC} + P_{ABD} = 5 \cdot P_{ABD}$ $\quad 5 \cdot P_{ABD} = 9$, czyli

$P_{ABD} = 1{,}8$

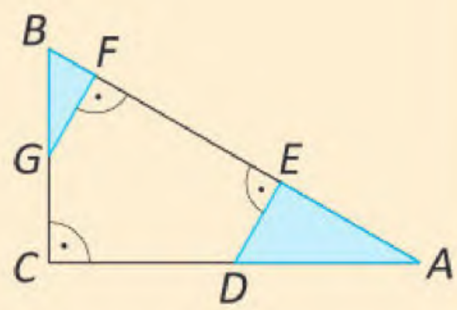
Wówczas

$P_{ADC} = 4 \cdot 1{,}8 = 7{,}2.$

Pole trójkąta *ABD* jest równe 1,8 cm^2, a pole trójkąta *ADC* wynosi 7,2 cm^2.

Sprawdź, czy rozumiesz.
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. W trójkącie *ABC* poprowadzono dwie proste równoległe do boku *AB* i dzielące bok *AC* na trzy równe odcinki. Oblicz stosunek pól figur wyznaczonych w trójkącie przez te proste.
2. W trójkącie *ABC* poprowadzono dwie proste równoległe do boku *AB* i dzielące bok *BC* na trzy odcinki, których długości pozostają w stosunku 1 : 2 : 3, licząc od wierzchołka *C*. Oblicz stosunek pól figur wyznaczonych w trójkącie przez te proste.
3. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta *ABC* jest o 20% mniejszy od obwodu trójkąta *ABC*.
   a) O ile procent pole trójkąta $A_1B_1C_1$ jest mniejsze od pola trójkąta *ABC*?
   b) O ile procent pole trójkąta *ABC* jest większe od pola trójkąta $A_1B_1C_1$?
4. W trójkącie *ABC* wysokość *CD* jest równa 20 cm. Odcinek *EF*, równoległy do boku *AB*, odcina trójkąt *EFC* w taki sposób, że stosunek pola trójkąta *EFC* do pola trapezu *ABFE* jest równy 4 : 5. Oblicz wysokość trapezu.
5. **D** W równoległoboku *ABCD* punkt *M* jest środkiem odcinka *BC*. Przekątna *AC* przecina odcinek *DM* w punkcie *O*. Wykaż, że $P_{AOD} = 4 \cdot P_{OMC}$
6. Oblicz pole trójkąta prostokątnego *ABC* na rysunku obok, wiedząc, że punkty *D* i *G* są środkami odpowiednio boków *CA* i boku *BC*, a pola trójkątów *BGF* i *DAE* wynoszą odpowiednio 1 dm^2 i 2 dm^2.



7. W trójkącie *ABC* dane są: $|\sphericalangle BAC| = 90°$, $|AB| = 12$, $|AC| = 16$, odcinek *AD* jest wysokością. Oblicz stosunek pól trójkątów:
   a) *ABD* i *ABC* b) *ADC* i *ABC* c) *ABD* i *ADC*.
8. W trapezie *ABCD* podstawy *AB* i *DC* mają długość: $|AB| = 10$ cm i $|DC| = 4$ cm. Przekątne *AC* i *BD* przecinają się w punkcie *S*. Oblicz stosunek pól trójkątów *CDS*, *ASD* i *ABS*.
9. W trapezie *ABCD*, $AB \parallel DC$, przekątne *AC* i *BD* przecinają się w punkcie *S*. Wiedząc, że $P_{ASD} = 12$ i $P_{DSC} = 8$, oblicz pole trapezu *ABCD*.
10. **D** W kole poprowadzono cięciwę *AB* i cięciwę *CD*, które przecięły się w punkcie *K*. Wykaż, że jeśli $|AK| = 6$, $|KD| = 2$, to $P_{ACK} = 9 \cdot P_{KBD}$.

Pole koła, pole wycinka koła

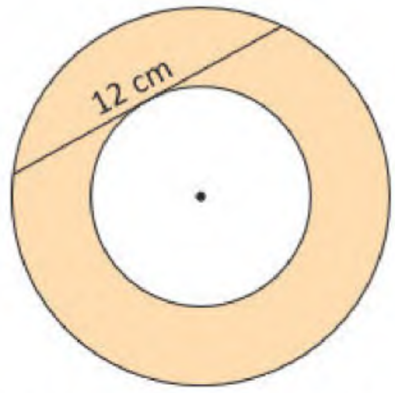
Przypomnijmy: koło o promieniu r i środku O to zbiór punktów, których odległość od punktu O jest nie większa od r. Aby obliczyć pole koła, wystarczy znać jego promień.

Twierdzenie 1.
Pole P koła o promieniu r wyraża się wzorem $P = \pi \cdot r^2$.

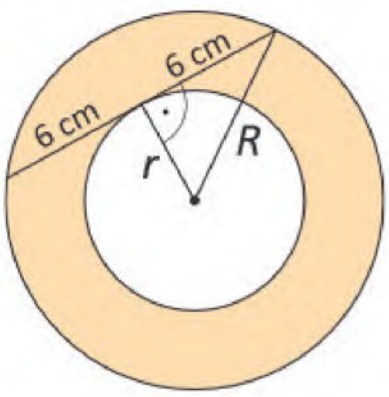
Ćwiczenie 1. Oblicz pole koła o promieniu 10 cm. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 1 cm^2.

Przykład 1.

Na rysunku obok dwa okręgi współśrodkowe wyznaczają pierścień kołowy. Cięciwa większego okręgu jest styczna do mniejszego okręgu i ma długość 12 cm. Obliczymy pole tego pierścienia.



Oznaczmy na rysunku promień mniejszego okręgu literą r, a promień większego okręgu – literą R.



Pole pierścienia wyraża wzór

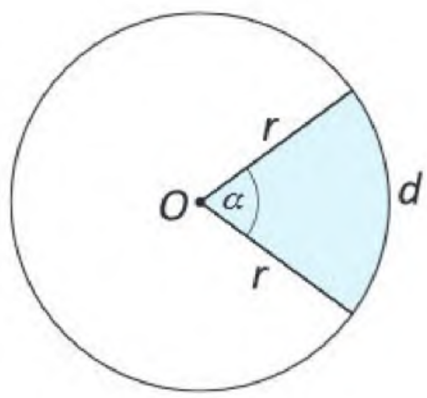
$$P = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2, \qquad \text{czyli}$$
$$P = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)$$

Zauważ, że dwa promienie i połowa odcinka o długości 12 cm utworzyły trójkąt prostokątny. Z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta mamy:

$$R^2 = r^2 + 6^2, \quad \text{czyli} \quad R^2 - r^2 = 36$$
$$P = \pi \cdot 36 \text{ cm}^2$$

Pole pierścienia kołowego jest równe 36π cm^2.

Część wspólną koła i kąta środkowego nazywamy **wycinkiem koła**, odpowiadającym temu kątowi.



Rysunek obok przedstawia wycinek koła o promieniu r, odpowiadający kątowi środkowemu α.

Pole P_w wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego. To znaczy, że:

$$\frac{P_w}{P_k} = \frac{\alpha}{360^\circ}, \quad \text{gdzie } P_k = \pi r^2. \text{ Zatem } P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Podobnie pole P_w jest wprost proporcjonalne do długości łuku wyznaczonego na okręgu koła o promieniu r i zachodzi równość

$$\frac{P_w}{P_k} = \frac{d}{2\pi \cdot r}, \qquad \text{stąd } P_w = \frac{d}{2\pi \cdot r} \cdot \pi r^2 = \frac{d \cdot r}{2}$$

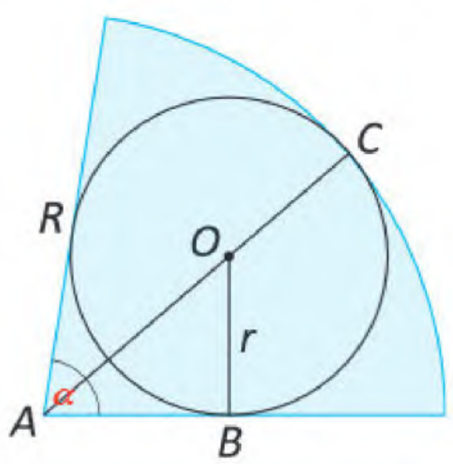
Pole P_w wycinka koła o promieniu r wyraża się wzorem:

- $P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$, gdzie α jest miarą kąta środkowego tego wycinka,
- $P_w = \frac{d \cdot r}{2}$, gdzie d jest długością łuku okręgu wyznaczonym przez ten wycinek

Ćwiczenie 2. Oblicz pole wycinka koła o promieniu 3 cm, jeśli: a) $\alpha = 40^\circ$ b) $d = \pi$ cm. Jaką miarę ma kąt środkowy wycinka w punkcie b)?

Przykład 2.

W wycinek koła o promieniu $\sqrt{2} + 1$ wpisano okrąg, którego promień jest równy 1. Obliczymy pole danego wycinka.



Wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku obok. Promień AC zawiera się w dwusiecznej kąta α i przechodzi przez punkt O, będący środkiem okręgu.

$$|OC| = |OB| = r$$
$$|AC| = R$$

Wyznaczamy długość odcinka AO:

$$|AO| = R - r, \qquad \text{czyli} \qquad |AO| = \left(\sqrt{2}+1\right) - 1 = \sqrt{2}$$

Trójkąt ABO jest prostokątny. Zatem:

$$\sin|\sphericalangle BAO| = \frac{|OB|}{|AO|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad |\sphericalangle BAO| = 45^\circ, \qquad \text{stąd}$$

$$\alpha = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

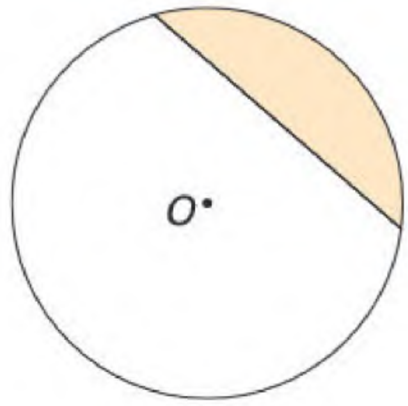
Wycinek koła to czwarta część koła o promieniu $\sqrt{2} + 1$. Obliczamy jego pole:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

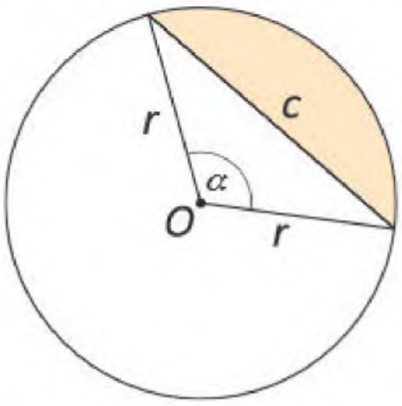
Pole wycinka koła jest równe $\frac{\pi}{4} \cdot \left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

Przykład 3.

Dowolna cięciwa koła dzieli to koło na dwa odcinki kołowe. Obliczymy pole odcinka kołowego zaznaczonego kolorem na rysunku obok, jeśli promień koła jest równy 10 cm, a cięciwa ma długość $10\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm.



Wprowadźmy oznaczenia:



r – promień koła, $r = 10$

c – długość danej cięciwy, $c = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}$

α – kąt środkowy, wyznaczony przez promienie poprowadzone do końców cięciwy

Wyznaczamy kąt α, stosując twierdzenie cosinusów:

$$c^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos\alpha$$

$$100 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right) = 200 - 200 \cdot \cos\alpha$$

$$2 + \sqrt{3} = 2 - 2 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad \alpha \in \left(0^\circ, 180^\circ\right)$$

$$\alpha = 150^\circ$$

Obliczamy pole P_Δ trójkąta wyznaczonego przez cięciwę i promienie:

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 150^\circ = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$$

Obliczamy pole P_w wycinka wyznaczonego przez kąt α.

$$P_w = \frac{150}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{5 \cdot 100\pi}{12} = \frac{125\pi}{3}$$

Na koniec wyznaczamy pole P odcinka kołowego:

$$P = P_w - P_\Delta$$

$$P = \frac{125\pi}{3} - 25 = \frac{1}{3} \cdot \left(125\pi - 75\right)$$

Pole odcinka kołowego jest równe $\frac{25}{3} \cdot (5\pi - 3)$ cm^2.

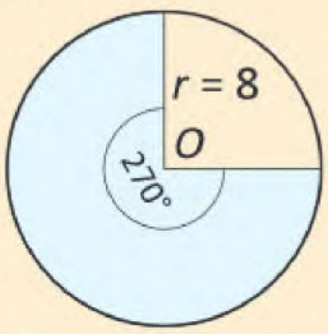
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dwa okręgi o promieniach R i r, gdzie $R > r$, wyznaczają pierścień kołowy, którego pole jest równe 72π. Wyznacz te promienie, wiedząc, że ich różnica wynosi 4.
2. Pole pierścienia kołowego jest równe 100π cm^2. Oblicz długość cięciwy większego okręgu, która jest styczna do mniejszego okręgu.
3. Wyznacz pole koła wpisanego w trójkąt równoboczny o boku mającym długość a oraz pole koła opisanego na tym trójkącie – w zależności od a. Następnie oblicz a, wiedząc, że pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez okręgi tych kół jest równe 81π cm^2.

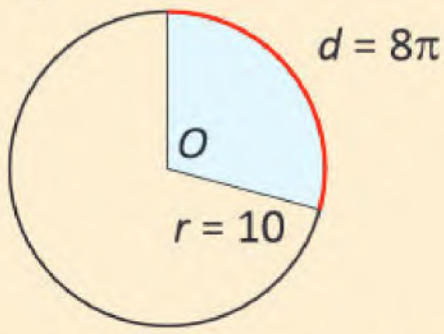
D 4. Wykaż, że stosunek pola koła wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny do pola koła opisanego na tym trójkącie jest równy $3 - 2\sqrt{2}$.

5. Oblicz pole wycinka koła, korzystając z danych na rysunku poniżej.

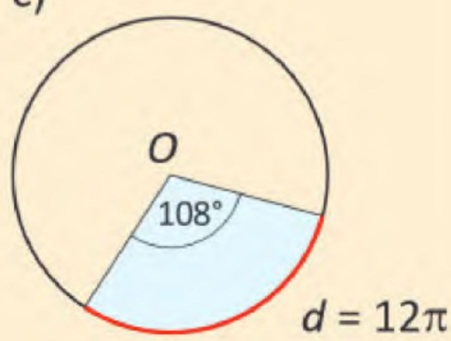
a)



b)

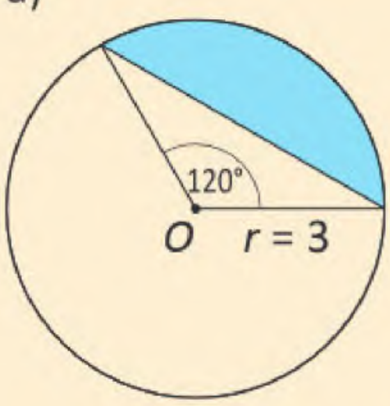


c)

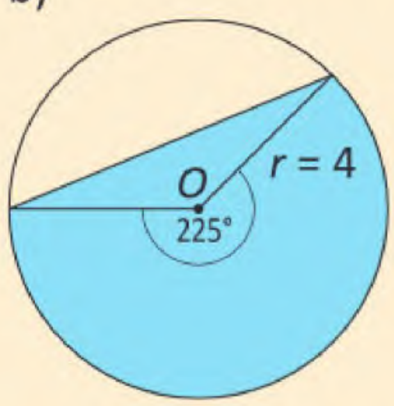


6. Oblicz pole odcinka koła, korzystając z danych na rysunku poniżej.

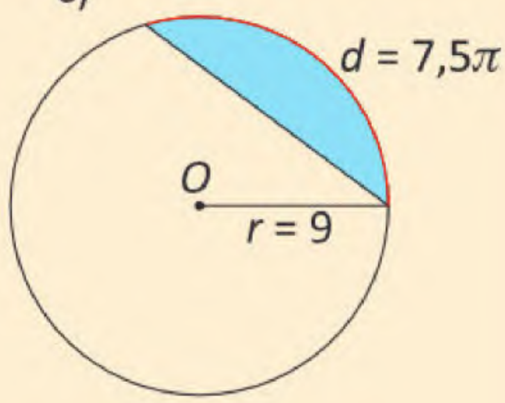
a)



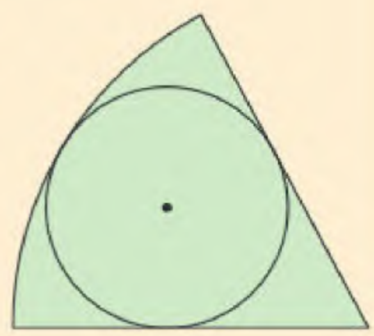
b)



c)



7. W wycinek koła o promieniu 9 cm wpisano okrąg, jak na rysunku obok. Wiedząc, że promień tego okręgu jest równy 3 cm, oblicz pole wycinka koła.

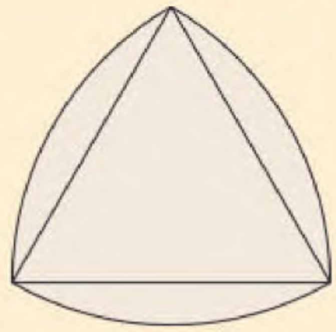


8. Pole wycinka koła jest równe $\left(12+8\sqrt{2}\right)\pi$, a kąt środkowy tego wycinka jest prosty. Wyznacz promień największego koła, jakie można wyciąć z tego wycinka.

9. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Zakreślono dwa koła o promieniu 2 i środkach w punktach A i C. Wyznacz pole figury będącej częścią wspólną tych kół.

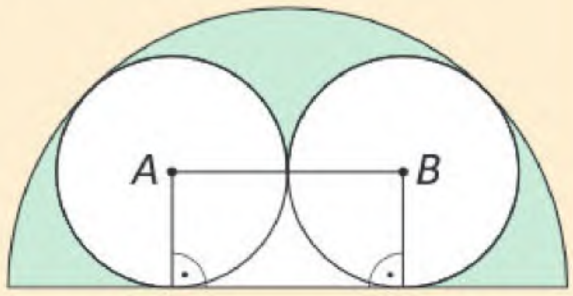
10. Trójkąt na rysunku obok jest prostokątny o kątach ostrych 30° i 60°. Najkrótszy jego bok ma długość 2 i jest średnicą zakreślonego koła. Oblicz pole i obwód zamalowanej na niebiesko figury.

D 11. Trójkąt równoboczny ma bok długości a. Zakreślono trzy koła o promieniach a i środkach w wierzchołkach tego trójkąta. Częścią wspólną tych trzech kół jest figura przedstawiona na rysunku obok. Wykaż, że pole tej figury jest równe $\frac{a^2\left(\pi-\sqrt{3}\right)}{2}$, a jej obwód wynosi $\pi \cdot a$.

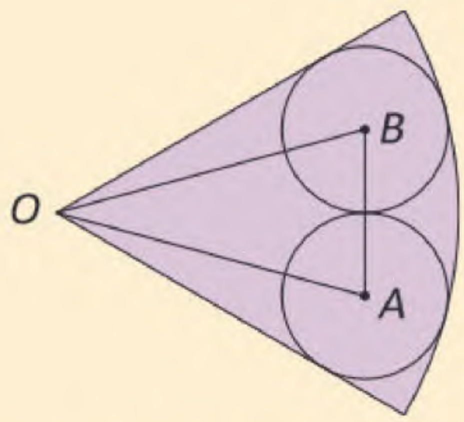


12. W kole o promieniu 5 cm poprowadzono cięciwę o długości $\sqrt{75}$ cm, która podzieliła to koło na dwa odcinki kołowe. Oblicz pole większego z nich.

13. W półkole wpisano dwa przystające okręgi o środkach A i B, jak na rysunku obok. Pole prostokąta wyznaczonego przez odcinek AB i promienie tych okręgów prostopadłe do średnicy półkola jest równe 8. Oblicz pole zamalowanej na zielono figury.



14. W wycinek koła o środku O i kącie środkowym mniejszym od 180° wpisano dwa styczne do siebie, przystające okręgi, jak na rysunku obok. Odległość środków A i B tych okręgów od punktu O jest równa 6 cm. Wiedząc, że pole trójkąta OAB jest równe 9 cm, oblicz pole wycinka koła.



15. W koło wpisano trójkąt, którego dwa boki mają długość 8 i 5. Kąt wpisany, zawarty między tymi bokami jest równy 60°. Oblicz pole figury będącej częścią wspólną tego kąta i koła.

16. Oblicz pole koła:
   a) wpisanego w trójkąt o bokach mających długość: 6 cm, 8 cm, 10 cm,
   b) wpisanego w trójkąt o obwodzie 21 cm i polu równym 63 cm^2.

17. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie:
   a) równoramiennym, którego dwa boki mają długość 4 cm, a jeden z kątów jest równy 120°,
   b) którego boki mają długość: 10 cm, 17 cm, 21 cm.

Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń

W temacie tym udowodnimy m. in. twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie Talesa, posługując się pojęciem pola.

Przykład 1.

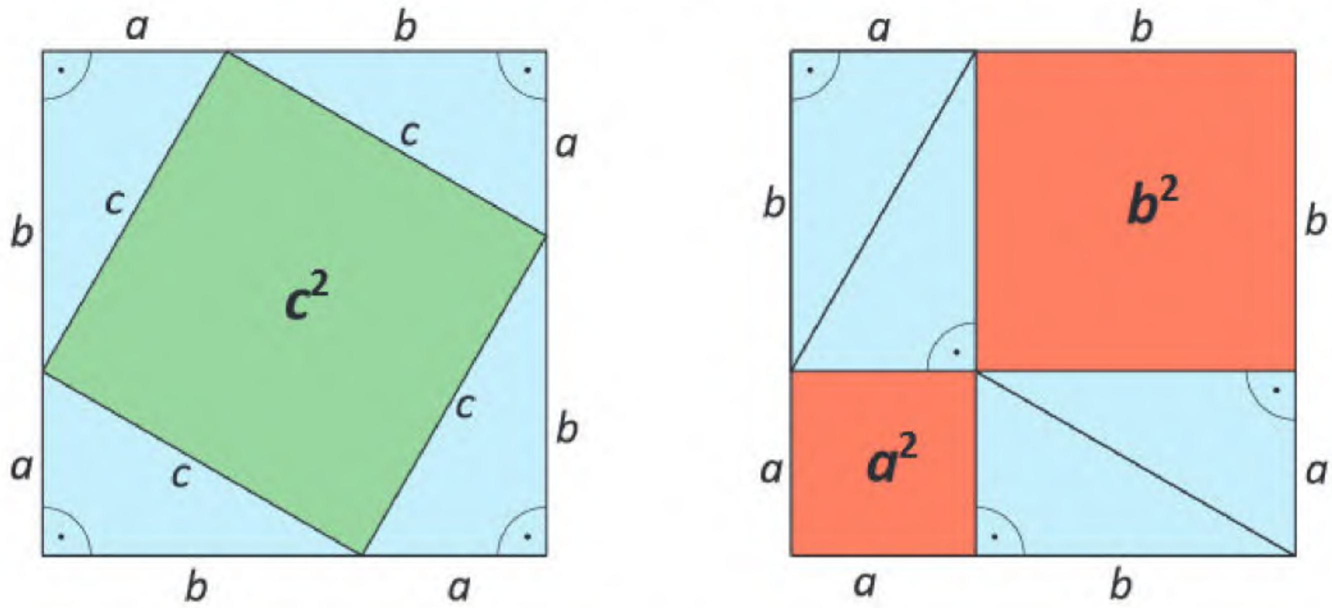
Udowodnimy twierdzenie Pitagorasa: *Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.*

Założenie: Dany jest trójkąt prostokątny ABC
a, b – długości przyprostokątnych trójkąta ABC
c – długość przeciwprostokątnej trójkąta ABC

Teza: $a^2 + b^2 = c^2$

Dowód (1) – przypisywany Pitagorasowi

Z kwadratu o boku mającym długość $a + b$ „odcinamy" cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c. Zostaje kwadrat zielony o boku c.



Z drugiego kwadratu o boku mającym długość $a + b$ również „odcinamy" cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c. W tym wypadku zostają dwa kwadraty czerwone o bokach odpowiednio a i b.

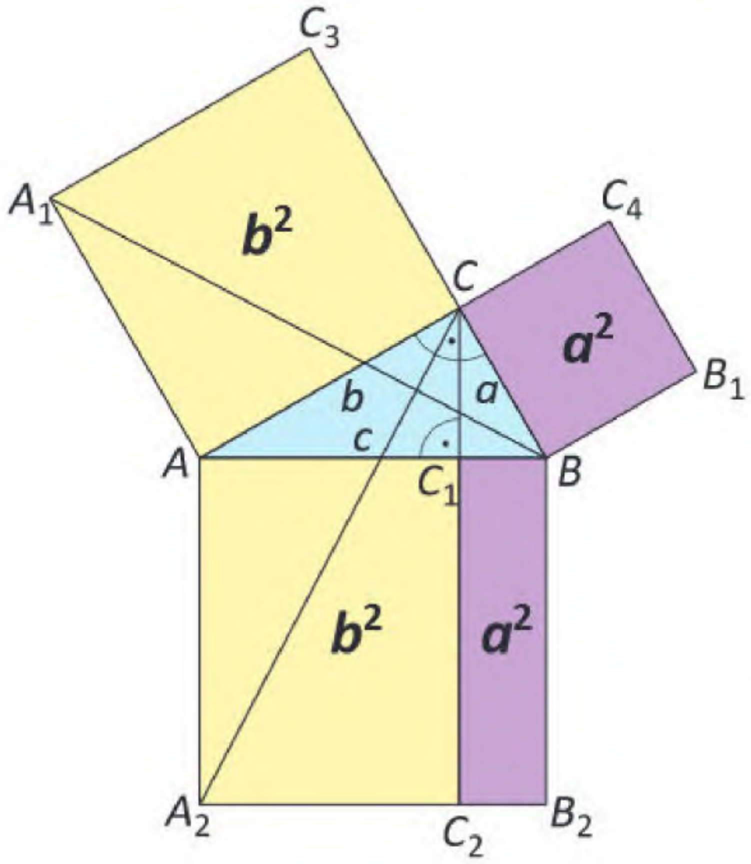
Ponieważ dowolne dwa trójkąty prostokątne niebieskie są przystające, więc suma pól kwadratów czerwonych jest równa polu kwadratu zielonego, czyli

$a^2 + b^2 = c^2$, co kończy dowód.

Dowód (2) – Euklidesa

Aby udowodnić twierdzenie, wystarczy pokazać, że suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Przedłużamy wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka (C) kąta prostego. Dzieli ona kwadrat (AA_2B_2B) zbudowany na przeciwprostokątnej trójkąta ABC na dwa prostokąty ($AA_2C_2C_1$ i $C_1C_2B_2B$). Wykażemy, że pole kwadratu żółtego (ACC_3A_1) jest równe polu prostokąta żółtego ($AA_2C_2C_1$).



Rozważmy dwa trójkąty ABA_1 i AA_2C. Mamy

$$|AA_1| = |AC| = b$$
$$|AB| = |AA_2| = c$$
$$|\sphericalangle BAA_1| = |\sphericalangle A_2AC| = 90^\circ + |\sphericalangle BAC|$$

Zatem na mocy II cechy przystawania trójkątów (bkb)

$$\Delta\, ABA_1 \equiv \Delta\, AA_2C$$

W szczególności trójkąty te mają równe pola (twierdzenie 1. punkt 2. ze str. 344), czyli

(1) $P_{ABA_1} = P_{AA_2C}$

Zauważmy teraz, że pole kwadratu żółtego (ACC_3A_1) jest dwa razy większe od pola trójkąta ABA_1:

(2) $P_{ACC_3A_1} = 2 \cdot P_{ABA_1} = b^2$

Wynika to stąd, że podstawą (AA_1) trójkąta jest bok kwadratu, punkty B, C, C_3 są współliniowe (z założenia kąt C trójkąta ABC jest prosty) i prosta BC_3 jest równoległa do prostej AA_1. Zatem wysokość trójkąta ABA_1 poprowadzona z wierzchołka B jest równa długości boku (AC) kwadratu, więc

$$P_{ABA_1} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b = \frac{1}{2} b^2$$

Rozumując podobnie, można pokazać, że pole żółtego prostokąta ($AA_2C_2C_1$) jest dwa razy większe od pola trójkąta AA_2C, więc

(3) $P_{AA_2C_2C_1} = 2 \cdot P_{AA_2C}$

Mamy zatem, korzystając z równości (3), (1) i dwukrotnie z równości (2):

$$P_{AA_2C_2C_1} = 2 \cdot P_{AA_2C} = 2 \cdot P_{ABA_1} = P_{ACC_3A_1} = b^2$$

Analogicznie można pokazać, że pole fioletowego prostokąta jest równe polu fioletowego kwadratu

$$P_{C_1C_2B_2B} = P_{BB_1C_4C} = a^2$$

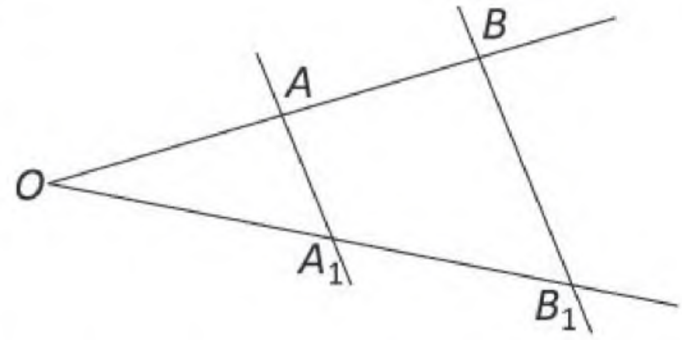
Ostatecznie otrzymujemy:

$$a^2 + b^2 = P_{C_1C_2B_2B} + P_{AA_2C_2C_1} = c^2,$$ co kończy dowód.

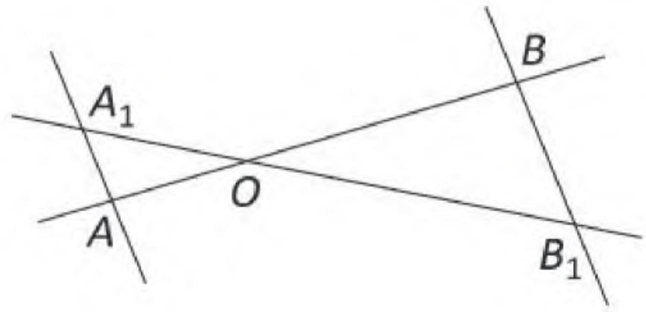
Przykład 2.

Udowodnimy twierdzenie Talesa: *Jeżeli ramiona kąta AOA_1 lub ich przedłużenia przetniemy dwiema prostymi równoległymi AA_1 i BB_1, to stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na ramieniu OA lub na jego przedłużeniu będzie równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyciętych na ramieniu OA_1 lub na jego przedłużeniu.*

a)



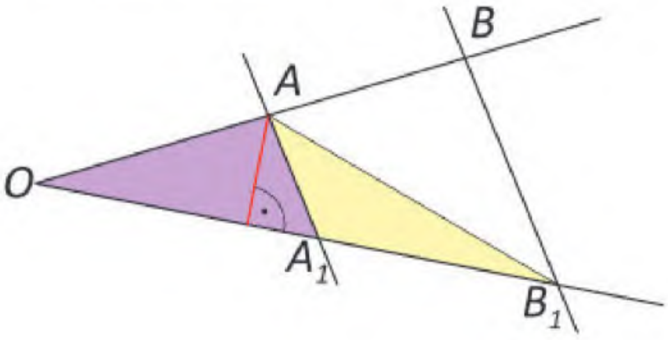
b)



Założenie: $\sphericalangle AOA_1$, proste AA_1 i BB_1 są położone jak na rysunku oraz pr. $AA_1 \parallel$ pr. BB_1

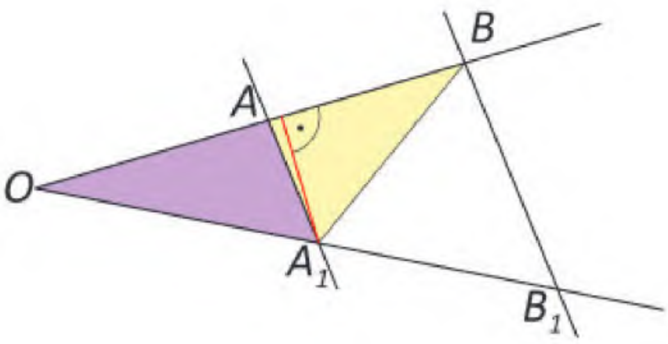
Teza: $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|}$ i $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$

Dowód: Niech kąt AOA_1 i proste AA_1 i BB_1 położone jak na rysunku a).



Rozważmy trójkąty OA_1A i A_1B_1A (zobacz rysunek obok). Te trójkąty mają wspólną wysokość (poprowadzoną z wierzchołka A). Zatem stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości podstaw, do których ta wysokość została poprowadzona.

(1) $\frac{P_{OA_1A}}{P_{A_1B_1A}} = \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|}$



Rozważmy teraz trójkąty OA_1A i AA_1B. Te trójkąty też mają wspólną wysokość (poprowadzoną z wierzchołka A_1). Zatem stosunek pól tych trójkątów też jest równy stosunkowi długości podstaw, do których ta wysokość została poprowadzona.

(2) $\frac{P_{OA_1A}}{P_{AA_1B}} = \frac{|OA|}{|AB|}$

Zauważmy teraz, że trójkąty A_1B_1A i AA_1B, zaznaczone kolorem żółtym, mają równe pola. Mają bowiem wspólną podstawę AA_1, a wysokości poprowadzone na tę podstawę są równe odległości między prostymi AA_1 i BB_1, które z założenia są równoległe,

$$P_{A_1B_1A} = P_{AA_1B}$$

Z tego wynika, że lewe strony równości (1) i (2) są równe, zatem równe też są prawe strony tych równości, czyli

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|}$$

Aby otrzymać drugą równość z tezy, wystarczy przeprowadzić analogiczne rozumowanie dla par trójkątów: OA_1A i OA_1B oraz OA_1A i OB_1A.

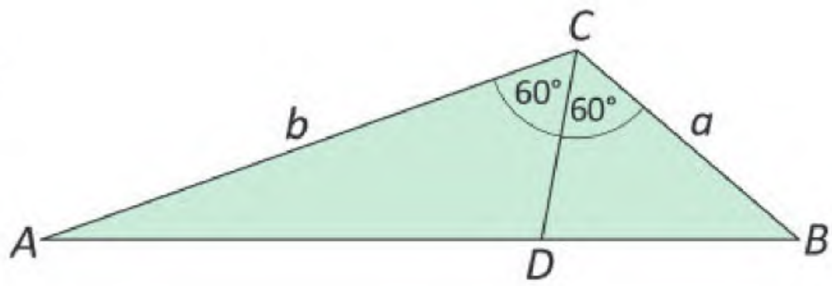
Powyższe rozumowanie przenosi się bez zmian na przypadek b) – wykonaj rysunki odpowiednich par trójkątów mających wspólną wysokość.

Przykład 3.

Wykażemy, że w trójkącie ABC, w którym $|\sphericalangle C| = 120°$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$, długość odcinka CD dwusiecznej jest równa $\frac{a \cdot b}{a+b}$.

Założenie: Dany jest trójkąt ABC
$|\sphericalangle C| = 120°$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$
CD – odcinek dwusiecznej

Teza: $|CD| = \frac{a \cdot b}{a+b}$



Dowód:
Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ADC i CDB.
(1) $P_{ABC} = P_{ADC} + P_{CDB}$
Mamy:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} ab \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot b \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} |CD| b \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz}$$

$$P_{CDB} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot a \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} |CD| a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Uwzględniając równość (1), otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} ab \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} |CD| b \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} |CD| a \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{stąd}$$

$$ab = |CD|(b+a) \quad / : (a+b)$$

$$|CD| = \frac{a \cdot b}{a+b},$$

co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, posługując się wzorem na pole trójkąta: $P = p \cdot r$, gdzie p jest połową obwodu trójkąta, r – promieniem koła wpisanego w trójkąt. Wykorzystaj zależność: $r = \frac{a+b-c}{2}$, gdzie a, b są długościami przyprostokątnych, c – długością przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego.

D 2. Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu leżącego we wnętrzu trójkąta równobocznego od boków tego trójkąta jest równa wysokości tego trójkąta.

D 3. Wykaż, że w trójkącie ABC, w którym $|\sphericalangle C| = 60°$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$, długość odcinka CD dwusiecznej jest równa $\frac{\sqrt{3} \cdot a \cdot b}{a+b}$.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 7.

Test

1. Jeśli boki trójkąta mają długość 1, 1, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, to największy kąt tego trójkąta ma miarę:
   A. 90° B. 120° C. 135° D. 150°

2. Kąt α w trójkącie ma miarę 135° i jest położony naprzeciw boku o długości a. Jeżeli promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\sqrt{2}$, to:
   A. $a=1$ B. $a=\sqrt{2}$ C. $a=2$ D. $a=2\sqrt{2}$

3. W trójkącie naprzeciw boków mających długość a, b są położone kąty odpowiednio α i β oraz $a=2$, $b=2\sqrt{3}$, $\alpha=30^\circ$. Jeśli bok długości b jest najdłuższy w tym trójkącie, to:
   A. $\beta=60^\circ$ B. $\beta=90^\circ$ C. $\beta=120^\circ$ D. $\beta=150^\circ$

4. Kąt zawarty między bokami trójkąta mającymi długość 3 cm i 8 cm jest równy 30°. Pole tego trójkąta wynosi:
   A. 6 cm^2 B. 12 cm^2 C. 18 cm^2 D. 24 cm^2

5. W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm, odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej jest równa:
   A. 2,4 cm B. 3,6 cm C. 4,8 cm D. 6 cm

6. Punkt D należy do boku AB trójkąta ABC oraz $|AD|:|DB|=1:2$. Jeśli pole trójkąta ABC jest równe 18 cm^2, to pole trójkąta ADC jest równe:
   A. 4,5 cm^2 B. 6 cm^2 C. 9 cm^2 D. 12 cm^2

7. Jeśli obwód trójkąta jest równy 16 cm, a pole wynosi 16 cm^2, to promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:
   A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

8. W trójkącie poprowadzono odcinek łączący środki dwóch boków, który podzielił trójkąt na dwie figury. Wówczas stosunek pól tych figur jest równy:
   A. 1 : 1 B. 1 : 2 C. 1 : 3 D. 1 : 4

9. Jeśli pole trójkąta jest równe 24, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 5, to iloczyn długości wszystkich boków jest równy:
   A. 120 B. 240 C. 360 D. 480.

10. Pole wycinka koła o kącie środkowym 54° i promieniu 10 cm jest równe:
    A. 15 cm^2 B. 15π cm^2 C. 30 cm^2 D. 30π cm^2

Zadania otwarte

11. W trójkącie naprzeciw boków mających długość a, b, c położone są kąty, odpowiednio α, β, γ. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli:
    a) $\alpha = \beta = 30°$, $c = \sqrt{27}$ b) $\alpha = 45°$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{6}$

12. Dane są dwa kąty trójkąta: $\alpha = 30°$ i $\beta = 45°$. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6 cm, oblicz pole tego trójkąta. Wynik przybliż do 0,1 cm^2.

13. W trójkącie równobocznym ABC punkt D dzieli bok AC w taki sposób, że $|AD| : |DC| = 1 : 2$. Wiedząc, że boki trójkąta mają długość 3 cm, oblicz:
    a) pole trójkąta DBC b) długość boku BD c) sinus kąta DBC

14. Boki trójkąta mają długość: 56 cm, 39 cm, 25 cm. Oblicz:
    a) pole trójkąta b) promień okręgu wpisanego w trójkąt
    c) sinus największego kąta d) promień okręgu opisanego na tym trójkącie

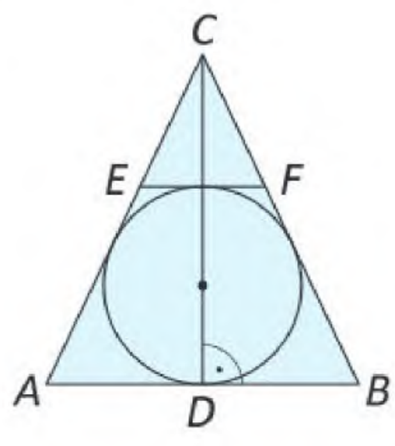
15. Kąt wpisany w koło ma 90°, a jego ramiona to cięciwy o jednakowej długości, równej 6 cm. Oblicz pole figury, będącej częścią wspólną tego kąta i koła.

16. W kole o promieniu 8 poprowadzono cięciwę długości $\sqrt{128 + 64\sqrt{3}}$. Oblicz pola odcinków kołowych wyznaczonych przez tę cięciwę.

D 17. Wykaż, że w dowolnym trójkącie dwusieczna kąta zawartego między bokami długości a i b dzieli go na dwa trójkąty, których pola pozostają w stosunku $a : b$.

18. W prostokącie $ABCD$ punkt E leży na boku AD oraz $|DE| : |EA| = 1 : 2$. Odcinek EC przecina się z przekątną DB w punkcie M. Wiedząc, że pole trójkąta DEM jest równe 2, oblicz:
    a) pole trójkąta MBC b) pole trójkąta DBC.

19. W trójkąt równoramienny ABC na rysunku obok wpisano okrąg o promieniu 3 cm. Odcinek EF styczny do tego okręgu jest równoległy do podstawy AB. Wiedząc, że $P_{ABFE} = 15 \cdot P_{EFC}$, oblicz:
    a) obwód trójkąta EFC
    b) pole trójkąta ABC
    c) wysokość CD trójkąta ABC
    d) długość podstawy AB.



20. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego ABC mają długość: $|AB| = 6{,}4$ cm, $|AC| = 4{,}8$ cm. Symetralna boku BC przecina proste AB i AC w punktach odpowiednio D i E. Oblicz: a) pole trójkąta DBE b) pole koła wpisanego w trójkąt DBE.

21. Dane są długości boków trójkąta ABC: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 2\sqrt{21}$ cm, $|AC| = 8$ cm. Oblicz: a) długość środkowej CD b) pole trójkąta ADC.

22. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, kąt rozwarty ma miarę $150°$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $|\sphericalangle DCB| = 30°$. Oblicz:
    a) stosunek pól trójkątów ADC i DBC b) $|AC| : |CD|$.

23. Rozpatrujemy trójkąty, których suma długości dwóch boków a i b jest równa 4, a kąt między tymi bokami jest równy $120°$. Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta, którego obwód jest najmniejszy.

24. Rozpatrujemy wszystkie wycinki kół, których obwód jest równy 12 cm. Wyznacz promień tego wycinka, którego pole jest największe. Dla wyznaczonego promienia:
    a) oblicz to największe pole,
    b) podaj miarę kąta środkowego wycinka z dokładnością do $1°$.

D 25. Wykaż, że jeśli kąty trójkąta α, β, γ spełniają warunek $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 2 : 3 : 4$, to $\cos\gamma = -\frac{1}{4}$.

26. W trójkącie ABC kąt ACB jest równy $120°$. Dwusieczna tego kąta przecina bok AB w punkcie D. Wiedząc, że $|BC| = \sqrt{7}$ oraz $|AC| = 2\sqrt{7}$, oblicz długość odcinka AD.

D 27. Dwa boki trójkąta ostrokątnego mają długość: a i $2a$. Wykaż, że jeśli jego pole jest równe $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, to ten trójkąt jest równoramienny.

D 28. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest równy $60°$. Wykaż, że jeśli dwusieczna tego kąta dzieli przeciwległy bok w stosunku 1 : 2, to ten trójkąt jest prostokątny.

29. Przekątne czworokąta dzielą go na cztery trójkąty. Wiedząc, że pola trzech trójkątów są odpowiednio równe 20, 30 i 40, oblicz pole czwartego z nich. Ile rozwiązań ma to zadanie?

D 30. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie O. Trójkąty DOC i ABO mają pola odpowiednio równe P_1 i P_2. Wykaż, że:
    a) pola trójkątów AOD i BCO są równe i wynoszą $\sqrt{P_1 \cdot P_2}$.
    b) jeśli $|DC| : |AB| = 2 : 3$, to $9P_1^2 + 4P_2^2 = 13 \cdot P_1P_2$.

31. W kole poprowadzono cięciwy AB i CD, które przecięły się w punkcie E. Pole trójkąta AEC jest o 210 cm^2 większe od pola trójkąta EDB. Wiedząc, że $|AE| = 40$ cm, $|ED| = 16$ cm, $|BE| = 10$ cm, oblicz: długość odcinka CE, pola trójkątów AEC i EDB oraz miarę kąta ostrego między cięciwami AB i CD.

8. Wielomiany

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej

Definicja 1.

Jednomianem stopnia *n*, $n \in N_+$, jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie, które można zapisać w postaci $a \cdot x^n$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od 0.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem jednomianu.**
Jednomianem stopnia zero nazywamy stałą różną od zera.
Jednomianem zerowym nazywamy stałą równą 0. Jednomian zerowy nie ma określonego stopnia.

Przykład 1.

a) Jednomian $3x^2$ jest stopnia drugiego, jego współczynnik jest równy 3.
b) Aby określić stopień i współczynnik jednomianu $3x \cdot (-2)x^3 \cdot x^4$, zapisujemy go w prostszej postaci:
$$3x \cdot (-2)x^3 \cdot x^4 = -6x^8.$$
Zatem ten jednomian jest stopnia ósmego, a jego współczynnik jest równy -6.

Jednomiany różniące się co najwyżej współczynnikami liczbowymi nazywamy **jednomianami podobnymi** lub **wyrazami podobnymi.** Jednomian zerowy uważamy za podobny do każdego jednomianu. Jednomiany podobne można zredukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem podobnym do nich.

Przykład 2.

a) Jednomiany $\sqrt{2}x^4$ i $-3x^4$ są podobne. Ich sumę możemy zastąpić jednomianem podobnym stopnia czwartego:
$$\sqrt{2}x^4 + (-3x^4) = (\sqrt{2} - 3)x^4$$
Współczynnik otrzymanego jednomianu jest równy $\sqrt{2} - 3$.
b) Jednomiany $-17x^5$, x^5 oraz $17x^5$ są podobne.
$$-17x^5 + x^5 = -16x^5 \qquad -17x^5 + 17x^5 = 0$$
Suma jednomianów $-17x^5$ i x^5 jest jednomianem stopnia piątego. Suma jednomianów $-17x^5$ i $17x^5$ jest jednomianem zerowym.

Nie są podobne na przykład jednomiany: $6x^5$, $6x^7$, -2. Suma tych jednomianów jest następująca:

$6x^5 + 6x^7 - 2$.

Ćwiczenie 1. Wśród poniższych jednomianów wskaż jednomiany podobne.

$$-x^2x \qquad \sqrt{3}x^4 \qquad 0x^5 \qquad 8x^2x^2 \qquad -2x^4(-x) \qquad -7xx^3 \qquad 4x^3\sqrt{5}$$

W wyniku dodawania jednomianów otrzymujemy wyrażenie algebraiczne zwane wielomianem.

Definicja 2.

Wielomianem stopnia n, $n \in N_+$, jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie, które można zapisać w postaci

$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $a_n \neq 0$. Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy **współczynnikami wielomianu.** Jednomiany $a_n \cdot x^n$, $a_{n-1} \cdot x^{n-1}$, $a_{n-2} \cdot x^{n-2}$, ..., $a_2 \cdot x^2$, $a_1 \cdot x$, a_0 nazywamy **wyrazami wielomianu,** liczbę a_0 nazywamy wyrazem wolnym.

Wielomiany zmiennej x zwyczajowo oznaczamy: $W(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ itp. Zapiszemy na przykład:

$W(x) = -12x^2 - 8 - 5x^6 + 2x^3$

Powyższy wielomian $W(x)$ można uporządkować

- rosnąco: $W(x) = -8 - 12x^2 + 2x^3 - 5x^6$ – według rosnących wykładników potęg zmiennej
- malejąco: $W(x) = -5x^6 + 2x^3 - 12x^2 - 8$ – według malejących wykładników potęg zmiennej

W dalszej części będziemy porządkować wielomiany malejąco.

Stopień wielomianu $W(x) = -5x^6 + 2x^3 - 12x^2 - 8$ jest równy 6, co zapisujemy krótko: st. $W(x) = 6$.

Wielomianem stopnia zero nazywamy każdą ustaloną liczbę rzeczywistą różną od zera, np. $W(x) = 4$.

Wielomianem zerowym nazywamy liczbę równą zeru. Wielomian zerowy nie ma określonego stopnia. Wielomian zerowy będziemy też zapisywać tak: $W(x) \equiv 0$.

Przykład 3.

Podamy stopień wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = 5x^8 + 2x^3 - 5x^8 + x - 4$ oraz wypiszemy jego współczynniki.

Najpierw redukujemy wyrazy podobne i porządkujemy wielomian $W(x)$ malejąco.

$W(x) = 2x^3 + x - 4$

Teraz podajemy stopień wielomianu i jego współczynniki.

st. $W(x) = 3$; $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = -4$.

Wielomian będący sumą dwóch niezerowych jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**. Oto przykładowe dwumiany:

$3x^4 - x^2$ $\qquad$ $1 - x^6$ $\qquad$ $2x^9 + 5x^5$

W szczególności dwumian stopnia pierwszego $ax + b$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **dwumianem liniowym.**

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**. Trójmianami są np. wyrażenia

$7x^5 - 2x^2 + 1$ $\qquad$ $-9x^8 + 5x^3 - x^2$ $\qquad$ $x^3 + 2x^2 + 3$

Trójmian stopnia drugiego $ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **trójmianem kwadratowym.**

Wartością wielomianu $W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ dla liczby c, $c \in \boldsymbol{R}$, nazywamy liczbę

$a_n \cdot c^n + a_{n-1} \cdot c^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0$ i oznaczamy ją $W(c)$.

Ćwiczenie 2. Oblicz wartość wielomianu $W(x) = 2x^6 - 4x^5 - 5x + 7$ dla liczby 2.

Obliczmy wartość wielomianu $W(x)$,
gdzie $W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ dla liczby 1:

$$W(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$$
$$W(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$$

Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa $W(1)$.

Przykład 4.

Obliczymy sumę współczynników wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = (5x^9 + 6x^5 - 13x)^4$.

Wystarczy obliczyć wartość wielomianu dla liczby 1.

$$W(1) = (5 \cdot 1^9 + 6 \cdot 1^5 - 13 \cdot 1)^4 = (-2)^4 = 16$$

Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa 16.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Określ stopień jednomianu $P(x)$, jeśli:
   a) $P(x) = -2(x^2)^3$ $\qquad$ b) $P(x) = x^5 \cdot (x^4)^2$ $\qquad$ c) $P(x) = 9(x^3 \cdot x^5)^2 \cdot (x^4)^3$.
2. Wykonaj redukcję jednomianów podobnych:
   a) $3x^6 + (-4)x^6$ $\qquad$ b) $\pi \cdot x^3 + x^3$ $\qquad$ c) $(1-\sqrt{2})x^7 + (1+\sqrt{2})x^7$
   d) $6x^5 - (-x^5)$ $\qquad$ e) $2^7 \cdot x^4 - 2^6 \cdot x^4$ $\qquad$ f) $\sqrt{8} \cdot x^8 - x^8 \cdot \sqrt{2}$

3. Wielomian $W(x)$ uporządkuj rosnąco. Następnie podaj stopień tego wielomianu i wypisz jego współczynniki.
   a) $W(x) = 5x^6 - 2x^2 + 3x - 6x^2 + 7 - 4x^3$
   b) $W(x) = 9x - 12x^3 + 6x^2 - 9x - 5x^2 + 6x^7 - 1$
   c) $W(x) = 14x^3 - 6 + 5x^2 - 6x + 12x^3 - 5x^2$

4. Wielomian $F(x)$ uporządkuj malejąco. Następnie podaj stopień tego wielomianu i wypisz jego współczynniki.
   a) $F(x) = 3x^8 - 5 + 4x^3 - 3x^8 + 5 + x^2$
   b) $F(x) = 12 - 5x + 9x^2 - 2 + 5x - 9x^2$
   c) $F(x) = 9x^5 - 6x^2 + 5x^5 - 3x^2 + 9x^2 - x^5 + 4$

5. Podaj przykład:
   a) dwumianu piątego stopnia zmiennej x, uporządkowanego rosnąco
   b) trójmianu czwartego stopnia, uporządkowanego malejąco.

6. Oblicz wartość wielomianu $W(x) = -x^4 - 3x^3 + 5x - 6$ dla liczb: -3, 1, $\sqrt{2}$.

7. Oblicz sumę wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 5x^4 - 3{,}5x^3 + 2{,}7x^2 - 9$
   b) $W(x) = \frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{20}x^2 - 1\frac{1}{4}$
   c) $W(x) = 2(x^{12} - 2)^{10}$
   d) $W(x) = (-3x^5 + 2x^7)^3$.

8. Wyznacz współczynnik a wielomianu $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + ax^2 + 5$, jeśli $W(-2) = -71$.

9. Jeden ze współczynników wielomianu $W(x) = ax^5 + bx^3 + cx^2$ wyznaczony jest przez warunek $W(1) + W(-1) = 12$. Podaj wartość tego współczynnika.

10. Wyznacz a i b, jeśli:
    a) $W(x) = 4x^3 + ax^2 + 3x + b$ oraz $W(-1) = -8$ i $W(2) = 22$
    b) $W(x) = a(a-3)x^4 + bx^3$, $W(-2) = 32$ oraz suma współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa 8.

D 11. Dany jest wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Wykaż, że jeśli $W(-x) = W(x)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x, to $a = c = 0$.

D 12. Wszystkie współczynniki wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ są liczbami całkowitymi różnymi od zera. Wykaż, że jeśli liczby $W(0)$ i $W(1)$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to suma $a + b + c$ jest liczbą parzystą.

D 13. Wielomian trzeciego stopnia $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ przyjmuje dla liczby 2 wartość 42 oraz dla liczby -1 wartość -7. Wykaż, że co najmniej jeden z jego współczynników nie jest liczbą całkowitą.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej x można dodawać, odejmować i mnożyć. W wyniku tych działań otrzymujemy wielomian zmiennej rzeczywistej x. Dodawanie i mnożenie wielomianów – podobnie jak dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych – jest łączne i przemienne oraz zachodzi prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Sumą wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$ nazywamy wielomian $Q(x)$, gdzie

$$Q(x) = W(x) + P(x)$$

Aby dodać wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, należy zapisać wszystkie wyrazy pierwszego i drugiego wielomianu w postaci sumy, a następnie przeprowadzić redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 1.

Wyznaczymy wielomian $Q(x)$, który jest sumą wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, gdzie $W(x) = -3x^5 + 4x^4 + 2x - 1$ oraz $P(x) = 2x^4 - 2x + 3$.

$$Q(x) = W(x) + P(x) = (-3x^5 + \mathbf{4x^4} + \mathbf{2x} - \mathbf{1}) + (\mathbf{2x^4} - \mathbf{2x} + \mathbf{3}) =$$
$$= -3x^5 + \mathbf{4x^4} + \mathbf{2x^4} + \mathbf{2x} - \mathbf{2x} - \mathbf{1} + \mathbf{3} = -3x^5 + 6x^4 + 2$$

$Q(x) = -3x^5 + 6x^4 + 2$

Zauważ, że stopień wielomianu $Q(x)$ z przykładu 1. jest taki sam, jak stopień wielomianu $W(x)$.

Ćwiczenie 1. Wyznacz sumę wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeśli:
a) $W(x) = -5x^3 + 3x^2 + 2$, $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4$ b) $W(x) = 2x^6 - 7$, $P(x) = -2x^6 + 7$.
Jaki stopień ma wielomian $W(x) + P(x)$?

Różnicą wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ nazywamy wielomian $Q(x)$, gdzie

$$Q(x) = W(x) - P(x).$$

Przykład 2.

Dane są wielomiany: $W(x)$ i $P(x)$, gdzie

$$W(x) = -2x^5 - x^3 + 3x^2 - 2x,$$
$$P(x) = -2x^5 + 5x^3 - 2x + 6.$$

Wyznaczymy wielomian $Q(x)$, będący różnicą $W(x) - P(x)$.

Różnicę wielomianów $W(x) - P(x)$ sprowadzamy do sumy:

$$Q(x) = W(x) - P(x) = (-2x^5 - x^3 + 3x^2 - 2x) - (-2x^5 + 5x^3 - 2x + 6) =$$
$$= -2x^5 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2x^5 - 5x^3 + 2x - 6$$

Teraz przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych:

$$Q(x) = -2x^5 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2x^5 - 5x^3 + 2x - 6$$
$$Q(x) = -6x^3 + 3x^2 - 6$$

Stopień wielomianu $Q(x)$ jest mniejszy od każdego ze stopni wielomianów $W(x)$ i $P(x)$.

Różnicę $W(x) - P(x)$ można również zapisać w postaci sumy $W(x) + [-P(x)]$.
Odjąć wielomian $P(x)$ od wielomianu $W(x)$ to znaczy dodać do wielomianu $W(x)$ wielomian, którego współczynniki są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu $P(x)$.

Ćwiczenie 2. Podaj przykład dwóch wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, dla których stopień wielomianu $W(x) - P(x)$ jest:

a) taki sam, jak stopień wielomianu $W(x)$,
b) taki sam, jak stopień wielomianu $P(x)$,
c) mniejszy od stopnia wielomianu $W(x)$ i jednocześnie mniejszy od stopnia wielomianu $P(x)$.

Jeśli wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ mają różne stopnie, to suma (różnica) tych wielomianów ma stopień równy większemu ze stopni wielomianów $W(x)$, $P(x)$. Jeśli stopnie wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ są równe, wówczas stopień sumy (różnicy) tych wielomianów jest nie większy niż stopień tych wielomianów lub suma (różnica) jest wielomianem zerowym.

Mnożenie wielomianów

Iloczynem wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ nazywamy wielomian $Q(x)$, gdzie

$$Q(x) = W(x) \cdot P(x).$$

Wykonując mnożenie wielomianów, stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Aby pomnożyć wielomian przez drugi wielomian, należy pomnożyć każdy wyraz jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu, a następnie wykonać redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 3.

Wyznaczymy wielomian $Q(x)$, który jest iloczynem wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^3 - x + 1,\ P(x) = 2x^2 - 3x$ b) $W(x) = 4x^5 - 3x^2 + 5,\ P(x) \equiv 0.$

Ad a) Każdy wyraz trójmianu mnożymy przez każdy wyraz dwumianu:

$Q(x) = W(x) \cdot P(x) = (x^3 - x + 1) \cdot (\mathbf{2x^2 - 3x}) =$

$= x^3 \cdot \mathbf{2x^2} + x^3 \cdot (\mathbf{-3x}) - x \cdot \mathbf{2x^2} - x \cdot (\mathbf{-3x}) + 1 \cdot \mathbf{2x^2} + 1 \cdot (\mathbf{-3x}) =$

$= 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x^2 - 3x = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x$

$Q(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x$. Zauważ, że st.$Q(x)$ = st.$W(x)$ + st.$P(x)$ = 3 + 2 = 5.

Ad b) $Q(x) = W(x) \cdot P(x) = (4x^5 - 3x^2 + 5) \cdot 0 = 4x^5 \cdot 0 - 3x^2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$

$Q(x) \equiv 0$

Wielomian $Q(x)$ jest wielomianem zerowym i nie ma określonego stopnia.

Stopień iloczynu dwóch wielomianów różnych od wielomianu zerowego jest równy sumie stopni tych wielomianów.
W przypadku, gdy przynajmniej jeden z wielomianów jest wielomianem zerowym, iloczyn tych wielomianów jest także wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3. Wiedząc, że $W(x) = 3x^3 - 5x + 7$, $P(x) = 2x^4 + 4x - 8$, wyznacz wielomian $W(x) \cdot P(x)$.

Przykład 4.

Wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 7 - 3(x + 1)^2 \cdot (5x - 4)$, uporządkujemy malejąco.

Należy pamiętać o kolejności działań. Oznaczmy: $Q(x) = (x + 1)^2$, $P(x) = 5x - 4$.
Wówczas $W(x) = 7 - 3 \cdot Q(x) \cdot P(x)$.
Najpierw wykonujemy mnożenie, potem odejmowanie. Mnożenie jest przemienne, więc zaczniemy od iloczynu $Q(x) \cdot P(x)$.

$Q(x) \cdot P(x) = (x + 1)^2 \cdot (5x - 4) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (5x - 4) =$

$= 5x^3 - 4x^2 + 10x^2 - 8x + 5x - 4 =$

$= 5x^3 + 6x^2 - 3x - 4$ stąd

(*) $W(x) = 7 - 3 \cdot (5x^3 + 6x^2 - 3x - 4)$

Teraz wielomian w nawiasie pomnożymy przez 3, a następnie wykonamy odejmowanie.

$W(x) = 7 - (15x^3 + 18x^2 - 9x - 12) = 7 - 15x^3 - 18x^2 + 9x + 12 =$

$= -15x^3 - 18x^2 + 9x + 19$

Można też wielomian w nawiasie (zobacz (*)) pomnożyć przez (-3):

$W(x) = 7 - 15x^3 - 18x^2 + 9x + 12$

Wielomian $W(x)$ po uporządkowaniu przyjmuje postać:

$W(x) = -15x^3 - 18x^2 + 9x + 19$.

Ćwiczenie 4. Uporządkuj malejąco wielomiany: $W(x)$, $F(x)$, $G(x)$ i $H(x)$.

a) $W(x) = 5x - x(x-3)^2 + 2x^3$

b) $F(x) = (3+2x)(3-2x)(4x^2+9)$

c) $G(x) = x - \sqrt{5}(x^4 - x) + \sqrt{3}x^4$

d) $H(x) = -\sqrt{2}(x-5)(\sqrt{2}-x)(x+3)$

Pokażemy jeszcze inny sposób mnożenia wielomianu przez wielomian, przypominający mnożenie liczb sposobem pisemnym. Przeanalizuj dokładnie zamieszczone poniżej mnożenie

$(x^3 - 7x^2 + x + 1) \cdot (-2x^2 + 3)$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & x^3 & -7x^2 + & x & +1 \\
 & \times & & & -2x^2 & +0x & +3 \\
\hline
 & & & 3x^3 & -21x^2 & 3x & 3 \\
 & & 0x^4 & 0x^3 & 0x^2 & 0x & \\
+ & -2x^5 & +14x^4 & -2x^3 & -2x^2 & & \\
\hline
 & -2x^5 & +14x^4 & +x^3 & -23x^2 & +3x & +3
\end{array}
$$

Zauważ, że podczas mnożenia wielomianów zapisujemy jednomiany także z zerowymi współczynnikami. Jednomiany podobne są zawsze zapisywane w tych samych kolumnach.

Ten sposób pisemnego mnożenia wielomianów możemy sobie ułatwić, mnożąc odpowiednio tylko współczynniki wielomianów. Metoda ta nosi nazwę metody kolejnych współczynników i jest wykorzystywana w programach komputerowych.

Pomnożymy jeszcze raz wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = x^3 - 7x^2 + x + 1$ przez wielomian $P(x)$, gdzie $P(x) = -2x^2 + 3$.

Stopień iloczynu $W(x) \cdot P(x)$ jest równy 5. Zapisujemy kolejno kolumny: x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1 i wstawiamy kolejno współczynniki wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ w odpowiednich kolumnach. Następnie wykonujemy mnożenie:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & 1 & \\
 & & & 1 & -7 & 1 & 1 & \longleftarrow \text{współczynniki wielomianu } W(x) \\
\times & & & & -2 & 0 & 3 & \longleftarrow \text{współczynniki wielomianu } P(x) \\
\hline
 & & & 3 & -21 & 3 & 3 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
+ & -2 & 14 & -2 & -2 & & & \\
\hline
 & -2 & 14 & 1 & -23 & 3 & 3 & \longleftarrow \text{współczynniki powstałego wielomianu}
\end{array}
$$

Zatem $W(x) \cdot P(x) = -2x^5 + 14x^4 + x^3 - 23x^2 + 3x + 3$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz wielomian $W(x) + P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = -3x^5 + 4x^3 + 2x - 6$ $\quad P(x) = x^6 + 4x^5 - 4x^3 + 8x + 6$
   b) $W(x) = 0{,}2x^3 - 3x^2 + 0{,}25x + 0{,}75$ $\quad P(x) = 0{,}25 + 1{,}25x + 3x^2 - x^3$
   c) $W(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + 4x - \frac{1}{27}$ $\quad P(x) = -3x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{27}$
   d) $W(x) = 2\sqrt{2} - 4x + 3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x^3$ $\quad P(x) = 3\sqrt{2}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1$.

2. Wyznacz wielomian $W(x) - P(x)$, jeśli:
a) $W(x) = -2x^5 + 4x^3 - 9x + 1$ $P(x) = 6 + 2x - 3x^2 + 8x^3 - x^4$
b) $W(x) = 0{,}75x^6 - 0{,}34x^4 + 0{,}27x^3 - 0{,}12$ $P(x) = 0{,}88 - 0{,}34x^4 - 0{,}25x^6$
c) $W(x) = \frac{1}{5} - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x^2 - 1{,}2x^3 + \frac{7}{8}x^4$ $P(x) = 0{,}875x^4 - 1\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{3}x - 0{,}8$
d) $W(x) = \sqrt{27}x^6 - 5\sqrt{2}x^4 + \sqrt{5}x^3 + \sqrt{5}$ $P(x) = 3 - 2\sqrt{20}x^3 - \sqrt{50}x^4 + 3\sqrt{3}x^6$
3. Dany jest wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x + 5$. Uporządkuj malejąco wielomian $F(x)$, jeśli:
a) $F(x) = -3 \cdot W(x)$ b) $F(x) = (3x^2 - 2)^2 - W(x)$
c) $F(x) = 2 \cdot W(x) - (2x^2 - 1)^2$ d) $F(x) = (x^2 - 3x)^2 + 5 \cdot W(x)$
4. Wykonaj mnożenie:
a) $(3x^5 - 2x^3)(-5x^4 + 8x^2)$ b) $(2x^3 - 4x^2 + 6)(3x^5 - 7x^4)$
c) $(-2x^3 + 8x)(4x^9 - 6x^5 + 2)$ d) $(3x^2 - 2x + 1)(4x^3 + 5x - 7)$
5. Dane są wielomiany: $W(x) = -3x^2 + 2x + 1$, $P(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $F(x) = x^7 + 5x^3$, $G(x) = -4x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 8$. Uporządkuj malejąco wielomian:
a) $W(x) \cdot F(x)$ b) $W(x) \cdot P(x)$ c) $P(x) \cdot G(x)$ d) $P(x) \cdot F(x)$.
6. Dane są wielomiany: $W(x) = x^2 - 2x + 1$, $P(x) = x^3 - 4x$, $F(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 8$, $G(x) = x^6 - 3x + 2$. Uporządkuj malejąco wielomian:
a) $F(x) - W(x) \cdot P(x)$ b) $W(x) \cdot G(x) - 2 \cdot F(x)$
c) $[W(x) - G(x)] \cdot P(x)$ d) $G(x) \cdot [F(x) + W(x)]$
7. Wykonaj działania:
a) $1 - (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)^2$ b) $4x - (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 1)$
c) $(x^4 - x^2 + 1)^2 - 16x^4$ d) $2x^2 - 2(x^2 - 3x - 4)^2$
8. Nie wykonując działań, określ stopień wielomianu $W(x)$, podaj jego wyraz wolny i współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x.
a) $W(x) = (-2x^3 + 4)(3x^2 - 1)^3$ b) $W(x) = (-x^5 + 2)^2(2x^6 - 1)$
c) $W(x) = -3x^7(2x^5 - 1)(x^8 + 3)$ d) $W(x) = (-2x^3 + 1)^3(3 - x^4)^2$
9. Podaj przykład dwóch wielomianów zmiennej rzeczywistej x, stopnia siódmego, których suma jest wielomianem stopnia trzeciego. Jaki stopień ma różnica tych wielomianów?
10. Podaj przykład dwóch wielomianów zmiennej rzeczywistej x różnych stopni, których iloczyn jest wielomianem stopnia szóstego, a jego wyraz wolny jest równy 5. Jaki jest współczynnik a_6 tego iloczynu?
11. Wykonaj mnożenie wielomianów:
a) $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 1)(-3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 3)$
b) $(-4x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2)(2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 4)$
c) $(x^6 + 2x^4 - 3x + 5)(2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - x - 1)$
d) $(-2x^7 + x^6 + 2x^5 - 3x^3 + 2x - 6)(3x^3 - 4x^2 + 2)$

Równość wielomianów

Definicja 1.

Dwa wielomiany tej samej zmiennej x **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są to wielomiany tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x lub są to wielomiany zerowe.

Przykład 1.

Pokażemy, że wielomiany $W(x)$ i $P(x)$, gdzie $W(x)=x^3-\sqrt{8}x^2+2x$ i $P(x)=x\left(x-\sqrt{2}\right)^2$, są równe.

Wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są tej samej zmiennej x. Porządkujemy wielomian $P(x)$:

$$P(x)=x(x^2-2\sqrt{2}x+2)=x^3-2\sqrt{2}x^2+2x$$

Zauważamy, że stopień obydwu wielomianów jest równy 3. Ponadto współczynniki obydwu wielomianów przy x^3 są równe 1, przy x^2 są równe $-\sqrt{8}$, przy x są równe 2, a wyraz wolny ma wartość 0. Tak więc wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są równe.

Przykład 2.

a) Wielomiany $W(x)$ i $P(x)$, gdzie $W(x)=x^2-3x+1$ i $P(x)=x^3-3x+1$ nie są równe, bo mają różne stopnie, st.$W(x)=2$, st.$P(x)=3$, $2\neq 3$.

b) Wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, gdzie $F(x)=x^3+5x^2+2$ i $G(x)=x^3-5x^2+2$ nie są równe, bo nie mają identycznych współczynników przy jednomianach stopnia 2.

Przykład 3.

Sprawdzimy, czy istnieje liczba a, dla której wielomiany $F(x)$ i $W(x)$, gdzie $F(x)=(x-a)(x+3)^2$ oraz $W(x)=x^3+5x^2+3x-8$, są równe.

Najpierw porządkujemy wielomian $F(x)$ malejąco:

$$F(x)=(x-a)\,(x+3)^2=(x-a)(x^2+6x+9)=x^3+6x^2+9x-ax^2-6ax-9a$$

$$F(x)=x^3+(6-a)x^2+(9-6a)x-9a$$

Rozważane wielomiany $F(x)$ oraz $W(x)$ są tego samego stopnia, st.$F(x)=$ st.$W(x)=3$. Współczynniki przy x^3 obu wielomianów są równe 1. Zatem wielomiany te będą równe wtedy, gdy jednocześnie spełnione będą następujące równości:

$$6-a=5 \quad \wedge \quad 9-6a=3 \quad \wedge \quad -9a=-8$$

$$a=1 \quad \wedge \quad a=1 \quad \wedge \quad a=\frac{8}{9}$$

Liczba a nie może być jednocześnie równa 1 i $\frac{8}{9}$.

Nie istnieje taka liczba a, dla której wielomiany $W(x)$ oraz $F(x)$ byłyby równe.

Przykład 4.

Wyznaczymy liczbę b, dla której wielomiany $W(x)$ i $F(x)$, gdzie
$W(x) = 9x^3 - (b-6)x^2 + 2$ oraz $F(x) = 9x^3 + 7x^2 + 3(b+1)x + 2$, są równe.

Wielomiany $W(x)$ oraz $F(x)$ są uporządkowane malejąco, st.$W(x)$ = st.$F(x)$ = 3. Współczynniki przy x^3 w obu wielomianach są równe 9, a wyrazy wolne są takie same i wynoszą 2. Należy wyznaczyć liczbę b w taki sposób, aby współczynniki przy x^2 oraz przy x tych wielomianów też były równe.

$$W(x) = 9x^3 \mathbf{- (b-6)}x^2 + \mathbf{0}x + 2 \qquad F(x) = 9x^3 + \mathbf{7}x^2 + \mathbf{3(b+1)}x + 2$$

Otrzymujemy:

$$-(b-6) = 7 \quad \wedge \quad 3(b+1) = 0$$
$$b = -1 \quad \wedge \quad b = -1$$

Wielomiany $W(x)$ i $F(x)$ są równe wtedy, gdy $b = -1$. Wówczas
$W(x) = F(x) = 9x^3 + 7x^2 + 2$.

Ćwiczenie 1. Sprawdź, czy istnieje liczba rzeczywista b, dla której wielomiany
$x^3 + (b^2 - 1)x - 1$ i $x^3 + (b+1)x + 1 - b$ są równe.

Przykład 5.

Sprawdzimy, czy istnieją takie wartości a i b, dla których wielomian $F(x)$, gdzie
$F(x) = 2x^2 + 2b - (bx + 2a)(x+3)$, jest wielomianem zerowym.

Wykonamy najpierw działania:

$$F(x) = 2x^2 + 2b - (bx+2a)(x+3) = \mathbf{2}x^2 + \mathbf{2b} \mathbf{- b}x^2 \mathbf{- 3b}x \mathbf{- 2a}x \mathbf{- 6a}$$
$$F(x) = \mathbf{(2-b)}x^2 \mathbf{- (3b+2a)}x + \mathbf{2b - 6a}$$

Wielomian $F(x)$ będzie wielomianem zerowym tylko wtedy, gdy wszystkie jego współczynniki będą równe zeru. Wówczas

$$\begin{cases} 2 - b = 0 \\ -(3b + 2a) = 0 \\ 2b - 6a = 0 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ trzech równań z dwiema niewiadomymi. Rozwiązujemy układ dwóch dowolnych równań otrzymanego układu:

$$\begin{cases} 2 - b = 0 \\ 3b + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

Sprawdzamy, czy wyznaczona para liczb spełnia trzecie równanie $2b - 6a = 0$:

$$L = 2 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) = 4 + 18 = 22, \quad P = 0, \quad L \neq P.$$

Nie istnieją wartości a i b, dla których wielomian $F(x)$ byłby wielomianem zerowym.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Sprawdź, czy dane wielomiany $W(x)$ i $F(x)$ są równe.
   a) $W(x) = (2x-1)^2(x+3)$ $\quad F(x) = 4x^3 + 12x^2 + x + 3$
   b) $W(x) = (4x-1)(1+4x) - (x+5)(x+2)^2$ $\quad F(x) = -x^3 + 7x^2 - 24x - 21$
   c) $W(x) = (4x-3)(x^2+1)(4x+3)$ $\quad F(x) = 16x^4 + 7x^2 - 9$
   d) $W(x) = (5x+4)(3x^2-2x+1)x$ $\quad F(x) = 15x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4$.

2. Sprawdź, czy dane wielomiany $W(x)$ i $F(x)$ są równe.
   a) $W(x) = (x+3)^2(x-1)(2x+6)$ $\quad F(x) = 2[x^3(x+8) - 9] + 36x(x-1)$
   b) $W(x) = (x^2+3x)^2 - 4$ $\quad F(x) = (x+2)(x^2+3x-2)(x+1)$
   c) $W(x) = (x+5)(x+1)(x^2-5x+25)$ $\quad F(x) = x^3(x+1) + 25(5x+5)$
   d) $W(x) = (x-2)(2x-3)^2(x^2+2x+4)$ $\quad F(x) = (4x^2+9)(x^3-8) - 12x^4 + 96x$.

3. Sprawdź, czy istnieje liczba a, dla której wielomiany $W(x)$ i $F(x)$ są równe, jeśli:
   a) $W(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 7$ $\quad F(x) = 3x^4 - 2x^3 + ax^2 + 5x + a + 7$
   b) $W(x) = (x^2-1)(x^2-9)$ $\quad F(x) = x^4 + ax^2 + a + 1$
   c) $W(x) = (2x-3)(4x^2+6x+9)$ $\quad F(x) = 8x^3 + a - 25$
   d) $W(x) = (9x^2-6x+1)(3x-1)$ $\quad F(x) = 27x^3 - 3(a+6)x^2 + 3ax - 1$.

4. Sprawdź, czy istnieje liczba a, dla której wielomiany $W(x)$ i $F(x)$ są równe, jeśli:
   a) $W(x) = (4x^3-2)^2 - 8ax^6$ $\quad F(x) = 8x^6 - 16x^3 + 8a$
   b) $W(x) = (x+a)(x+1)^2$ $\quad F(x) = x^3 - 3x - 2$
   c) $W(x) = (2x-a)(x^3+3x^2+3x+1)$ $\quad F(x) = 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x - 4$
   d) $W(x) = (2a-x^2)(x^4+3x^2+a)$ $\quad F(x) = -x^6 - x^4 + 5x^2 + 2$.

5. Sprawdź, czy istnieją liczby a, b, dla których wielomiany $W(x)$ i $F(x)$ są równe, jeśli:
   a) $F(x) = x^4 - (a-5b)x^2 + 8a$ $\quad W(x) = x^4 + (2a-b)x^3 + 18x^2 + 16$
   b) $F(x) = -5x^3 + (2a-9b)x^2 + 9x$ $\quad W(x) = -5x^3 + (a+b)x^2 + (a-3b)x - a$
   c) $F(x) = (2a-5x)(3x^2-x+4) - 2bx^2$ $\quad W(x) = -15x^3 + (b-a)x^2 - 22x + 2b$
   d) $F(x) = (4x-a)(16x^2+4ax+b)$ $\quad W(x) = 64x^3 - a^3$.

6. Wyznacz a i b tak, aby $W(x) \cdot F(x) = H(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = (2x-1)^2$, $F(x) = ax + b$, $H(x) = -4x^3 + 8x^2 - 5x + 1$
   b) $W(x) = (x-2)^2\,(x-2)$, $F(x) = ax + b$, $H(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$
   c) $W(x) = (3x-1)(1+3x)$, $F(x) = ax + b$,
   $H(x) = 18x^3 + (10b - a - 1)x^2 + 2(a-b)x - 3$.

7. Wyznacz a i b tak, aby wielomian $W(x) \cdot F(x) - H(x)$ był wielomianem zerowym, jeśli:
   a) $W(x) = 3 - 2x$, $F(x) = x^2 + ax - b$, $H(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6x + 9$
   b) $W(x) = 4x - 1$, $F(x) = x^2 - ax + b$, $H(x) = 4x^3 + 7x^2 + 6x - 2$
   c) $W(x) = x - 3$, $F(x) = x^3 + ax^2 + b$,
   $H(x) = x^4 + (a - b - 1)x^3 + (5b - a)x^2 + (a+7)x + a - 1$.

Wzory skróconego mnożenia stopnia 3. Wzór na $a^n - b^n$

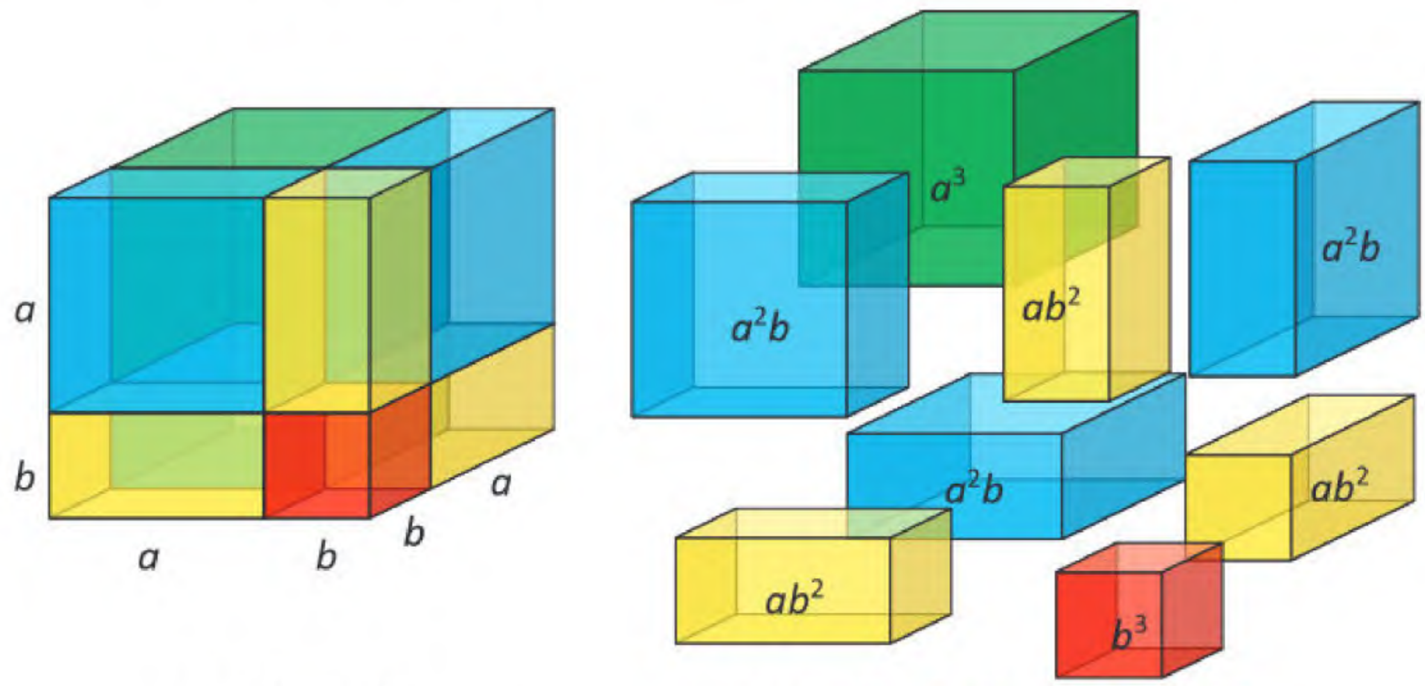
Przedstawmy w postaci sumy wyrażenie $(a+b)^3$. W obliczeniach wykorzystamy wzór na kwadrat sumy a i b.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3 = \\ = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Otrzymaliśmy wzór na sześcian sumy:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to powyższy wzór możemy otrzymać, obliczając na dwa sposoby objętość sześcianu, którego krawędź ma długość $(a+b)$.



$\boldsymbol{V = (a+b)^3}$ $\qquad$ $\boldsymbol{V = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

$$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Wyznaczmy teraz wzór na sześcian różnicy liczb a i b, podstawiając do ostatniego wzoru w miejsce b liczbę $-b$:

$$(a-b)^3 = [a+(-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3, \qquad \text{stąd}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Interpretacja geometryczna tego wzoru jest nieco bardziej skomplikowana i pominiemy ją.

Ćwiczenie 1. Wyprowadź wzór na sześcian różnicy liczb a i b, korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy liczb a i b.

Wykonajmy teraz mnożenie $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

Otrzymaliśmy wzór na sumę sześcianów:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Analogicznie można wyprowadzić wzór na różnicę sześcianów:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory:

1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – wzór na sześcian sumy a i b
2) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – wzór na sześcian różnicy a i b
3) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – wzór na sumę sześcianów a i b
4) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – wzór na różnicę sześcianów a i b

Zastosowanie poznanych wzorów zilustrujemy przykładami.

Przykład 1.

Obliczymy objętość sześcianu o krawędzi $(5+\sqrt{2})$ cm.

Objętość sześcianu o krawędzi a wyraża się wzorem $V = a^3$, stąd

$$V = \left(5+\sqrt{2}\right)^3$$

Stosujemy wzór na sześcian sumy

$$V = 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 5 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3 =$$

$$= 125 + 75\sqrt{2} + 30 + 2\sqrt{2} = 155 + 77\sqrt{2}$$

Objętość sześcianu jest równa $\left(155 + 77\sqrt{2}\right)$ cm^3.

Ćwiczenie 2. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi $\left(3 - \sqrt{2}\right)$ cm.

Przykład 2.

Pokażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(x-2)^3 - (x+2)^3 + 4(3x^2+5)$ jest stała.

Stosujemy wzory na sześcian sumy oraz sześcian różnicy:

$$(x-2)^3 - (x+2)^3 + 4(3x^2+5) =$$
$$= \left(x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3\right) - \left(x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3\right) + 12x^2 + 20 =$$
$$= \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) - \left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8\right) + 12x^2 + 20 =$$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 12x^2 + 20 = 4.$$

Wartość wyrażenia jest równa 4 dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Przykład 3.

Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie:

a) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$ b) $(3x+1)(9x^2-3x+1)$.

Ad a) Zauważamy, że:

$$(2x-5)(4x^2+10x+25)=(2x-5)[(2x)^2+2x\cdot 5+5^2]$$

Możemy zastosować wzór na różnicę sześcianów:

$$(2x-5)(4x^2+10x+25)=(2x)^3-5^3=8x^3-125$$

Ad b) W tym przypadku mamy:

$$(3x+1)(9x^2-3x+1)=(3x+1)[(3x)^2-3x\cdot 1+1^2]$$

Stosujemy wzór na sumę sześcianów:

$$(3x+1)(9x^2-3x+1)=(3x)^3+1^3=27x^3+1$$

Ćwiczenie 3. Korzystając z poznanych wzorów skróconego mnożenia, zapisz w postaci iloczynu wyrażenia:

a) x^3-3x^2+3x-1 b) $8x^3-1$ c) x^3+64 d) $x^3+6x^2+12x+8$

Ćwiczenie 4. Wyznacz liczby b i c, dla których:

a) $(3-x)(x^2+bx+c)=27-x^3$ b) $(2+x)(x^2+bx+c)=8+x^3$

Przykład 4.

Usuniemy niewymierność z mianownika ułamka $\dfrac{2}{3-\sqrt[3]{5}}$.

W mianowniku w różnicy występuje pierwiastek trzeciego stopnia. Zastosujemy wzór

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),\ \text{gdzie}\ a=3,\ b=\sqrt[3]{5}.$$

Wówczas $a^2+ab+b^2=9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}$.

Mnożymy licznik i mianownik ułamka przez liczbę $9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}$ i uzyskujemy w mianowniku wyrażenie, do którego stosujemy wzór na różnicę sześcianów:

$$\frac{2}{3-\sqrt[3]{5}}=\frac{2\left(9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)}{\left(3-\sqrt[3]{5}\right)\left(9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)}=\frac{2\left(9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)}{3^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}=\frac{2\left(9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)}{27-5}=$$

$$=\frac{9+3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{11}$$

Ćwiczenie 5. Czy, mnożąc licznik i mianownik ułamka $\dfrac{2}{3-\sqrt[3]{5}}$ przez liczbę $3+\sqrt[3]{5}$, otrzymasz w mianowniku liczbę wymierną?

Ćwiczenie 6. Wykonując odpowiednie obliczenia, uzasadnij, że:

a) $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

b) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

Twierdzenie 2.
Dla dowolnych wyrażeń a i b oraz $n>1$ i $n\in \mathbf{N}$, prawdziwy jest wzór:
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Dowód tego wzoru przeprowadzimy w dwóch etapach.

<u>I etap</u>

Pokażemy, że
$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a^2+a+1).$$
Oznaczmy
$$S=a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a^2+a+1.$$
Wówczas
$$S-1=a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a^2+a, \text{ czyli}$$
$$S-1=a\cdot(a^{n-2}+a^{n-3}+a^{n-4}+\ldots+a+1)$$
Suma w nawiasie jest równa $S-a^{n-1}$, zatem
$$S-1=a\cdot(S-a^{n-1})$$
$$S-1=a\cdot S-a\cdot a^{n-1} \qquad a\cdot a^{n-1}=a^n$$
$$a^n-1=a\cdot S-S$$
$$a^n-1=(a-1)\cdot S$$
Po podstawieniu w miejsce S sumy $a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a^2+a+1$ otrzymujemy:
$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a^2+a+1)$$

<u>II etap</u>

Podstawmy do udowodnionego wzoru w miejsce a wyrażenie $\dfrac{a}{b}$, gdzie $b\neq 0$.
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n-1=\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}+\left(\frac{a}{b}\right)^{n-3}+\ldots+\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1\right]$$
Wówczas
$$\frac{a^n}{b^n}-1=\frac{a-b}{b}\cdot\left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}+\frac{a^{n-3}}{b^{n-3}}+\ldots+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1\right)$$

Mnożymy obie strony otrzymanej równości przez b^n:

$$a^n - b^n = \frac{a-b}{b} \cdot \left(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n\right), \text{ stąd}$$

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Sprawdź, że jeśli $b = 0$, to dowodzony wzór jest prawdziwy.

Ćwiczenie 7. Powołując się na ostatnie twierdzenie, uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n:

a) liczba $4^n - 1$ jest podzielna przez 3

b) liczba $25^n - 8^n$ jest podzielna przez 17.

Jeśli liczby a i b są różnymi liczbami całkowitymi, to dla dowolnego wykładnika naturalnego n, liczba $a - b$ jest dzielnikiem liczby $a^n - b^n$.

Przykład 5.

Wykażemy, że liczba $25^{20} - 8^{20}$ jest podzielna przez 33.

Zauważmy, że

$$8^{20} = (-8)^{20}$$

Wykładnik potęgi jest liczbą parzystą.

Możemy więc zapisać

$$25^{20} - 8^{20} = 25^{20} - (-8)^{20} =$$

Stosujemy twierdzenie 2.

$$= \left[25 - (-8)\right]\left[25^{19} + 25^{18}(-8) + 25^{17}(-8)^2 + \ldots + 25(-8)^{18} + (-8)^{19}\right] =$$

$$= 33 \cdot \left(25^{19} - 25^{18} \cdot 8 + 25^{17} \cdot 8^2 - \ldots + 25 \cdot 8^{18} - 8^{19}\right)$$

Liczbę $25^{20} - 8^{20}$ przedstawiliśmy w postaci iloczynu liczby 33 i pewnej liczby naturalnej (uzasadnij to dokładnie). To znaczy, że liczba $25^{20} - 8^{20}$ jest podzielna przez 33.

Ćwiczenie 8. Wykaż, że liczba $18^{19} + 11^{19}$ jest podzielna przez 29. Wykorzystaj zależność: $11^{19} = -(-11)^{19}$.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia:

a) $(2 - x)^3$ b) $(2a + 1)^3$ c) $(b - 6)^3$ d) $(5 + y)^3$

e) $(3 - 2y)^3$ f) $(3 + 4a^2)^3$ g) $(-1 - x)^3$ h) $(2x - 0,5)^3$

2. Oblicz sześcian danej liczby.
   a) $\sqrt{3}+4$ b) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}+5$ d) $\sqrt{2}-2$
   e) $3\sqrt{2}-2\sqrt{6}$ f) $3+\sqrt[3]{3}$ g) $-3\sqrt[3]{3}-2$ h) $2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4}$

3. Zamień na iloczyny wyrażenia:
   a) x^3+216 b) $125b^3+8$ c) $t^3+15t^2+75t+125$
   d) $8y^3-36y^2+54y-27$ e) $64a^3-1$ f) $3\sqrt{3}-x^3$
   g) $y^3-3\sqrt{3}y^2+9y-3\sqrt{3}$

4. Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia:
   a) $(a+1)(a^2-a+1)$ b) $(2-x)(4+2x+x^2)$
   c) $(2z+3)(4z^2-6z+9)$ d) $(25+10y+4y^2)(5-2y)$
   e) $(4x^2+1-4x)(2x-1)$ f) $(2x+3)(4x^2+12x+9)$

5. Oblicz:
   a) $\left(3-\sqrt[3]{2}\right)\left(9+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$ b) $\left(4-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{5}+2\right)$
   c) $\left(4\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}+9\right)\left(2\sqrt[3]{2}-3\right)$ d) $\left(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(1-\sqrt[3]{2}\right)$

6. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:
   a) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}+1}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4}$
   e) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}+9}$ f) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-1}$ g) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}+2}$ h) $\dfrac{7}{1-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}}$

7. Rozwiąż równania.
   a) $(x+3)^3=(x+3)(x^2-3x+9)$
   b) $(x-2)^3=(x^2-2x+4)(x+2)$
   c) $2x(x-1)(x+1)+3x(2x-5)=2(x+1)^3+21$
   d) $(x-2)^3-(2+x)^3=4-3(x+2)(1+4x)+13$
   e) $8x(x+2)^2-20x(x+2)=(2x+1)^3+2x^2$
   f) $(2x-3)^3+(2x-1)^3=16(x-1)(x^2+x+1)$

8. Rozwiąż nierówności.
   a) $(2x-1)^3-4x(2x-1)(x+2)>0$
   b) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)^2\geqslant 3x(2x-3)+8$
   c) $\dfrac{(2x-1)^3}{2}-4x(x-1)^2\leqslant 2(x^2+3)$
   d) $\dfrac{(x-2)^3}{2}-\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{3}<\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{2}{3}$

D 9. Wykaż, że liczba $41^{32}-17^{32}$ jest podzielna przez 696.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu

Przykład 1.

Wykażemy, że liczba:

a) $5^{18} - 1$ jest podzielna przez 31

b) $7^{10} - 3^5$ jest podzielna przez 23.

Ad a) Liczbę $5^{18} - 1$ przedstawimy w postaci iloczynu liczb naturalnych. Dwukrotnie korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów:

$$5^{18} - 1 = (5^6)^3 - 1^3 = (5^6 - 1) \cdot [(5^6)^2 + 5^6 \cdot 1 + 1^2] = [(5^2)^3 - 1^3] \cdot (5^{12} + 5^6 + 1) =$$
$$= (5^2 - 1) \cdot [(5^2)^2 + 5^2 \cdot 1 + 1^2] \cdot (5^{12} + 5^6 + 1) = 24 \cdot 651 \cdot (5^{12} + 5^6 + 1) =$$
$$= 24 \cdot \mathbf{31} \cdot 21 \cdot (5^{12} + 5^6 + 1)$$

Liczbę $5^{18} - 1$ można zapisać w postaci $31 \cdot k$, gdzie $k \in \boldsymbol{N}$, a to znaczy, że dana liczba jest podzielna przez 31.

Ad b) Liczbę 7^{10} zapisujemy w postaci $(7^2)^5$. Teraz zastosujemy wzór na różnicę potęg $a^n - b^n$ (zobacz twierdzenie 2. str. 386) w przypadku, gdy $n = 5$.

$$7^{10} - 3^5 = (7^2)^5 - 3^5 = 49^5 - 3^5 =$$
$$= (49 - 3) \cdot (49^4 + 49^3 \cdot 3 + 49^2 \cdot 3^2 + 49 \cdot 3^3 + 3^4) =$$
$$= 46 \cdot (49^4 + 49^3 \cdot 3 + 49^2 \cdot 9 + 49 \cdot 27 + 81) =$$
$$= \mathbf{23} \cdot 2 \cdot (49^4 + 49^3 \cdot 3 + 49^2 \cdot 9 + 49 \cdot 27 + 81)$$

Liczbę $7^{10} - 3^5$ można zapisać w postaci $23 \cdot m$, gdzie $m \in \boldsymbol{N}$, więc jest ona podzielna przez 23.

Przykład 2.

Pokażemy, że jeśli $a - b = 1$ oraz $a \cdot b = 4$, to $a^3 - b^3 = 13$.

Dowód: Przekształcamy wzór na różnicę sześcianów w następujący sposób:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = (a - b) \cdot [(\mathbf{a^2 + b^2}) + ab] =$$
$$= (a - b) \cdot [\mathbf{(a - b)^2 + 2ab} + ab] \qquad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot [(a - b)^2 + 3ab]$$

Z założenia mamy: $a - b = 1$ oraz $a \cdot b = 4$, zatem

$a^3 - b^3 = 1 \cdot [1^2 + 3 \cdot 4] = 13$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} a - b = 1 \\ a \cdot b = 4 \end{cases}$ a następnie oblicz $a^3 - b^3$.

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, to sześcian tej liczby przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

Założenie: $a = 5k + 2$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$

Teza: Istnieje taka liczba całkowita p, że $a^3 = 5p + 3$.

Dowód: Korzystamy ze wzoru na sześcian sumy dwóch wyrażeń.

$$a^3 = (5k+2)^3 = (5k)^3 + 3\cdot(5k)^2\cdot 2 + 3\cdot 5k\cdot 2^2 + 2^3 =$$
$$= 125k^3 + 150k^2 + 60k + 8 = 125k^3 + 150k^2 + 60k + 5 + 3 =$$
$$= 5\cdot\mathbf{(25k^3 + 30k^2 + 12k + 1)} + 3 = 5\mathbf{p} + 3,$$

gdzie $p = 25k^3 + 30k^2 + 12k + 1$

Liczba $p \in \mathbf{Z}$, bo z założenia $k \in \mathbf{Z}$, zatem sześcian liczby a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

Przykład 4.

Wykażemy, że liczba $\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}$ jest równa 4.

Wykorzystamy zależność $3+\sqrt{5}=\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)^3}$ oraz posłużymy się wzorem na sześcian sumy i wzorem na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)^3}\cdot\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}} =$$
$$= \sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)^3\cdot\left(72-32\sqrt{5}\right)} =$$
$$= \sqrt[3]{\left(3^3 + 3\cdot 3^2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot 3\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^3\right)\left(72-32\sqrt{5}\right)} =$$
$$= \sqrt[3]{\left(72+32\sqrt{5}\right)\left(72-32\sqrt{5}\right)} = \sqrt[3]{72^2 - \left(32\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt[3]{5184-5120} = \sqrt[3]{64} = 4,$$

co każdy dowód.

Przykład 5.

Wykażemy, że jeśli reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej n przez 4 jest równa 1, to reszta z dzielenia liczby 2^n przez 6 jest równa 2.

Założenie: $n = 4k + 1$, $k \in \mathbf{N}$

Teza: Istnieje taka liczba naturalna p, że $2^n = 6p + 2$.

Dowód: Wystarczy wykazać, że liczba $2^n - 2$ jest podzielna przez 6.
Liczbę $2^n - 2$, gdzie $n = 4k + 1$ i $k \in \mathbf{N}$, zapiszemy w postaci iloczynu innych wyrażeń.

$$2^n - 2 = 2^{4k+1} - 2 = 2^{4k}\cdot 2 - 2 = 2(2^{4k} - 1) =$$
$$= 2\left[(2^{2k})^2 - 1\right] = 2(2^{2k} - 1)(2^{2k} + 1) = 2(4^k - 1)(4^k + 1)$$

- Z założenia $k \in \mathbf{N}$, więc czynniki $4^k - 1$ i $4^k + 1$ są liczbami naturalnymi. Liczba $2(4^k - 1)(4^k + 1)$ jest podzielna przez 2.
- $4^k - 1 = 4^k - 1^k$, gdzie $k \in \mathbf{N}$. Z twierdzenia 2. str. 386 wynika, że liczba $4^k - 1$ jest podzielna przez $(4-1)$, czyli przez 3.

Zatem istnieje taka liczba m, $m \in \boldsymbol{N}$, że $4^k - 1 = 3m$. Wówczas

$$2^n - 2 = 2 \cdot 3 \cdot m \cdot (4^k + 1)$$

Liczbę $2^n - 2$ możemy zapisać w postaci $6p$, gdzie $p = m(4^k + 1)$, $p \in \boldsymbol{N}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, że liczba $198^3 + 102^3$ jest podzielna przez 300.

D 2. Wykaż, że liczba $7^6 + 8^6$ jest podzielna przez 113.

D 3. Wykaż, że liczba $17^{18} - 16^{18}$ jest podzielna przez 11.

D 4. Wykaż, że liczba $11^{12} - 7^{12}$ jest podzielna
a) przez 4 b) przez 247.

D 5. Wykaż, że liczba $6^{15} - 7^5$ jest podzielna przez 209.

D 6. Wykaż, że liczba $5^{21} - 3^{14}$ jest podzielna przez 29.

D 7. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wykaż, że sześcian liczby a przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

D 8. Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

D 9. Wykaż, że suma sześcianów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 4.

D 10. Wykaż, że jeśli liczby całkowite a, b, c przy dzieleniu przez 4 dają odpowiednio reszty 1, 2 oraz 3, to suma sześcianów tych liczb jest podzielna przez 4.

D 11. Wykaż, że sześcian dowolnej liczby parzystej niepodzielnej przez 4 jest podzielny przez 8.

D 12. Wykaż, że jeśli $x - y = 4$ i $x \cdot y = 2$, to $x^3 - y^3 = 88$.

D 13. Wykaż, że jeśli $x + y = 1$ i $x \cdot y = -2$, to $x^3 + y^3 = 7$.

D 14. Wykaż, że liczba $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ jest liczbą naturalną.

D 15. Wykaż, że liczba $\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)\left(\sqrt[3]{25}-1\right)\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1\right)$ jest liczbą naturalną, podzielną przez 12.

D 16. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{1-6\sqrt[3]{81}+12\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{9}$ jest liczbą całkowitą.

D 17. Wykaż, że jeśli $a + b + c = 0$, to $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

D 18. Reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej k przez 2 jest równa 1. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby 3^k przez 6 jest równa 3.

D 19. Reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej p przez 8 jest równa 2. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby 2^p przez 5 jest równa 4.

Podzielność wielomianów

Definicja 1.

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$ różny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, dla którego $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wówczas wielomian $Q(x)$ nazywamy **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$, zaś wielomian $P(x)$ – **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$.

Jeśli $W(x) \equiv 0$, to każdy niezerowy wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$, przy czym iloraz $Q(x)$ jest wielomianem zerowym.

Przykład 1.

Wielomian $x^2 - 9$ jest podzielny przez wielomian $x + 3$, bowiem

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

W dzieleniu $(x^2 - 9) : (\boldsymbol{x + 3})$ wielomian $\boldsymbol{x + 3}$ jest dzielnikiem, a wielomian $\boldsymbol{x - 3}$ jest ilorazem wielomianu $x^2 - 9$ przez $x + 3$.
Wielomian $x^2 - 9$ jest podzielny także przez wielomian $x - 3$.
W dzieleniu $(x^2 - 9) : (\boldsymbol{x - 3})$ wielomian $\boldsymbol{x - 3}$ jest dzielnikiem, a wielomian $\boldsymbol{x + 3}$ jest ilorazem wielomianu $x^2 - 9$ przez $x - 3$.

UWAGA: Jeśli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, to jest również podzielny przez wielomian $c \cdot P(x)$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą różną od zera.

Zobaczmy to na przykładzie wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = x^2 - 1$.

- $W(x) = (x+1)(x-1)$, więc $W(x)$ jest podzielny przez $x + 1$
- $W(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x - 2)$, więc $W(x)$ jest podzielny przez $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
- $W(x) = (3x+3) \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)$, więc $W(x)$ jest podzielny przez $3x + 3$, itd.

Przykład 2.

Wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 8x^3 + ax^2 - bx - 3$, jest podzielny przez wielomian $2x + 3$, a ilorazem tego dzielenia jest wielomian $4x^2 - 1$. Wyznaczymy liczby a i b.

Zgodnie z definicją 1. mamy

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x), \quad \text{gdzie} \quad P(x) = 2x + 3,\ Q(x) = 4x^2 - 1. \quad \text{Zatem}$$

$$W(x) = (4x^2 - 1)(2x + 3) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$$

Wiemy też, że

$$W(x) = 8x^3 + ax^2 - bx - 3$$

Z równości wielomianów otrzymujemy: $a = 12,\ b = 2$.

Zauważ, że jeśli wielomian niezerowy $W(x)$ zmiennej rzeczywistej x możemy przedstawić w postaci iloczynu $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami, to wielomian $W(x)$ jest podzielny zarówno przez wielomian $P(x)$, jak i przez $Q(x)$.
Ponadto z własności mnożenia wielomianów wiemy, że st. $W(x) = \text{st.}P(x) + \text{st.}Q(x)$.

Jeśli wielomian niezerowy możemy przedstawić w postaci iloczynu kilku wielomianów, to stopień tego wielomianu jest sumą stopni wszystkich czynników tego mnożenia, a wielomian jest podzielny przez każdy z tych czynników.

Przykład 3.

Niech $W(x)$, gdzie $W(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)$. Określimy stopień wielomianu $W(x)$. Następnie podamy przykład wielomianu stopnia drugiego oraz przykład wielomianu stopnia trzeciego – które są dzielnikami wielomianu $W(x)$ i które są uporządkowane malejąco.

Wielomian $W(x)$ jest iloczynem czterech czynników: x, $x-1$, $x+2$, $x-3$, z których każdy jest wielomianem stopnia pierwszego, stąd

$$\text{st. } W(x) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Rozpatrzmy wielomian $P(x)$, gdzie

$$P(x) = x(x-1) = x^2 - x, \quad \text{st.}P(x) = 2.$$

$$W(x) = (x^2 - x) \cdot Q(x), \quad \text{gdzie} \quad Q(x) = (x+2)(x-3).$$

Zatem wielomian $P(x) = x^2 - x$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.
Z kolei $K(x) = x(x-1)(x+2)$ jest iloczynem trzech czynników pierwszego stopnia, więc $\text{st.}K(x) = 3$. Wówczas

$$W(x) = x(x-1)(x+2) \cdot Q_1(x), \text{ gdzie } Q_1(x) = x - 3.$$

Porządkujemy wielomian $K(x)$:

$$K(x) = x\,(x^2 + 2x - x - 2) = x^3 + x^2 - 2x$$

Wielomian $x^3 + x^2 - 2x$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Powyższe rozważania pokazują, że łatwo znaleźć dzielniki wielomianu $W(x)$ w sytuacji, gdy wielomian $W(x)$ jest zapisany w postaci iloczynu wielomianów o niższych stopniach.

Ćwiczenie 1. Wskaż jeszcze inne wielomiany stopnia drugiego i stopnia trzeciego, oraz wielomiany stopnia pierwszego, które są dzielnikami wielomianu $W(x)$ z ostatniego przykładu.

Ćwiczenie 2. Przedstaw trójmian kwadratowy $2x^2 - 5x + 2$ w postaci iloczynowej. Przez jakie wielomiany stopnia pierwszego jest podzielny wielomian
$(2x^2 - 5x + 2)(3x - 1)$?

Ćwiczenie 3. Przedstaw wielomian $3x^3 + 10x^2 + 3x$ w postaci iloczynu trzech dwumianów. Przez jakie trójmiany kwadratowe jest podzielny ten wielomian?

Przykład 4.

Pokażemy, że trójmian kwadratowy $P(x)$, gdzie $P(x) = x^2 - 5x + 6$, jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = (3x^2 - 3x + 4)^2 - (2x^2 + 2x - 2)^2$ oraz wyznaczymy iloraz z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.

Wielomian $W(x)$ chcemy przedstawić w postaci iloczynu innych wielomianów. Wzór wielomianu jest różnicą kwadratów dwóch wyrażeń, zatem

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\begin{aligned} W(x) &= (3x^2 - 3x + 4)^2 - (2x^2 + 2x - 2)^2 = \\ &= [(3x^2 - 3x + 4) - (2x^2 + 2x - 2)] \cdot [(3x^2 - 3x + 4) + (2x^2 + 2x - 2)] = \\ &= (3x^2 - 3x + 4 - 2x^2 - 2x + 2) \cdot (3x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + 2x - 2) = \\ &= (x^2 - 5x + 6) \cdot (5x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

Wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$. Ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $5x^2 - x + 2$.

Przykład 5.

Wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 2x^3 - x^2 - 16x + 15$, jest podzielny przez wielomian $P(x)$, gdzie $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Znajdziemy iloraz z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$.

Wielomian $W(x) = 2x^3 - x^2 - 16x + 15$ możemy również zapisać tak:

$W(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot Q(x)$, gdzie $\text{st.}Q(x) = 1$. Zatem

$Q(x) = ax + b$ i $a \neq 0$.

Otrzymujemy:

$$W(x) = (x^2 + 2x - 3)(ax + b) = ax^3 + (b + 2a)x^2 + (2b - 3a)x - 3b$$

Porównujemy współczynniki przy x^3 oraz wyrazy wolne:

$a = 2$ oraz $-3b = 15$

$b = -5$

Pozostaje jeszcze sprawdzić, czy współczynniki przy x^2 oraz przy x też są równe.

$b + 2a = -5 + 2 \cdot 2 = -1$ oraz $2b - 3a = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 = -16$

Szukanym ilorazem jest wielomian $2x - 5$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Podaj przykład wielomianu stopnia pierwszego, przez który jest podzielny wielomian $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = x^3 - 27$ b) $W(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ c) $W(x) = 625 - x^4$
   d) $W(x) = 8x^3 + 1$ e) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ f) $W(x) = x^5 - 32$
   g) $W(x) = 64x^6 - 1$ h) $W(x) = 3x^2 - 10x + 3$ i) $W(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
2. Wskaż pięć wielomianów pierwszego stopnia, przez które jest podzielny wielomian $(9x^2 - 1)(x^2 + x - 6)(x^3 + 8)$.
3. Podaj wielomian stopnia drugiego w postaci uporządkowanej, przez który jest podzielny dany wielomian $W(x)$.
   a) $W(x) = (x^4 + 1)(x - 2)(x + 4)$ b) $W(x) = 216x^3 - 125$
   c) $W(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ d) $W(x) = 16x^4 - 24x^2 + 9$

4. Dany jest wielomian $W(x) = (2x - 1)(x + 1)(x - 1)$. Wskaż:
   a) trzy wielomiany stopnia pierwszego, które są dzielnikami wielomianu $W(x)$
   b) trzy wielomiany stopnia drugiego, które są dzielnikami wielomianu $W(x)$.
5. Wielomian $Q(x) = 2x - 3$ jest ilorazem z podzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$. Wyznacz wielomian $P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 4x^2 - 12x + 9$ b) $W(x) = 9 - 4x^2$ c) $W(x) = 6x^2 - 5x - 6$.
6. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = -6x^3 + ax^2 - bx + 5$ przez $P(x) = 5 - 2x$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 3x^2 + 1$. Oblicz a i b.
7. Ilorazem z podzielenia wielomianu $W(x) = 6x^3 - (a + b)x^2 + 2(b + 3a)x - 8$ przez wielomian $P(x) = 2x - 1$ jest wielomian $Q(x) = 3x^2 - 2x + 8$. Oblicz a i b.
8. Wielomian $W(x) = 2x^4 + (a - b)x^3 - 3x^2 + (5a - b)x + 3$ podzielono przez wielomian $P(x) = 2x^2 + 5x + 1$ i otrzymano iloraz $Q(x) = x^2 - 2x + 3$. Oblicz a i b.
9. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = (x^3 - 8)(1 - 3x)$ przez wielomian $P(x)$ otrzymano wielomian $Q(x) = -3x^2 + 7x - 2$. Wyznacz wielomian $P(x)$.
10. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = (2 - 5x)^2 \cdot (x - 3)^2$ przez wielomian $P(x)$ otrzymano wielomian $Q(x) = -5x^2 + 17x - 6$. Wyznacz wielomian $P(x)$.
11. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 + 3x)^2$ przez wielomian $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ otrzymano iloraz $Q(x)$. Wyznacz wielomian $Q(x)$.
12. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = (7x^3 - 1)^2 - (26 - x^3)^2$ przez wielomian $P(x) = 4x^2 + 6x + 9$ otrzymano iloraz $Q(x)$. Wyznacz wielomian $Q(x)$.

D 13. Uzasadnij, że wielomian:
   a) $W(x) = (3x^2 + 5x - 4)^2 - (-x^2 + x - 1)^2$ jest podzielny przez dwumian liniowy $P(x) = 2x + 3$
   b) $W(x) = (2x - 3)^3 - (x + 5)^3$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 7x^2 + 5x + 19$.

   W każdym przypadku wyznacz iloraz $Q(x)$ z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.
14. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = 3x^3 + 14x^2 + x - 2$ przez wielomian $P(x)$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = x^2 + 5x + 2$. Wyznacz wielomian $P(x)$.
15. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = 3x^4 - 2x^3 + 24x - 16$ przez wielomian $P(x)$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 3x^3 - 8x^2 + 16x - 8$. Wyznacz wielomian $P(x)$.
16. Podaj przykład wielomianu $K(x)$ takiego, że wielomian $W(x) = (x^2 - 2x + 1)K(x)$ jest stopnia trzeciego i jednocześnie wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 2x^2 + x - 3$.
17. Podaj przykład wielomianu $K(x)$ takiego, że wielomian $W(x) = (x^3 + 27)K(x)$ jest stopnia czwartego i jednocześnie wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 2x - 3$.
18. Podaj przykład wielomianu $K(x)$ takiego, że wielomian $W(x) = (3x - 4)(2 - x)K(x)$ jest wielomianem stopnia piątego i jednocześnie wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 3x^2 - x - 4$.

Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy. Schemat Hornera

Sposób, w jaki dzielimy wielomiany, jest podobny do dzielenia liczb całkowitych sposobem pisemnym.

Ćwiczenie 1. Podziel liczbę 3240 przez 24 sposobem pisemnym.

Przykład 1.

Podzielimy wielomian $-x + 2x^3 - 51$ przez wielomian $-3 + x$.

Dane wielomiany porządkujemy malejąco i oznaczamy:

$W(x) = 2x^3 - x - 51, \qquad P(x) = x - 3.$

Przebieg dzielenia $W(x) : P(x)$	
Zapisujemy dzielenie $(2x^3 - x - 51) : (x - 3)$ i stawiamy na górze kreskę, nad którą zapiszemy wynik tego dzielenia. $\begin{array}{l} \underline{2x^2 \qquad\quad + 6x + 17} \\ (2x^3 \qquad\quad - x - 51) : (x - 3) \\ \underline{-2x^3 + 6x^2 \qquad\qquad} \\ = \quad 6x^2 - x - 51 \\ \underline{\quad - 6x^2 + 18x \qquad} \\ \qquad = \quad 17x - 51 \\ \underline{\qquad\quad -17x + 51} \\ \qquad\qquad = \quad 0 \end{array}$	1) Pierwszy od lewej wyraz wielomianu $W(x)$ dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika: $2x^3 : x = 2x^2$. Wynik $2x^2$ zapisujemy nad kreską. Następnie mnożymy go przez dzielnik: $2x^2 \cdot (x - 3) = 2x^3 - 6x^2$. Otrzymany wynik zapisujemy pod wielomianem $W(x)$, odcinamy kreską i wykonujemy odejmowanie $W(x) - (2x^3 - 6x^2)$ lub (jak w naszym przypadku) dodawanie po zmianie znaków: $W(x) + (-2x^3 + 6x^2)$. Otrzymujemy nowy wielomian $6x^2 - x - 51$. 2) Powtarzamy procedurę z poprzedniego punktu, ale teraz dla nowego wielomianu. Wykonujemy dzielenie $6x^2 : x = 6x$. Wynik $6x$ zapisujemy nad kreską. Mnożymy: $6x \cdot (x - 3) = 6x^2 - 18x$. Wielomian $6x^2 - 18x$ zapisujemy z przeciwnymi znakami pod wielomianem $6x^2 - x - 51$, odcinamy kreską i wykonujemy dodawanie. 3) Powtarzamy procedurę dla otrzymanego dwumianu $17x - 51$. Dzielimy $17x : x = 17$. Liczbę 17 zapisujemy nad kreską. Mnożymy $17 \cdot (x - 3) = 17x - 51$. Zmieniamy znaki: $-17x + 51$. Otrzymany dwumian zapisujemy pod dwumianem $17x - 51$, odcinamy kreską i dodajemy. Otrzymujemy resztę 0, koniec dzielenia.

Po podzieleniu wielomianu $2x^3 - x - 51$ przez dwumian liniowy $x - 3$ otrzymaliśmy iloraz $2x^2 + 6x + 17$ oraz resztę równą 0. Możemy zapisać:

$$2x^3 - x - 51 = (2x^2 + 6x + 17)(x - 3).$$

Ćwiczenie 2. Sprawdź poprawność wykonanego powyżej dzielenia, mnożąc dwumian $x - 3$ przez wielomian $2x^2 + 6x + 17$.

Wiesz, że dzieląc liczbę całkowitą przez liczbę całkowitą, nie zawsze otrzymasz iloraz będący liczbą całkowitą. Przypomnijmy: w zbiorze liczb całkowitych można zawsze wykonać dzielenie z resztą przez liczbę różną od zera, np.:

$37 : 8 = 4$ reszta 5 – co znaczy, że $37 = 4 \cdot 8 + 5$

$3 : 7 = 0$ reszta 3 – co znaczy, że $3 = 0 \cdot 7 + 3$

Poszukajmy analogii do tej sytuacji, wykonując dzielenie z resztą wielomianu przez dwumian.

Przykład 2.

Wykonamy dzielenie wielomianu $3x^3 + 2x^2 - 3x + 16$ przez dwumian liniowy $x + 2$.

$$\begin{array}{rl}
\underline{\quad 3x^2 - 4x + 5 \quad} & \\
(3x^3 + 2x^2 - 3x + 16) & : (x+2) \\
\underline{-3x^3 - 6x^2 \qquad\qquad\quad} & \longleftarrow \quad 3x^3 : x = 3x^2; \quad 3x^2 \cdot (x+2) = 3x^3 + 6x^2 \\
= \quad -4x^2 - 3x + 16 & \\
\underline{4x^2 + 8x \qquad} & \longleftarrow \quad -4x^2 : x = -4x; \quad -4x \cdot (x+2) = -4x^2 - 8x \\
= \qquad 5x + 16 & \\
\underline{-5x - 10} & \longleftarrow \quad 5x : x = 5; \quad 5 \cdot (x+2) = 5x + 10 \\
= \qquad 6 &
\end{array}$$

W wyniku podzielenia wielomianu $3x^3 + 2x^2 - 3x + 16$ przez dwumian $x + 2$ otrzymaliśmy iloraz $3x^2 - 4x + 5$ oraz resztę 6. Możemy zapisać:

$$3x^3 + 2x^2 - 3x + 16 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 5) + 6$$

Ćwiczenie 3. Doprowadź wielomian $(x + 2)(3x^2 - 4x + 5) + 6$ do postaci uporządkowanej i porównaj ze wzorem wielomianu z przykładu 2.

Ćwiczenie 4. Wykonaj dzielenie:

a) wielomianu $x^4 + 7x^3 + 11x^2 + 9x + 20$ przez dwumian $x + 5$

b) wielomianu $3x^3 - x^2 + 2x + 1$ przez dwumian $x - 1$.

Przykład 3.

Wykonamy dzielenie wielomianu $2x-3$ przez dwumian liniowy $x-1$.

$$\begin{array}{l} \underline{\ 2\qquad\quad} \\ (2x-3):(x-1) \\ \underline{-2x+2\quad} \\ =\ \ -1 \end{array}$$

Po podzieleniu wielomianu $2x-3$ przez dwumian $x-1$ otrzymujemy iloraz 2 i resztę -1.
Zapisujemy: $2x-3=2(x-1)-1$.
Zauważ, że stopień ilorazu jest równy 0.

Jeśli st.$W(x)=n$, $n\in \mathbf{N}_+$ i wielomian $W(x)$ podzielimy przez dwumian liniowy $P(x)$, gdzie $P(x)=x-p$, i p jest dowolną liczbą rzeczywistą, to otrzymamy iloraz $Q(x)$, którego stopień jest równy $n-1$, oraz resztę $R(x)$, która jest liczbą.

Rozpatrzmy dodatkowo wielomian, którego stopień jest równy 0, np. $W(x)=4$. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x-p$ otrzymamy iloraz 0 i resztę 4, bowiem

$$4=(x-p)\cdot 0+4.$$

Dotychczasowe rozważania doprowadziły nas do wniosku, że reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez dwumian liniowy jest zawsze liczbą. Będziemy ją oznaczać literą r.

Twierdzenie 1. *O dzieleniu wielomianu przez dwumian liniowy*
Jeśli $W(x)$ jest dowolnym wielomianem i $P(x)=x-p$, gdzie $p\in\mathbf{R}$, to istnieje wielomian $Q(x)$ oraz taka liczba rzeczywista r, że

$$W(x)=(x-p)Q(x)+r.$$

Z twierdzenia 1. wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *O reszcie*
Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-p$ jest równa $W(p)$.

Dowód:
Na podstawie twierdzenia 1. wiemy, że istnieją wielomian $Q(x)$ i liczba r, dla których

$$W(x)=(x-p)\cdot Q(x)+r.$$

Obliczamy wartość wielomianu $W(x)$ dla liczby p:

$$W(p)=(p-p)\cdot Q(p)+r=0\cdot Q(p)+r=r,\quad \text{czyli}$$
$$W(p)=r,$$

co kończy dowód.

Twierdzenie o reszcie w niektórych sytuacjach upraszcza nam obliczenia.

Przykład 4.

Obliczymy resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 6$, przez dwumian $x + 2$.

Korzystamy z twierdzenia o reszcie:

$$r = W(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = -8 - 12 - 10 + 6 = -24.$$

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$ jest równa -24.

Ćwiczenie 5. Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ z przykładu 4. przez dwumian $x + 2$. Podaj otrzymany iloraz i resztę.

Jeśli st. $W(x) \geqslant 1$, to iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - p$ można również wyznaczyć, stosując schemat Hornera.
William G. Horner to matematyk angielski, który żył na przełomie XVIII i XIX w. Algorytm nazywany dziś schematem Hornera, znany był Chińczykom pięćset lat wcześniej.

Twierdzenie 3. Schemat Hornera

W wyniku podzielenia wielomianu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$, przez dwumian liniowy $x - p$, otrzymujemy iloraz $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$, gdzie $b_{n-1} \neq 0$ i resztę r, będącą liczbą rzeczywistą, przy czym zachodzą następujące równości:

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{n-2} = a_{n-1} + p \cdot b_{n-1}, \qquad b_{n-3} = a_{n-2} + p \cdot b_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_2 = a_3 + p \cdot b_3, \qquad b_1 = a_2 + p \cdot b_2, \qquad b_0 = a_1 + p \cdot b_1,$$
$$r = a_0 + p \cdot b_0$$

Udowodnimy to twierdzenie dla wielomianu stopnia czwartego. Niech

$$W(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \ a_4 \neq 0.$$

Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - p$ otrzymujemy wielomian stopnia trzeciego $Q(x)$, gdzie $Q(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ oraz resztę r, $r \in \mathbf{R}$.
Z twierdzenia 1. wiemy, że:

$$W(x) = (x - p) \cdot (b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) + r, \quad \text{stąd}$$
$$W(x) = b_3 x^4 + b_2 x^3 + b_1 x^2 + b_0 x - b_3 p x^3 - b_2 p x^2 - b_1 p x - p b_0 + r, \quad \text{czyli}$$
$$W(x) = b_3 x^4 + (b_2 - b_3 p)x^3 + (b_1 - b_2 p)x^2 + (b_0 - b_1 p)x - p b_0 + r.$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej wielomianu $W(x)$ otrzymujemy:

$$a_4 = b_3 \qquad a_3 = b_2 - b_3 p \qquad a_2 = b_1 - b_2 p \qquad a_1 = b_0 - b_1 p \qquad a_0 = r - b_0 p$$

Stąd otrzymujemy:

$$b_3 = a_4, \quad b_2 = a_3 + p \cdot b_3, \quad b_1 = a_2 + p \cdot b_2, \quad b_0 = a_1 + p \cdot b_1, \quad r = a_0 + p \cdot b_0$$

Otrzymane równości dają współczynniki ilorazu $Q(x)$ z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - p$, a także resztę r z tego dzielenia, co kończy dowód.

Przykład 5.

Podzielimy wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 + x - 3$, przez dwumian $x + 2$ za pomocą schematu Hornera.

Wypisujemy współczynniki wielomianu $W(x)$ uporządkowanego malejąco:

$a_4 = 4$, $a_3 = -2$, $a_2 = 8$, $a_1 = 1$, $a_0 = -3$.

Ponieważ $x + 2 = x - (-2)$, więc $p = -2$.

Obliczamy współczynniki wielomianu $Q(x)$ będącego ilorazem oraz resztę, korzystając z powyższych wzorów. Mamy:

$b_3 = a_4 = 4$,

$b_2 = a_3 + p \cdot b_3 = -2 + (-2) \cdot 4 = -10$

$b_1 = a_2 + p \cdot b_2 = 8 + (-2) \cdot (-10) = 28$

$b_0 = a_1 + p \cdot b_1 = 1 + (-2) \cdot 28 = -55$

$r = a_0 + p \cdot b_0 = -3 + (-2) \cdot (-55) = 107$.

W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$, otrzymujemy iloraz $Q(x)$, gdzie $Q(x) = 4x^3 - 10x^2 + 28x - 55$ i resztę 107.

Dzielenie schematem Hornera wygodnie jest zapisywać w tabelce.

Ćwiczenie 6. Poniższa tabelka opisuje dzielenie wielomianu $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_4 \neq 0$ przez dwumian liniowy $x - p$, gdzie otrzymujemy współczynniki ilorazu $b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ i resztę r. Przeanalizuj ją dokładnie.

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
p		$p \cdot b_3$	$p \cdot b_2$	$p \cdot b_1$	$p \cdot b_0$
	$\underbrace{a_4}_{b_3}$	$\underbrace{a_3 + p \cdot b_3}_{b_2}$	$\underbrace{a_2 + p \cdot b_2}_{b_1}$	$\underbrace{a_1 + p \cdot b_1}_{b_0}$	$\underbrace{a_0 + p \cdot b_0}_{r}$

Jeszcze raz podzielmy wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 + x - 3$ przez dwumian $P(x) = x + 2$, stosując schemat Hornera, ale tym razem zapiszmy to dzielenie w tabeli.

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	4	-2 +	8 +	1 +	-3 +
-2		$-2 \cdot 4$	$-2 \cdot (-10)$	$-2 \cdot 28$	$-2 \cdot (-55)$
	4	-10	28	-55	107
	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Otrzymujemy: $Q(x) = 4x^3 - 10x^2 + 28x - 55$, $r = 107$, zatem

$W(x) = (x + 2)(4x^3 - 10x^2 + 28x - 55) + 107$

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wykonaj dzielenie sposobem pisemnym:
   a) $(2x^3+5x^2+5x+24):(x+3)$ b) $(2x^4-6x^3+9x^2-4x-1):(x-1)$
   c) $(x^3-x-6):(x-2)$ d) $(4x^4+3x^3-88):(x-2)$
   e) $(x^5+1):(x+1)$ f) $(9x^7+8x^4-2x-15):(x-1)$.
2. Wykonaj dzielenie sposobem pisemnym:
   a) $(2x^5-3x^3+7x-4):(x+1)$ b) $(-2x^4+12x^3-17x^2-5):(x-3)$
   c) $(2x^5+7x^4-15x^3+4x^2):(x+5)$ d) $(-4x^4+3x^3+5x+8):(x+2)$
   e) $(x^3-4x^2-9x+30):(x-4)$ f) $(x^5+5x^4+2x^3+10x^2+x):(x+5)$.
3. Wykonaj dzielenie, stosując schemat Hornera.
   a) $(2x^4+3x^3+x^2+8x+4):(x+2)$ b) $(5x^4-20x^3+8x^2+20x+7):(x-3)$
   c) $(-3x^5+5x^4-x^3+4x+3):(x-1)$ d) $(2x^5-18x^3+x^2+5x+6):(x+3)$
   e) $(5x^5-10x^4+3x-6):(x-2)$ f) $(-x^6+24x^4-4x^3+5x^2+3):(x+5)$.
4. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $P(x)$, jeśli:
   a) $W(x)=2x^4+x^3+3x^2-5x+1,\ P(x)=x+1$
   b) $W(x)=3x^4-6x^3+x^2+5x-8,\ P(x)=x-2$
   c) $W(x)=x^3+10x^2-130,\ P(x)=x+5$
   d) $W(x)=2x^4-6x^3+4x^2-10x+4,\ P(x)=x-3$.
5. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+3$ otrzymujemy iloraz $Q(x)=x^3-2x^2+x-1$ i resztę równą 7. Jaką resztę otrzymamy w wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian: a) $x-3$ b) $x+2$?
6. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $6-x$ otrzymujemy iloraz $Q(x)=2x^4-7x^3+10$ i resztę równą -35. Jaką resztę otrzymamy w wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian: a) $x+1$ b) $x-2$?
7. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$ otrzymujemy iloraz $Q(x)=x^2-2x+3$ i resztę równą -18. Wiedząc, że suma współczynników wielomianu $W(x)$ w postaci uporządkowanej jest równa -8, oblicz a.
8. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^3+(m-3)x^2+5x+m-10$ przez dwumian $x+2$ jest równa -20. Oblicz m.
9. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=2x^3-(p^2+3)x+7p-9$ przez dwumian $x-2$ jest równa 4. Oblicz p.
10. Wyznacz wszystkie wartości a, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^4-(a+2)x^2+a^2x+5$ przez dwumian $x-1$ jest mniejsza od 10.
11. Wyznacz wszystkie wartości k, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=k^2x^{40}+6x^{20}+3k$ przez dwumian $x+1$ jest większa od 4.

Dzielenie wielomianu przez wielomian stopnia większego od 1

Metodę dzielenia sposobem pisemnym stosujemy do dzielenia wielomianu przez wielomian dowolnego stopnia.
Przed wykonaniem dzielenia oba wielomiany porządkujemy malejąco.

Przykład 1.

Podzielimy wielomian $2x^4+7x^3-6x^2-7x+4$ przez wielomian x^2+5x+4.

$$
\begin{array}{rrrrl}
\multicolumn{5}{l}{\underline{\;2x^2 - 3x + 1\qquad\qquad\quad}} \\
(2x^4 + & 7x^3 - & 6x^2 - & 7x + 4) & : (x^2+5x+4) \\
\underline{-2x^4 -} & \underline{10x^3 -} & \underline{8x^2} & & \longleftarrow\; 2x^4 : x^2 = 2x^2;\ 2x^2\cdot(x^2+5x+4) = 2x^4+10x^3+8x^2 \\
= & -3x^3 - & 14x^2 - & 7x+4 & \\
 & \underline{3x^3 +} & \underline{15x^2 +} & \underline{12x\quad} & \longleftarrow\; -3x^3 : x^2 = -3x;\ -3x\cdot(x^2+5x+4) = -3x^3-15x^2-12x \\
 & = & x^2 + & 5x+4 & \\
 & & \underline{-x^2 -} & \underline{5x-4} & \longleftarrow\; x^2 : x^2 = 1;\ 1\cdot(x^2+5x+4) = x^2+5x+4 \\
 & & = & = \quad 0 &
\end{array}
$$

Po podzieleniu wielomianu $2x^4+7x^3-6x^2-7x+4$ przez wielomian x^2+5x+4 otrzymujemy iloraz $2x^2-3x+1$. Możemy zapisać:

$$2x^4+7x^3-6x^2-7x+4=(2x^2-3x+1)(x^2+5x+4).$$

W kolejnym przykładzie zilustrujemy dzielenie wielomianów z resztą.

Przykład 2.

Podzielimy wielomian $W(x)$ przez $P(x)$, jeśli:

a) $W(x)=5x^3+2x^2-3x+7$ i $P(x)=x^2-4$

b) $W(x)=-4x^3+5x+2$ i $P(x)=2x^3-3x$

c) $W(x)=x^2+x$ i $P(x)=x^3+2x-7$.

Ad a) Stopień wielomianu $W(x)$ jest większy niż stopień wielomianu $P(x)$.

$$
\begin{array}{rrrrl}
\multicolumn{4}{l}{\underline{\;5x + 2\qquad\qquad\qquad}} & \\
(5x^3 + & 2x^2 - & 3x + & 7) & : (x^2-4) \\
\underline{-5x^3} & & \underline{+20x} & & \\
= & 2x^2 + & 17x + & 7 & \\
 & \underline{-2x^2} & & \underline{+\ 8} & \\
 & = & 17x + & 15 & \leftarrow\ \text{reszta}
\end{array}
$$

Stosując odpowiedni algorytm dzielenia, dochodzimy do sytuacji, w której stopień kolejnej dzielnej $(17x+15)$ jest mniejszy niż stopień dzielnika (x^2-4). Dalsze dzielenie jest niemożliwe w zbiorze wielomianów.

W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ otrzymujemy iloraz $5x+2$ oraz resztę $17x+15$. Sprawdź, że

$$W(x)=(x^2-4)(5x+2)+(17x+15).$$

Ad b) Stopnie wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ są takie same.

$$\begin{array}{l} \underline{\ \ -2\qquad\qquad\qquad} \\ (-4x^3+5x+2):(2x^3-3x) \\ \underline{\ \ 4x^3-6x\qquad\qquad} \\ \ \ =\qquad -x+2 \qquad\quad \leftarrow \text{reszta} \end{array}$$

W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ otrzymujemy iloraz -2 oraz resztę $-x+2$.

Możemy zapisać (sprawdź to!):

$$W(x)=(2x^3-3x)\cdot(-2)+(-x+2)$$

Ad c) Stopień wielomianu $W(x)$ jest mniejszy niż stopień wielomianu $P(x)$.
Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ otrzymujemy iloraz 0 i resztę x^2+x, bowiem

$$0\cdot(x^3+2x-7)+x^2+x=x^2+x=W(x).$$

W tym przypadku reszta z dzielenia jest równa dzielnej.

Na wielomianach niezerowych $W(x)$ i $P(x)$ możemy wykonywać dzielenie z resztą. Wówczas:

1) Jeśli st. $W(x)\geqslant$ st.$P(x)$, to dzieląc wielomian $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ otrzymamy iloraz $Q(x)$ różny od wielomianu zerowego i resztę $R(x)$, przy czym st.$R(x)<$ st.$P(x)$ lub $R(x)\equiv 0$.
2) Jeśli st.$W(x)<$ st.$P(x)$, to dzieląc wielomian $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ otrzymamy iloraz $Q(x)$ będący wielomianem zerowym oraz resztę $R(x)$, równą wielomianowi $W(x)$.

Twierdzenie 1. *O rozkładzie wielomianu*
Jeśli $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to istnieją dwa wielomiany $Q(x)$ oraz $R(x)$, dla których

$$W(x)=P(x)\cdot Q(x)+R(x),\ \text{ gdzie } R(x)\equiv 0 \text{ lub st.}R(x)<\text{st.}P(x).$$

Ćwiczenie 1. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $(x-5)(x-1)$ otrzymano iloraz x^3+1 oraz resztę $4x-3$. Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$ w postaci uporządkowanej.

Przykład 3.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-3$ jest równa 8, zaś reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x+1$ wynosi 4. Obliczymy resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $(x+1)(x-3)$.

Zauważ, że nie znamy wzoru wielomianu $W(x)$. W tej sytuacji wykorzystamy twierdzenie 1. o rozkładzie wielomianu, z którego wynika, że istnieją wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, dla których

$$W(x)=Q(x)(x+1)(x-3)+R(x),\ \text{ gdzie st.}R(x)<2 \text{ lub } R(x)\equiv 0.$$

Reszta jest wielomianem stopnia co najwyżej pierwszego lub jest wielomianem zerowym, więc przyjmuje postać

$R(x) = ax + b, \quad$ gdzie $\quad a, b \in \boldsymbol{R}$.

Otrzymujemy wzór wielomianu $W(x)$:

$W(x) = Q(x)(x+1)(x-3) + ax + b, \quad$ gdzie $a, b \in \boldsymbol{R}$.

Reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumiany $x+1$ oraz $x-3$ są odpowiednio równe 4 oraz 8, więc na podstawie twierdzenia o reszcie mamy:

$$\begin{cases} W(-1)=4 \\ W(3)=8 \end{cases}$$

Obliczamy wartości wielomianu $W(x)$ dla -1 oraz 3:

$$W(-1) = \underbrace{Q(-1)\cdot(-1+1)\cdot(-1-3)}_{0} - a + b = 4$$

$$W(3) = \underbrace{Q(3)\cdot(3+1)\cdot(3-3)}_{0} + 3a + b = 8$$

Otrzymaliśmy układ równań $\begin{cases} -a+b=4 \\ 3a+b=8 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$, $R(x) = x + 5$

Wielomian $R(x) = x + 5$ jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $(x+1)(x-3)$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wartości współczynników a i b tak, aby wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = x^4 - 3x^3 + 8x^2 + ax + b$, był podzielny przez wielomian $P(x)$, gdzie $P(x) = x^2 - x + 5$.

Wykonamy dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$.

$$\begin{array}{l}
x^2 - 2x + 1 \\
\hline
(x^4 - 3x^3 + 8x^2 + ax + b) : (x^2 - x + 5) \\
-x^4 + x^3 - 5x^2 \\
\hline
= \quad -2x^3 + 3x^2 + ax + b \\
\qquad 2x^3 - 2x^2 + 10x \\
\hline
= \qquad\quad x^2 + (a+10)x + b \\
\qquad\quad -x^2 + \qquad\quad x - 5 \\
\hline
= \qquad\quad (a+11)x + b - 5
\end{array}$$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$ wtedy, gdy wielomian $R(x)$, gdzie $R(x) = (a+11)x + b - 5$ jest wielomianem zerowym. Wówczas

$$\begin{cases} a+11=0 \\ b-5=0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a=-11 \\ b=5 \end{cases}$$

Jeśli $a = -11$, $b = 5$, to wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$.

Ćwiczenie 2. Czy znasz inny sposób rozwiązania zadania z przykładu 4.? Rozwiąż to zadanie tym sposobem.

Sprawdź, czy rozumiesz. Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Wykonaj dzielenie:
   a) $(15x^3 + 2x^2 + 9x - 2) : (5x - 1)$
   b) $(8x^3 - 6x^2 - 16x + 12) : (-4x + 3)$
   c) $(10x^3 + 17x^2 + 3{,}5x - 3) : (2{,}5x + 3)$
   d) $(x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 20x^2 + 12) : \left(\frac{1}{3}x^2 + 2\right)$
2. Wykonaj dzielenie:
   a) $(-2x^4 + 12x^3 - 17x^2 + 18x + 28) : (x^2 - 2x + 4)$
   b) $(6x^5 + 23x^4 + 30x^3 + 23x^2 - 5x) : (2x^2 + 5x)$
   c) $(-4x^5 + 6x^4 - 10x^3 + x^2 + 3x - 6) : (4x^3 - 2x^2 + 3)$
   d) $(6x^4 + x^2 - 12) : (3x^2 - 4)$
3. Wyznacz iloraz $Q(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = -6x^3 - x^2 + 7x - 1$, $\quad P(x) = 2x^2 + 3x + 1$
   b) $W(x) = 3x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 12x + 5$, $\quad P(x) = x^2 + 4x - 5$
   c) $W(x) = -8x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 8x + 4$ $\quad P(x) = 4x^2 + 8$
   d) $W(x) = 2x^5 - x^4 - 2x^2 + 2x + 1$ $\quad P(x) = x^3 + x^2 + x - 2$
4. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian kwadratowy $P(x) = 2x^2 + x - 6$ jest równa $R(x) = 4x + 7$. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 2$.
5. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 10, zaś reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 5$ wynosi -32. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = (x - 1)(x + 5)$.
6. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumian $x + 4$ daje resztę 7, a przy dzieleniu przez $x - 1$ daje resztę -3. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^2 + 3x - 4$.
7. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $x + 2$, $x - 3$ daje reszty odpowiednio równe 6 oraz 16. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ wiedząc, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$.
8. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^4 + (a - b)x^3 - (4a + 2b)x^2 - 5x + 2$ przez wielomian $K(x) = x^2 + x - 12$ jest równa $R(x) = 8x - 10$. Oblicz a i b.
9. Wielomian $W(x) = 2x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 3$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 2x + 3$. Oblicz a i b.

Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bézouta

Wiesz, że można obliczyć wartość wielomianu dla dowolnej liczby rzeczywistej. Jeśli dla pewnej liczby rzeczywistej wartość wielomianu jest równa 0, to powiemy, że ta liczba jest pierwiastkiem wielomianu.

Definicja 1.
Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy liczbę rzeczywistą a, dla której $W(a) = 0$.

Przykład 1.

Sprawdzimy, czy któraś z liczb: -1, 1, $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 2$.

Obliczamy:

$$W(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 = 2 - 1 - 5 + 2 + 2 = 0$$
$$W(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 1 - 5 - 2 + 2 = -2$$
$$W(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^3 - 5(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 2 = 8 + 2\sqrt{2} - 10 - 2\sqrt{2} + 2 = 0$$

Z podanych liczb tylko liczby -1 i $\sqrt{2}$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)$.

Przykład 2.

Wyznaczymy pierwiastki wielomianu $W(x) = x(x+4)(x-3)(x^2+5)$.

Wystarczy rozwiązać równanie

$W(x) = 0$, czyli

$x(x+4)(x-3)(x^2+5) = 0$.

Wielomian $W(x)$ jest zapisany w postaci iloczynu wielomianów pierwszego i drugiego stopnia. Zatem $W(x) = 0$ tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy zero.

$x = 0 \lor x + 4 = 0 \lor x - 3 = 0 \lor x^2 + 5 = 0$, stąd

$x = 0 \lor x = -4 \lor x = 3$ (równanie sprzeczne)

Wielomian $W(x)$ ma trzy pierwiastki: -4, 0, 3.

Ćwiczenie 1. Przez jakie wielomiany stopnia pierwszego jest podzielny wielomian $W(x)$ z przykładu 2.?

Ćwiczenie 2. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego, który jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Czy liczba 1 jest pierwiastkiem tego wielomianu?

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Bézouta
Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$.

Twierdzenie Bézouta ma postać równoważności, a więc składa się z dwóch twierdzeń:

I. Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$.
II. Jeśli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Dowód twierdzenia Bézouta polega na wykazaniu prawdziwości obu twierdzeń, więc składa się z dwóch części.

Część **I**.
Założenie: Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.
Teza: Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$.
Dowód:
Z twierdzenia o dzieleniu wielomianu przez dwumian liniowy wiemy, że dla dowolnego wielomianu $W(x)$ i dowolnego dwumianu $x-a$ istnieje wielomian $Q(x)$ i liczba r, dla których
$$W(x)=Q(x)\cdot(x-a)+r.$$
Z założenia wiemy, że $W(a)=0$, czyli
$$Q(a)\cdot(a-a)+r=0+r=0,$$ stąd otrzymujemy
$$r=0.$$
W takim razie $W(x)=Q(x)\cdot(x-a)$, czyli
wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$.

Część **II**.
Założenie: Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$.
Teza: Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.
Dowód:
Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$, więc istnieje taki wielomian $Q(x)$, że
$$W(x)=Q(x)\cdot(x-a)$$
Obliczamy wartość wielomianu $W(x)$ dla liczby a. Otrzymujemy:
$$W(a)=Q(a)\cdot(a-a)=Q(a)\cdot 0=0$$
Otrzymaliśmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

UWAGA: Z twierdzenia Bézouta wynika, że istnienie pierwiastka a danego wielomianu jest równoznaczne z podzielnością tego wielomianu przez dwumian $x - a$. Zatem, jeśli liczba a nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez dwumian $x - a$. Podobnie, jeśli wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez dwumian $x - a$, to liczba a nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 3.

Nie wykonując dzielenia, zbadamy, czy wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = x^3 + 3x - 14$, jest podzielny przez dwumiany: $x - 2$ oraz $x + 1$.

Wystarczy obliczyć $W(2)$ oraz $W(-1)$:

$$W(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 - 14 = 0$$
$$W(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 14 = -18$$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, więc wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$. Liczba -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, zatem wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez dwumian $x + 1$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = 4x^3 - 7x - 3$, wiedząc, że jest on podzielny przez dwumian $x + 1$. Następnie wielomian $W(x)$ zapiszemy w postaci iloczynu wielomianów możliwie najniższych, niezerowych stopni.

Dzielimy wielomian $W(x)$ przez $x + 1$, np. schematem Hornera.

	4	0	-7	-3
-1		-4	4	3
	4	-4	-3	$\boxed{0}$

Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 1$ otrzymujemy iloraz $Q(x)$, $Q(x) = 4x^2 - 4x - 3$
Wielomian $W(x)$ zapisujemy w postaci iloczynu:

$$W(x) = (4x^2 - 4x - 3) \cdot (x + 1).$$

Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest liczba -1. Pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$ są również pierwiastkami trójmianu $Q(x)$. Obliczamy:

$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$
$$\Delta = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$
$$x_1 = \frac{4-8}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{4+8}{2 \cdot 4} = 1\frac{1}{2}$$

Wielomian $W(x) = 4x^3 - 7x - 3$ ma trzy pierwiastki: $-1, -\frac{1}{2}$ oraz $1\frac{1}{2}$.

Trójmian $Q(x)$ możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$Q(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - 1\frac{1}{2}\right), \quad \text{stąd} \quad Q(x) = (2x + 1)(2x - 3).$$

Wielomian $W(x)$ można zapisać jako iloczyn trzech dwumianów pierwszego stopnia:

$$W(x) = (2x + 1)(2x - 3)(x + 1).$$

Zastanowimy się teraz nad liczbą pierwiastków danego wielomianu.
Zauważ, że wielomian stopnia zero nie ma pierwiastków. Natomiast pierwiastkiem wielomianu zerowego jest każda liczba rzeczywista.

Ćwiczenie 3. Ile pierwiastków ma wielomian stopnia pierwszego? Ile pierwiastków może mieć wielomian stopnia drugiego? Odpowiedzi na te pytania zilustruj przykładami.

Z twierdzenia Bézouta wynika, że jeśli wielomian stopnia n, $n \in \boldsymbol{N}_+$, ma pierwiastek, to ten wielomian można przedstawić w postaci iloczynu pewnego dwumianu pierwszego stopnia i wielomianu stopnia $n-1$. Z drugiej strony, wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n czynników, które są dwumianami stopnia pierwszego. Zatem liczba pierwiastków wielomianu jest ograniczona przez jego stopień. O tym informuje nas twierdzenie 2.

Twierdzenie 2.

Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej rzeczywistej jest nie większa niż stopień wielomianu $W(x)$.

Ćwiczenie 4. Wyznacz stopień i wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$ i $P(x)$:
a) $W(x) = (x^3 - 1)(x + 2)$ b) $P(x) = 3x(x + 5)(x - 2)(x + 1)$

Jeśli wielomian $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ stopnia n, $n \geqslant 2$, ma n różnych pierwiastków, to można go zapisać w postaci iloczynowej:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Przykład 5.

Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego są liczby: -1, -2, 3. Wiedząc, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 1$ jest równa 24, wyznaczymy wzór tego wielomianu.

Wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci iloczynowej:

$$W(x) = a(x + 1)(x + 2)(x - 3).$$

Ponieważ reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 1$ jest równa 24, więc

$$24 = W(1), \quad \text{stąd}$$
$$24 = a(1 + 1)(1 + 2)(1 - 3)$$
$$a = -2$$

Wielomian ma wzór $W(x) = -2(x + 1)(x + 2)(x - 3)$.

Przykład 6.

Obliczymy współczynniki a i b wielomianu $W(x)$, $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 6$, jeśli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, gdzie $P(x) = (x-2)(2x+1)$.

<u>I sposób</u> – korzystamy z twierdzenia Bézouta.
Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-2)(2x+1)$, czyli $2(x-2)(x+0{,}5)$. Jest więc podzielny przez każdy z dwumianów $x-2$ oraz $x+0{,}5$.
Z twierdzenia Bézouta wynika, że liczby 2 i $-0{,}5$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)$.

$$W(2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 6 = 0$$

$$W(-0{,}5) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-0{,}5)^3 + a \cdot (-0{,}5)^2 + b \cdot (-0{,}5) + 6 = 0$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -22 \\ 0{,}25a - 0{,}5b = -5{,}75 \quad / \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -22 \\ a - 2b = -23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -9 \\ b = 7 \end{cases}$$

Szukane współczynniki wielomianu $W(x)$ to: $a = -9$, $b = 7$.

<u>II sposób</u> – korzystamy z podzielności wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.
Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$,
więc istnieje taki wielomian $Q(x)$, że

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

i stopień wielomianu $Q(x)$ jest równy 1 (dlaczego?). Zatem
$Q(x) = mx + n$, gdzie $m \neq 0$. Wówczas

$$W(x) = (x-2)(2x+1)(mx+n) = (2x^2 - 3x - 2)(mx+n) =$$
$$= 2mx^3 + (2n - 3m)x^2 - (3n + 2m)x - 2n$$

Porównujemy współczynniki wielomianu:

$$2m = 2 \qquad 2n - 3m = a \qquad -(3n + 2m) = b \qquad -2n = 6 \qquad \text{stąd}$$
$$m = 1 \qquad a = -9 \qquad b = 7 \qquad n = -3$$

Szukane współczynniki to: $a = -9$, $b = 7$.

Ćwiczenie 5. Rozwiąż zadanie z przykładu 6. w następujący sposób. Podziel wielomian $W(x)$ przez $P(x)$. Następnie ustal i rozwiąż warunki, dla których otrzymana z dzielenia reszta $R(x)$ jest wielomianem zerowym. Który sposób rozwiązania tego zadania jest Twoim zdaniem najkrótszy?

Na koniec poznasz wzory Viete'a dla wielomianów trzeciego stopnia i ich zastosowanie.

Twierdzenie 3.

Jeśli liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$, $W(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, to

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = q \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r \end{cases}$$

Założenie: x_1, x_2, x_3 – pierwiastki wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = x^3 + px^2 + qx + r$

Teza:
1) $x_1 + x_2 + x_3 = -p$
2) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = q$
3) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$

Dowód:
Wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$W(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Wzór wielomianu $W(x)$ przekształcamy do postaci uporządkowanej:

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)(x - x_3) = [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2](x - x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2)x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + (x_1 + x_2)x_3x - x_1x_2x_3 = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki wielomianu:

$x_1 + x_2 + x_3 = -p \ \wedge \ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \ \wedge \ x_1x_2x_3 = -r,$ co kończy dowód.

Przykład 7.

Wielomian $x^3 + 6x^2 + ax + b$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3. Wiedząc, że $x_2 = x_1 + 3$ oraz $x_3 = x_1 + 6$, wyznaczymy współczynniki a i b.

Ze wzorów Viete'a dla równania stopnia trzeciego otrzymujemy

$$x_1 + x_2 + x_3 = -6 \quad \wedge \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a \quad \wedge \quad x_1x_2x_3 = -b.$$

Z pierwszego równania mamy:

$x_1 + (x_1 + 3) + (x_1 + 6) = -6$, stąd
$3x_1 + 9 = -6$, czyli $x_1 = -5$.

Teraz możemy obliczyć pozostałe pierwiastki:

$$x_2 = -5 + 3 = -2 \quad \wedge \quad x_3 = -5 + 6 = 1.$$

Z drugiego i trzeciego wzoru Viete'a obliczamy a i b:

$$a = (-5) \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 3, \qquad b = -(-5) \cdot (-2) \cdot 1 = -10.$$

Szukane współczynniki to: $a = 3$, $b = -10$.

Sprawdź, czy rozumiesz. Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Wielomian $W(x)$ jest zapisany w postaci iloczynu wielomianów pierwszego i drugiego stopnia. Podaj stopień wielomianu $W(x)$ i wyznacz jego pierwiastki.
   a) $W(x) = (x-2)\cdot(4-3x)\cdot(x^2+1)\cdot(x+4)$
   b) $W(x) = 3x\cdot(9-4x^2)\cdot(x+5)\cdot(x^2-x+2)$
   c) $W(x) = (x^2+2x-3)\cdot(2x^2+2)\cdot(4x^2+4x+1)$.

2. Podaj przykład wielomianu $W(x)$ czwartego stopnia zapisanego w postaci iloczynowej, którego pierwiastkami są tylko liczby:
   a) $-2, -1, 1, 2$ b) $0, 1, 2, 3$ c) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 8$.

3. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x)$.
   a) $W(x) = 3x^4+2x^3-5x^2+x-10$, $P(x) = x+2$
   b) $W(x) = -5x^4+7x^3+4x^2-6x+3$, $P(x) = x-1$
   c) $W(x) = 4x^4-7x^3+3x-14$, $P(x) = x-2$.

4. Wyznacz liczbę k, dla której wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = -x^3-(k-4)x^2-10k-15$, $P(x) = x+5$
   b) $W(x) = 2x^3+(k-1)x^2-(k+9)x-4$, $P(x) = x-2$
   c) $W(x) = 5x^4-(k^2+1)x^3+3kx-4$, $P(x) = x+1$.

5. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez podany obok dwumian $P(x)$.
   a) $W(x) = 6x^3-19x^2+11x+6$, $P(x) = x-2$
   b) $W(x) = 4x^3+24x^2+21x+5$, $P(x) = x+5$
   c) $W(x) = x^3+2x^2-1$, $P(x) = x+1$.

D 6. Wykaż, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Następnie wyznacz pozostałe pierwiastki (o ile istnieją) wielomianu $W(x)$.
   a) $W(x) = 6x^3+5x^2-7x-4$, $c=1$ b) $W(x) = 2x^3-x^2-20x+28$, $c=2$
   c) $W(x) = x^3+2x^2-x+6$, $c=-3$ d) $W(x) = -2x^3-3x^2+3x+2$, $c=-2$.

7. Wyznacz wartość m tak, aby liczba c była pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Dla wyznaczonej wartości m oblicz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
   a) $W(x) = x^3+(m-1)x^2-(m+2)x-6$, $c=-3$
   b) $W(x) = 15x^3+4(m+2)x^2+3x+m-8$, $c=-2$
   c) $W(x) = mx^4-5x^3-(m+7)x+40m$, $c=5$.

8. Liczby $\frac{1}{2}$ i 3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 4x^3-(2a+b)x^2-(4-a)x+a$.
   a) Oblicz a i b. b) Wyznacz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

9. Wielomian $W(x) = 4x^4 - 20x^3 + ax^2 + bx - 30$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = (x - 2)(2x - 3)$.
   a) Oblicz a i b. b) Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

10. Wielomian $W(x) = 2x^3 + ax^2 - 16x + b$ jest podzielny przez dwumian $2x + 6$. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 36.
   a) Oblicz a i b.
   D b) Wykaż, że wielomian $W(x)$ ma tylko dwa pierwiastki.

11. Wyznacz liczby a i b, dla których wielomian $W(x)$ jest podzielny przez trójmian $P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 2x^3 - (a + b)x^2 - 7x + 2b$, $P(x) = x^2 + x - 2$
   b) $W(x) = -2x^4 - (4a + 1)x^3 - 7x^2 + (3a - b)x + 3$, $P(x) = -2x^2 - x + 1$.

12. Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ trzeciego stopnia są liczby 1, 2 i 3. Wiedząc, że $W(4) + 12 = 0$, wyznacz wzór tego wielomianu w postaci uporządkowanej.

13. Wielomian $W(x)$ jest czwartego stopnia i jest podzielny przez wielomian $P(x) = (x + 1)^3$. Reszty z dzielenia tego wielomianu przez dwumiany $x - 1$ oraz $x - 2$ są odpowiednio równe 32 i 54. Podaj pierwiastki wielomianu $W(x)$. Wyznacz wzór tego wielomianu w postaci uporządkowanej.

14. Wielomian $W(x)$ jest czwartego stopnia i ma cztery pierwiastki: -1, 1, -2 i 2. Wiedząc, że wyraz wolny tego wielomianu jest równy 8, wyznacz wzór tego wielomianu w postaci uporządkowanej.

15. Wielomian $W(x) = x^3 + mx^2 + nx + 8$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 4x_1$. Wyznacz te pierwiastki. Oblicz m i n.

16. Wielomian $W(x) = x^3 - 17x^2 + ax + b$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2 = x_1 + 3$, $x_3 = x_1 + 5$. Wyznacz te pierwiastki. Oblicz a i b.

17. Pierwiastkami wielomianu $W(x) = (x + a)(x^2 + b)$ są liczby x_1, x_2, x_3. Wiedząc, że $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -3$ oraz $W(1) = -6$, oblicz te pierwiastki.

18. Wielomian $W(x) = x^3 + mx^2 - 21x + n$ ma trzy różne pierwiastki, których suma jest równa 0. Wiedząc, że suma wszystkich współczynników wielomianu też jest równa 0, wyznacz:
   a) m i n b) pierwiastki wielomianu $W(x)$.

D 19. Wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 + bx + c$ ma trzy pierwiastki. Jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych. Wykaż, że $b + c = 2$.

D 20. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$ ma trzy dodatnie pierwiastki. Jeden z nich jest średnią geometryczną dwóch pozostałych. Wykaż, że $2a + b = 0$.

Pierwiastki wymierne wielomianu

Całkowite pierwiastki wielomianu uporządkowanego można wyznaczyć bez trudu wtedy, gdy współczynniki wielomianu są liczbami całkowitymi.

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = 3x^3 + x + 4$.

Załóżmy, że liczba c, $c \in \boldsymbol{Z}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.
Wówczas $W(c) = 0$, czyli

$3c^3 + c + 4 = 0$, stąd
$3c^3 + c = -4$, czyli
$c \cdot (3c^2 + 1) = -4$

Po lewej stronie ostatniej równości występuje iloczyn dwóch liczb całkowitych c oraz $3c^2 + 1$, a po prawej stronie – liczba -4. Zatem liczba -4 jest podzielna przez c. Wynika stąd, że całkowitego pierwiastka wielomianu $W(x) = 3x^3 + x + 4$ należy szukać wśród całkowitych dzielników liczby -4, czyli wśród liczb: $-1, 4, 1, -4, -2, 2$.

Obliczamy wartość wielomianu $W(x)$ dla kolejnych liczb:

$W(-1) = 3 \cdot (-1)^3 + (-1) + 4 = 0$
$W(4) = 3 \cdot 4^3 + 4 + 4 \neq 0$
$W(1) = 3 \cdot 1^3 + 1 + 4 \neq 0$
$W(-4) = 3 \cdot (-4)^3 + (-4) + 4 \neq 0$
$W(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + (-2) + 4 \neq 0$
$W(2) = 3 \cdot 2^3 + 2 + 4 \neq 0$

Okazuje się, że jedynym całkowitym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jest liczba -1.

Twierdzenie 1.

Jeśli wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$, gdzie

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, oraz $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$,

są liczbami całkowitymi i wielomian $W(x)$ ma pierwiastek całkowity, to pierwiastek ten znajduje się w zbiorze dzielników wyrazu wolnego a_0.

Ćwiczenie 1. Wykaż, powołując się na twierdzenie 1., że wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ ma tylko dwa pierwiastki całkowite.

Ćwiczenie 2. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = 8x^3 - 10x^2 - 11x - 2$, wiedząc, że wielomian $W(x)$ ma pierwiastek całkowity.

Przykład 2.

Sprawdzimy, czy wielomian $W(x)$, gdzie $W(x)=2x^5+3x+1$, ma całkowite pierwiastki.

Wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$ są liczbami całkowitymi. Wyraz wolny jest równy 1, więc jego dzielnikami są tylko liczby 1 i -1. Obliczamy:

$W(-1)=-4\neq 0,\quad W(1)=6\neq 0.$

Wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków będących liczbami całkowitymi.

Ćwiczenie 3. Podaj przykład uporządkowanego wielomianu trzeciego stopnia, którego wszystkie współczynniki są całkowite i który nie ma całkowitego pierwiastka.

Wiesz, jak znaleźć całkowite pierwiastki wielomianu, którego współczynniki są liczbami całkowitymi. Poniższe twierdzenie informuje nas, jak wyznaczyć wymierne pierwiastki takiego wielomianu.

Twierdzenie 2. O wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych

Jeżeli wielomian $W(x)$, gdzie

$W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1x+a_0$, oraz $a_n\neq 0$ i $a_0\neq 0$,

o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci ułamka nieskracalnego, to licznik tego ułamka jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, natomiast mianownik – dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Założenie: $W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1x+a_0$

$a_n\neq 0$, $a_0\neq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in \mathbf{Z}$

liczba $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$,

gdzie $p\in\mathbf{Z}$ i $q\in\mathbf{Z}$, $q\neq 0$, $\mathrm{NWD}(p, q)=1$

Teza: p jest dzielnikiem wyrazu a_0 i q jest dzielnikiem wyrazu a_n

Dowód: Z założenia, że $W\left(\frac{p}{q}\right)=0$, otrzymujemy:

$$a_n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_2\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^2+a_1\cdot\frac{p}{q}+a_0=0,\quad \text{czyli}$$

$$a_n\cdot\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\cdot\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\ldots+a_2\cdot\frac{p^2}{q^2}+a_1\cdot\frac{p}{q}+a_0=0$$

Mnożymy obie strony równości przez q^n :

$$(*)\ a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0$$
$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} = -a_0 \cdot q^n$$
$$p \cdot \left(a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_2 \cdot pq^{n-2} + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 \cdot q^n$$

Z założenia wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$ oraz liczby p i q są całkowite, więc liczba w nawiasie jest całkowita. Zatem lewa strona równości jest podzielna przez p. Wobec tego prawa strona równości też jest podzielna przez p, czyli iloczyn $-a_0 \cdot q^n$ jest liczbą całkowitą podzielną przez p. Ponieważ $\text{NWD}(p, q) = 1$, więc również $\text{NWD}(p, q^n) = 1$. To znaczy, że liczby p i q^n nie mają wspólnych dzielników. Zatem p jest dzielnikiem czynnika a_0.

Wróćmy do równości $(*)$ i wyznaczmy liczbę $-a_n \cdot p^n$:

$$-a_n \cdot p^n = q \cdot \left(a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-3} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-2} + a_0 \cdot q^{n-1}\right).$$

Rozumując podobnie, dochodzimy do wniosku, że q jest dzielnikiem wyrazu a_n.

Ćwiczenie 4. Udowodnij twierdzenie 1., wykonując podobne rozumowanie, jakie zostało przedstawione w dowodzie twierdzenia 2.

Z twierdzenia 2. wynika następujący wniosek:

Jeśli wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, oraz $a_0 \neq 0$, o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, to jest on liczbą całkowitą, będącą dzielnikiem wyrazu wolnego.

Przykład 3.

Niech $W(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 1$. Wyznaczymy wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Niektóre współczynniki wielomianu $W(x)$ nie są liczbami całkowitymi.
Ale zauważ, że wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci

$$W(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^5 - x^2 + 2), \text{ czyli } W(x) = \frac{1}{2} \cdot Q(x),$$

gdzie $Q(x) = x^5 - x^2 + 2$.

Wielomian $Q(x)$ ma takie same pierwiastki, jak wielomian $W(x)$. Wszystkie współczynniki wielomianu $Q(x)$ są liczbami całkowitymi, a współczynnik przy x^5 jest równy 1. Zatem, jeśli wielomian $Q(x)$ ma pierwiastki wymierne, to są one liczbami całkowitymi i znajdują się wśród całkowitych dzielników wyrazu wolnego 2.
Pierwiastki wymierne, jeśli istnieją, należą do zbioru $\{-1, 1, -2, 2\}$. Sprawdź, że:

$$Q(-1) = 0, \qquad Q(1) \neq 0, \qquad Q(-2) \neq 0, \qquad Q(2) \neq 0.$$

Tylko liczba -1 jest pierwiastkiem wymiernym wielomianu $Q(x)$. Zatem wielomian $W(x)$ też ma jeden wymierny pierwiastek równy -1.
Zauważmy, że st. $W(x) = 5$. Można więc wnioskować, że pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$ są liczbami niewymiernymi albo liczba -1 jest jedynym pierwiastkiem tego wielomianu.

Przykład 4.

Wyznaczymy, o ile istnieją, wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$, gdzie

$$W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3.$$

Wielomian $W(x)$ ma wszystkie współczynniki całkowite, więc spełnia założenie twierdzenia 2. Wyraz wolny to liczba 3, współczynnik przy najwyższej potędze x to liczba 2.

Liczba p jest całkowitym dzielnikiem liczby 3 tylko wtedy, gdy $p \in \{-1, 1, -3, 3\}$.

Liczba q jest całkowitym dzielnikiem liczby 2 tylko wtedy, gdy $q \in \{-1, 1, -2, 2\}$.

Jeśli wielomian $W(x)$ ma pierwiastki wymierne, to należą one do zbioru

$$\left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

Sprawdźmy:

$$W(1) \neq 0, \quad W(-1) = 0, \quad W\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad W\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0, \quad W(3) = 0.$$

Wyznaczyliśmy trzy pierwiastki wymierne wielomianu $W(x)$: -1, $\frac{1}{2}$ oraz 3. Zauważ, że są to wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, bo st.$W(x) = 3$.

Ćwiczenie 5. Wykaż, że wielomian $4x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ ma dwa pierwiastki wymierne i dwa pierwiastki niewymierne. Wyznacz te pierwiastki.

Przykład 5.

Udowodnimy, że liczba $\sqrt[3]{5}$ jest niewymierna.

Zauważamy, że liczba $\sqrt[3]{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = x^3 - 5$, bo

$$W\left(\sqrt[3]{5}\right) = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - 5 = 0.$$

Na podstawie ostatniego wniosku wiemy, że jeśli wielomian $W(x)$ ma pierwiastki wymierne, to należą one do zbioru $\{-1, 1, -5, 5\}$. Liczba $\sqrt[3]{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ i nie należy do zbioru $\{-1, 1, -5, 5\}$, więc nie jest liczbą wymierną.
Zatem $\sqrt[3]{5}$ jest liczbą niewymierną.

Przykład 6.

Pokażemy, że liczba $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą naturalną.

Oznaczmy $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. Otrzymaną równość podnieśmy stronami do potęgi trzeciej.

$$x^3=5\sqrt{2}+7-3\cdot\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)^2}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}+3\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}-5\sqrt{2}+7$$

$$x^3=14-3\cdot\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)$$

$$x^3=14-3\cdot\sqrt[3]{50-49}\cdot x,\qquad \text{czyli}$$

$$x^3+3x-14=0.$$

Tak więc dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x)=x^3+3x-14$. Współczynniki tego wielomianu są całkowite oraz współczynnik przy x^3 jest równy 1. Na podstawie twierdzenia 1. poszukamy całkowitego pierwiastka wielomianu wśród dzielników liczby 14.

$$W(1)\neq 0,\quad W(2)=8+6-14=0$$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-2$, a ilorazem tego dzielenia jest wielomian

$$Q(x)=x^2+2x+7,\qquad \text{stąd}$$

$$W(x)=(x-2)(x^2+2x+7).$$

Wyróżnik trójmianu x^2+2x+7 jest ujemny, więc wielomian $Q(x)$ nie ma pierwiastków. To znaczy, że jedynym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jest liczba 2. W takim razie

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2,\qquad \text{co kończy dowód.}$$

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz całkowite pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x)=x^3+4x^2-3$
   b) $W(x)=3x^4-11x^2-4$
   c) $W(x)=3x^3+6x^2-3x-6$
   d) $W(x)=-x^4-4x^3+5$
   e) $W(x)=x^4-2x^3-9x^2+2x+8$
   f) $W(x)=2x^3+4x^2-10x-12$.
2. Sprawdź, ile pierwiastków całkowitych ma wielomian:
   a) $W(x)=x^5-7x^4-x+7$
   b) $W(x)=x^3-2x^2-4x+3$.

D 3. Wykaż, że wielomian:
   a) $W(x)=3x^4-14x^3+17x^2-6x$ ma trzy całkowite pierwiastki.
   b) $W(x)=6x^3+19x^2+16x+4$ ma tylko wymierne pierwiastki.

D 4. Wykaż, że wielomian $W(x) = 3x^3 - x^2 + 6x - 2$ nie ma pierwiastków całkowitych.

5. Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ jest liczba -3. Wiedząc, że b jest liczbą pierwszą, oblicz współczynniki wielomianu $W(x)$.

6. Dwa różne pierwiastki wielomianu $W(x) = x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 15$ są liczbami pierwszymi.
   a) Oblicz a i b.
   D b) Wykaż, że wielomian $W(x)$ nie ma innych pierwiastków.

7. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, wiedząc, że ma on pierwiastek całkowity.
   a) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - x - 2$
   c) $W(x) = 25x^3 - 20x^2 - 7x + 2$ d) $W(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$
   e) $W(x) = 2x^3 - 7x^2 - 14x - 5$ f) $W(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$.

D 8. Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 6$ nie ma pierwiastków wymiernych.

9. Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$ b) $W(x) = 8x^3 + 18x^2 + 3x - 2$
   c) $W(x) = 2x^3 - x^2 - 12x - 9$ d) $W(x) = 10x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 2x - 1$
   e) $W(x) = 16x^4 - 32x^3 - 8x^2 + 24x + 9$ f) $W(x) = 6x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x - 2$.

D 10. Liczba $-3{,}5$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = px^3 + 11x^2 + 16x + q$. Wykaż, że jeśli liczby p i q są liczbami pierwszymi, to wielomian $W(x)$ ma tylko jeden pierwiastek będący liczbą całkowitą.

11. Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 2x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$ b) $W(x) = 2x^3 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
   c) $W(x) = 1{,}5x^3 - 2{,}5x^2 - 0{,}5x - 1$ d) $W(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}25x^2 - 0{,}5x - 0{,}25$
   e) $W(x) = 2x^3 - \frac{12}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{4}{5}$ f) $W(x) = 2x^4 - \frac{14}{3}x^3 + \frac{10}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{4}{3}$.

D 12. Wykaż, że liczba:
   a) $\sqrt[3]{3}$ b) $2\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[5]{5}$ d) $0{,}5\sqrt[4]{32}$.
   jest liczbą niewymierną.

13. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ b) $W(x) = 6x^3 - 19x^2 + 2x + 3$
   c) $W(x) = 3x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 16x - 4$ d) $W(x) = -2x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$
   e) $W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 2$ f) $W(x) = 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 26x - 15$.

Pierwiastek wielokrotny

Rozpatrzmy wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = (x-3)^4(x+1)^2(x-2)$.
Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, bo $W(3) = 0$.
Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-3$, ale również przez wielomiany
$(x-3)^2$, $(x-3)^3$, $(x-3)^4$.
Czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-3)^5$? Oczywiście, że nie. Liczba 3 nie jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$, gdzie $Q(x) = (x+1)^2(x-2)$, bo $Q(3) = 16 \neq 0$.
Powiemy, że liczba 3 jest pierwiastkiem czterokrotnym wielomianu $W(x)$.

Definicja 1.

Pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $W(x)$, gdzie $k \in \boldsymbol{N}_+$, nazywamy liczbę a wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$. Liczbę k nazywamy **krotnością pierwiastka.**

Ćwiczenie 1. Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = (x+5)^2(x^2-25)$ i podaj ich krotności.

Przykład 1.

Niech $W(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x + 2$. Pokażemy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ i zbadamy krotność tego pierwiastka.

Sprawdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

$$W(1) = -1^4 + 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 0$$

Na mocy twierdzenia Bezouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-1$. Wykonajmy dzielenie wielomianu przez $(x-1)^2$, czyli dzielenie przez trójmian $x^2 - 2x + 1$. Jeśli reszta z tego dzielenia będzie różna od 0, to otrzymamy, że 1 jest pierwiastkiem jednokrotnym; a jeśli reszta będzie równa 0, to ten pierwiastek będzie co najmniej dwukrotny. Po wykonaniu dzielenia otrzymujemy iloraz $G(x)$,

$G(x) = -x^2 - x + 2$ i resztę 0. Zatem

$$W(x) = (x-1)^2\underbrace{(-x^2 - x + 2)}_{G(x)}$$

Trójmian kwadratowy $G(x)$ możemy zapisać w postaci iloczynowej,

$$G(x) = -1(x-1)(x+2)$$

Ostatecznie wielomian $W(x)$ można przedstawić w postaci

$W(x) = -1(x-1)^2(x-1)(x+2)$, czyli

$W(x) = -1(x-1)^3(x+2)$.

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-1)^3$. Nie jest natomiast podzielny przez $(x-1)^4$, bo liczba 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $x+2$.
Liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 2.

Wykażemy, że liczba 4 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, gdzie

$W(x) = x^5 - 6x^4 - 7x^3 + 92x^2 - 144x + 64$.

Aby udowodnić, że liczba 4 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, wystarczy pokazać, że:

- wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-4)^2$ oraz
- wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez wielomian $(x-4)^3$.

Wykonujemy dzielenie

$W(x) : (x-4)^2$, czyli $W(x) : (x^2 - 8x + 16)$.

Po podzieleniu otrzymujemy iloraz $Q(x)$, $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ i resztę 0 (sprawdź!).
Pozostaje jeszcze wykazać, że wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez $(x-4)^3$.
Można wykonać dzielenie wielomianu $W(x)$ przez $(x-4)^3$ lub dzielenie wielomianu $Q(x)$ przez $x-4$.
My obliczymy resztę z dzielenia wielomianu $Q(x)$ przez $x-4$:

$r = Q(4) = 64 + 2 \cdot 16 - 28 + 4 = 72 \neq 0$

Wielomian $Q(x)$ nie jest podzielny przez $x-4$.
To znaczy, że wielomian $W(x)$, gdzie

$W(x) = (x-4)^2 \cdot Q(x)$ nie jest podzielny przez $(x-4)^3$, co kończy dowód.

Przykład 3.

Wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 27x^3 + mx^2 + 36x + n$ ma pierwiastek trzykrotny. Wyznaczymy liczby m i n. Podamy ten pierwiastek.

Niech p oznacza trzykrotny pierwiastek wielomianu $W(x)$. Ponieważ st.$W(x) = 3$, więc wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$W(x) = 27(x-p)^3$.

Stosujemy wzór na sześcian różnicy dwóch wyrażeń:

$W(x) = 27x^3 - 81px^2 + 81p^2x - 27p^3$.

Z definicji równości wielomianów porównujemy współczynniki i otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} 36 = 81p^2 \\ m = -81p \\ n = -27p^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = \dfrac{4}{9} \\ m = -81p \\ n = -27p^3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} p = -\dfrac{2}{3} \\ m = 54 \\ n = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} p = \dfrac{2}{3} \\ m = -54 \\ n = -8 \end{cases} \right)$$

Istnieją dwa wielomiany spełniające warunki zadania.

1) Jeśli $m = 54$ i $n = 8$, to $W(x) = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$, a liczba $-\dfrac{2}{3}$ jest trzykrotnym pierwiastkiem.
2) Jeśli $m = -54$ i $n = -8$, to $W(x) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$, a trzykrotnym pierwiastkiem jest liczba $\dfrac{2}{3}$.

Przykład 4.

Dany jest wielomian $W(x)$, gdzie $W(x)=(x-1)[x^2-(m+1)x+4]^2$. Ustalimy krotność pierwiastków tego wielomianu ze względu na wartość parametru m.

Wielomian $W(x)$ jest iloczynem dwumianu $x-1$ i kwadratu wielomianu $Q(x)$, gdzie $Q(x)=x^2-(m+1)x+4$.
Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Pozostałe jego pierwiastki to pierwiastki wielomianu $Q(x)$.
Rozpatrzymy trzy przypadki ze względu na wartość wyróżnika trójmianu $Q(x)$.

$$\Delta=[-(m+1)]^2-16=(m+1)^2-16=(m+1-4)(m+1+4)$$
$$=(m-3)(m+5)$$
$$\Delta=0 \Leftrightarrow m\in\{-5,3\}$$
$$\Delta<0 \Leftrightarrow m\in(-5,3)$$
$$\Delta>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)$$

<u>I przypadek</u>
Jeśli $m\in(-5,3)$, to $\Delta<0$ i wielomian $Q(x)$ nie ma pierwiastków. Wówczas wielomian $W(x)$ ma tylko jeden pierwiastek, równy 1, który jest jednokrotny.

<u>II przypadek</u>
Jeśli $m\in\{-5,3\}$, to wielomian $Q(x)$ ma jeden pierwiastek dwukrotny. Sprawdzamy, jaki to pierwiastek.

- $m=-5$, to $Q(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$. Wówczas $W(x)=(x-1)(x+2)^4$. Wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek jednokrotny, równy 1, oraz jeden pierwiastek czterokrotny, równy -2.
- $m=3$, to $Q(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$. Wtedy $W(x)=(x-1)(x-2)^4$. Wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek jednokrotny, równy 1, oraz jeden pierwiastek czterokrotny, równy 2.

<u>III przypadek</u>
Jeśli $m\in(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)$, to wielomian $Q(x)$ ma dwa pierwiastki jednokrotne. Sprawdzimy, czy istnieje wśród nich pierwiastek równy 1. Obliczamy $Q(1)$:

$$Q(1)=1^2-(m+1)\cdot 1+4=-m+4$$
$$Q(1)=0 \Leftrightarrow m=4,\ 4\in(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)$$

Stąd otrzymujemy:

- Jeśli $m=4$, to jeden z pierwiastków wielomianu $Q(x)$ jest równy 1, zaś drugi jest równy 4 (sprawdź!). Wówczas $W(x)=(x-1)[(x-1)(x-4)]^2$ czyli $W(x)=(x-1)^3(x-4)^2$.
  Liczba 1 jest pierwiastkiem trzykrotnym wielomianu $W(x)$, a liczba 4 – pierwiastkiem dwukrotnym.
- Jeśli $m\in(-\infty,-5)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$, to oba pierwiastki wielomianu $Q(x)$ są różne od 1. Wtedy wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek jednokrotny, równy 1, oraz dwa inne pierwiastki, każdy o krotności dwa.

Podsumujmy nasze spostrzeżenia.
Wielomian $W(x) = (x - 1)[x^2 - (m + 1)x + 4]^2$ ma:

- tylko jeden pierwiastek jednokrotny wtedy, gdy $m \in (-5, 3)$
- jeden pierwiastek jednokrotny oraz jeden pierwiastek czterokrotny wtedy, gdy $m \in \{-5, 3\}$
- jeden pierwiastek trzykrotny oraz jeden dwukrotny wtedy, gdy $m = 4$
- jeden pierwiastek jednokrotny i dwa pierwiastki dwukrotne wtedy, gdy $m \in (-\infty, -5) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Podaj pierwiastki wielomianu $W(x)$ i określ krotność każdego z nich, jeśli:
   a) $W(x) = (2x - 1)(x^3 - 1)(x + 1)^2(4x^2 - 1)$
   b) $W(x) = 3x^2(x + 2)^2(4x^2 + x)(x^2 + 4x + 4)$
   c) $W(x) = (x^2 - 4)^3(x^2 - 7x + 10)(25 - x^2)(x^2 + 2)$
   d) $W(x) = (2x^2 + 4x - 6)^3(-x^2 - 6x - 9)(x^3 - x^2)$.

2. Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$ i podaj ich krotności.

D 3. Wykaż, że liczba p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ i określ jego krotność.
   a) $W(x) = 4x^3 + 16x^2 - 19x + 5,\ p = \frac{1}{2}$
   b) $W(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16,\ p = 2$.

D 4. Wykaż, że liczba a jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 36x + 32,\ a = -2$
   b) $W(x) = 9x^5 - 6x^4 + x^3 - 9x^2 + 6x - 1,\ a = \frac{1}{3}$.

D 5. Wykaż, że liczba c jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 8x^4 - 28x^3 - 54x^2 - 29x - 5,\ c = -\frac{1}{2}$
   b) $W(x) = -2x^5 + 18x^4 - 53x^3 + 45x^2 + 27x - 27,\ c = 3$.

6. Liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 - 2bx + 4$. Oblicz a i b.

7. Liczba -1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^5 + 3x^4 + (3a + b)x^3 + 7x^2 + 6x + a$. Oblicz a i b.

8. Dany jest wielomian $W(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot (kx - 2)$, gdzie $k \neq 0$.
   a) Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x)$ i ustal ich krotność, wtedy gdy $k = 2$.
   b) Dla jakiej wartości k liczba -3 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)$?

Rozkładanie wielomianów na czynniki

Definicja 1.
Wielomianem rozkładalnym nazywamy wielomian różny od wielomianu zerowego wtedy, gdy można go przedstawić w postaci iloczynu wielomianów mających stopień różny od zera. W przeciwnym przypadku wielomian nazywamy **wielomianem nierozkładalnym.**

Przykład 1.

a) Wielomian $2x^3 - 2$ jest rozkładalny, bo można go przedstawić w postaci iloczynu wielomianu pierwszego stopnia i wielomianu drugiego stopnia:
$$(2x-2)(x^2+x+1)$$
b) Dwumian $2x - 2$ nie jest rozkładalny. Można go przedstawić co najwyżej w postaci iloczynu wielomianu stopnia zerowego i wielomianu stopnia pierwszego, np. $2(x-1)$.
c) Trójmian kwadratowy $x^2 + x + 1$ nie jest rozkładalny, bo wyróżnik tego trójmianu jest ujemny $(\Delta = -3)$, trójmian nie ma postaci iloczynowej.

Wszystkie wielomiany stopnia zerowego i wielomiany stopnia pierwszego są nierozkładalne.
Wielomiany stopnia drugiego są rozkładalne tylko wtedy, gdy można je przedstawić w postaci iloczynu dwóch czynników liniowych, czyli takie, których wyróżnik jest nieujemny $(\Delta \geqslant 0)$.

Ćwiczenie 1. Przedstaw wielomian $3x^2 - 9x - 30$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia pierwszego.

Rozkład wielomianu na czynniki polega na przedstawieniu wielomianu w postaci iloczynu przynajmniej dwóch wielomianów możliwie najniższego stopnia, z których każdy ma stopień większy od zera. Takie rozkłady jednego wielomianu, w których czynniki różnią się tylko czynnikiem stałym, uważamy za jednakowe.

W przypadku wielomianów stopnia większego niż 2 prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Rozkład ten jest jednoznaczny, z dokładnością do kolejności czynników i do stałej.

Z powyższego twierdzenia wynika, że wszystkie wielomiany stopnia trzeciego i wyższych stopni są rozkładalne. Rozłożyć wielomian na czynniki to znaczy zapisać wielomian w postaci iloczynu czynników pierwszego stopnia lub czynników drugiego stopnia, które nie są rozkładalne.

Twierdzenie 1. nie podpowiada sposobu, w jaki moglibyśmy rozłożyć na czynniki wszystkie wielomiany co najmniej trzeciego stopnia. Poniżej omówimy kilka metod.

Stosowanie wzorów skróconego mnożenia

Przykład 2.

Rozłożymy wielomiany na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) $F(x) = x^4 + 10x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2 = (x^2 + 5)(x^2 + 5)$ $\qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Czynnik $x^2 + 5$ jest nierozkładalny.

b) $G(x) = x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Czynnik $x^2 + 9$ jest nierozkładalny.

c) $H(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$ $\qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

d) $P(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$ $\qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

e) $Q(x) = (x + 2)^3 - 27 = (x + 2)^3 - 3^3 =$
$= [(x + 2) - 3] \cdot [(x + 2)^2 + (x + 2) \cdot 3 + 3^2] =$ $\qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$= (x - 1)(x^2 + 4x + 4 + 3x + 6 + 9)$
$Q(x) = (x - 1)(x^2 + 7x + 19)$

Czynnik $x^2 + 7x + 19$ jest nierozkładalny, bo $\Delta = -27$, $\Delta < 0$.

Ćwiczenie 2. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia, jeśli:

a) $W(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ b) $W(x) = 16x^4 - 1$ c) $W(x) = 125 + (x - 1)^3$

Przykład 3.

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = x^4 + 9$.

Doprowadzamy wzór wielomianu do różnicy kwadratów $a^2 - b^2$.

$$W(x) = x^4 + 9 = x^4 + 6x^2 - 6x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - 6x^2 = (x^2 + 3)^2 - \left(\sqrt{6}x\right)^2$$

Korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ i otrzymujemy:

$$W(x) = \left(x^2 + 3 - \sqrt{6}x\right)\left(x^2 + 3 + \sqrt{6}x\right)$$

Czynniki $x^2 - \sqrt{6}x + 3$ oraz $x^2 + \sqrt{6}x + 3$ nie są rozkładalne, $\Delta < 0$. Zatem

$$W(x) = \left(x^2 - \sqrt{6}x + 3\right)\left(x^2 + \sqrt{6}x + 3\right).$$

Powyższy przykład pokazuje, że istnieją wielomiany parzystego stopnia większego od 2, które można rozłożyć jedynie na czynniki stopnia drugiego. Takie wielomiany nie mają pierwiastków. Jeśli chcemy rozłożyć na czynniki wielomian, który nie ma pierwiastków, to najczęściej stosujemy wzory skróconego mnożenia.

Grupowanie wyrazów i wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias

Przykład 4.

Rozłożymy poniższe wielomiany na czynniki, wyłączając wspólny czynnik poza nawias.

a) $F(x) = 2x^5 + 6x^4 = \mathbf{2x^4} \cdot x + \mathbf{2x^4} \cdot 3 = \mathbf{2x^4}(x+3)$, czyli
$F(x) = 2x^4(x+3)$

b) $G(x) = 3x(x^2+1) - (x^2+1) = 3x \cdot \mathbf{(x^2+1)} - 1 \cdot \mathbf{(x^2+1)} = \mathbf{(x^2+1)}(3x-1)$, czyli
$G(x) = (x^2+1)(3x-1)$

c) $H(x) = 4x^2(x-5) - (5-x)x + 2(x-5) = \mathbf{(x-5)}4x^2 + \mathbf{(x-5)}x + \mathbf{(x-5)} \cdot 2 =$
$= \mathbf{(x-5)}(4x^2+x+2)$

Sprawdź, że wielomian $4x^2+x+2$ jest nierozkładalny. Zatem
$H(x) = (x-5)(4x^2+x+2)$.

Ćwiczenie 3. Rozłóż na czynniki wielomian $W(x)$:

a) $W(x) = -x^2(x+1) + 49(x+1)$ b) $W(x) = 2x(x^2-9) + 5(9-x^2)$

Przykład 5.

Rozłożymy wielomiany na czynniki poprzez grupowanie wyrazów i szukanie wspólnego czynnika otrzymanych grup.

a) $Q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 15 = (2x^3+6x^2) + (5x+15) = \mathbf{2x^2(x+3)} + \mathbf{5(x+3)} =$
$= \mathbf{(x+3)(2x^2+5)}$

Wielomian $2x^2+5$ jest nierozkładalny, zatem
$Q(x) = (x+3)(2x^2+5)$.

b) $P(x) = 4x^3 + 20x^2 - x - 5 = (4x^3+20x^2) - (x+5) = \mathbf{4x^2} \cdot \mathbf{(x+5)} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{(x+5)} =$
$= \mathbf{(x+5)} \cdot \mathbf{(4x^2-1)} = \mathbf{(x+5)} \cdot \mathbf{(2x-1)} \cdot \mathbf{(2x+1)}$, stąd
$P(x) = (x+5)(2x-1)(2x+1)$.

Ćwiczenie 4. Rozłóż na czynniki wielomiany z przykładu 5., grupując wyrazy pierwszy z trzecim i drugi z czwartym.

Przykład 6.

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = x^3 - 7x + 6$, metodą grupowania wyrazów.

Jednomian $-7x$ jest równy $-x-6x$. Grupujemy wyrazy:
$W(x) = x^3 \mathbf{-7x} + 6 = x^3 \mathbf{-x-6x} + 6 = (x^3-x) + (-6x+6) = x \cdot (x^2-1) - 6 \cdot (x-1)$

Rozkładamy trójmian x^2-1 na czynniki ze wzoru skróconego mnożenia. Wówczas
$W(x) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{(x-1)} \cdot \mathbf{(x+1)} - 6 \cdot \mathbf{(x-1)} = \mathbf{(x-1)} \cdot [\mathbf{x} \cdot \mathbf{(x+1)} - 6]$, czyli
$W(x) = \mathbf{(x-1)} \cdot (x^2+x-6)$.

Łatwo stwierdzić, że $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$. Zatem
$W(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$.

Szukanie pierwiastków wielomianu i stosowanie twierdzenia Bézouta

Z twierdzenia 1. wynika, że wielomiany stopnia nieparzystego mają w rozkładzie na czynniki co najmniej jeden wielomian stopnia pierwszego. W takim razie każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek.

Przykład 7.

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 4x^3 + 4x^2 - 13x + 5$.

Wielomian $W(x)$ ma współczynniki całkowite. Szukamy całkowitego pierwiastka tego wielomianu wśród dzielników wyrazu wolnego, czyli w zbiorze $\{-1, 1, -5, 5\}$.

$W(-1) = 18 \neq 0, \qquad W(1) = 0.$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$, a ilorazem tego dzielenia jest wielomian

$Q(x) = 4x^2 + 8x - 5.$

Zatem

$W(x) = (x-1)(4x^2 + 8x - 5).$

Znajdujemy pierwiastki x_1, x_2 trójmianu $4x^2 + 8x - 5$.

$$\Delta = 144, \qquad \sqrt{\Delta} = 12, \qquad x_1 = -2\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

Trójmian $Q(x)$ zapisujemy w postaci iloczynowej:

$$Q(x) = 4\left(x + 2\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{czyli} \qquad Q(x) = (2x+5)(2x-1)$$

Ostatecznie $W(x) = (x-1)(2x+5)(2x-1)$.

Ćwiczenie 5. Rozłóż wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 3x^3 - 13x - 2$ na czynniki, znajdując jego całkowity pierwiastek.

Ćwiczenie 6. Rozłóż wielomian $W(x)$, gdzie $W(x) = 24x^3 - 10x^2 - 3x + 1$ na czynniki, znajdując jego pierwiastki wymierne.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia.
   a) $W(x) = 4x^4 - 4x^2 + 1$
   b) $W(x) = 9x^4 + 42x + 49$
   c) $W(x) = 256x^4 - 1$
   d) $W(x) = (2x-5)^2 - (x^2 - 6x + 9)$
   e) $W(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
   f) $W(x) = 216 + x^3$
   g) $W(x) = 8x^3 - 125$
   h) $W(x) = (x-2)^3 - 27x^3$.
2. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki, wyłączając wspólny czynnik poza nawias.
   a) $W(x) = 6x^5 + 3x^4 + 3x^3$
   b) $W(x) = (x^2+3)(2x-1) + (x^2+3)(x-3)$
   c) $W(x) = (x-2)(2x^2+5) - (x-2)x^2$
   d) $W(x) = (x-2)(4x^2+1) + 2x^2(2-x)$

3. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki, stosując najpierw grupowanie wyrazów.
   a) $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$
   b) $W(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$
   c) $W(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}$
   d) $W(x) = 3x^3 + 6x^2 + 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}$
   e) $W(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x - 3$
   f) $W(x) = 3x^4 - x^3 - 24x + 8$
   g) $W(x) = 5x^4 - 3x^3 + 5x - 3$
   h) $W(x) = 64x^4 - 64x^3 + 27x - 27$
4. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia.
   a) $W(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$
   b) $W(x) = (x + 3)^3 + 2(x + 3)^2 + (x + 3)$
   c) $W(x) = 4(x - 2)^3 - x + 2$
   d) $W(x) = 2(x - 5)^3 - (x^2 - 25)(x - 5)$
   e) $W(x) = (x - 1)^3 - 4(x - 1)^2 + 4(x - 1)$
   f) $W(x) = (x + 1)^3 - 4x - 4$
5. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia.
   a) $W(x) = x^2(x^2 + 3)^2 - 16x^2$
   b) $W(x) = 27x - x(x + 2)^3$
   c) $W(x) = (2x - 1)^3 + (x + 2)^3$
   d) $W(x) = -3x^3 + 5x^2 + 3x - 5$
   e) $W(x) = 4x^4 + x^3 - 36x^2 - 9x$
   f) $W(x) = 6x^5 + 9x^4 + 2\sqrt{5}x^3 + 3\sqrt{5}x^2$
   g) $W(x) = (2x + 1)^3 - (x - 1)^3$
   h) $W(x) = x^4 - 6x^2 + 9$
6. Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki, znajdując jego całkowity pierwiastek.
   a) $W(x) = x^3 - 3x + 2$
   b) $W(x) = 4x^3 - x - 3$
   c) $W(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$
   d) $W(x) = 2x^3 - x^2 - x - 10$
   e) $W(x) = x^3 + x^2 - x + 2$
   f) $W(x) = 4x^3 - 12x^2 + 3x + 5$
   g) $W(x) = 5x^3 - 4x^2 + x - 2$
   h) $W(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

D 7. Uzasadnij, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastka. Następnie rozłóż go na czynniki stopnia drugiego.
   a) $W(x) = x^4 + 25$
   b) $W(x) = x^4 + 16$
   c) $W(x) = x^4 + 7x^2 + 16$
   d) $W(x) = x^4 + 9x^2 + 81$
8. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki.
   a) $W(x) = 5x^6 - 5$
   b) $W(x) = x^8 - 1$
   c) $W(x) = 64x^6 - 1$
   d) $W(x) = 64x^6 - 16x^3 + 1$
9. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki.
   a) $W(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$
   b) $W(x) = 3x^3 - 13x^2 + 16x - 4$
   c) $W(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$
   d) $W(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$
   e) $W(x) = 6x^3 + 17x^2 + 11x + 2$
   f) $W(x) = 2x^3 - 2x^2 - 9\frac{1}{2}x + 5$
10. Rozłóż wielomiany na czynniki:
   a) $W(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
   b) $W(x) = 9x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 10x + 2$
   c) $W(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 11x^2 - 12x - 4$
   d) $W(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

Równania wielomianowe

Potrafisz już rozwiązywać równania liniowe i kwadratowe, czyli równania wielomianowe stopnia pierwszego i stopnia drugiego.

Definicja 1.

Równaniem wielomianowym stopnia n, $n \in \boldsymbol{N}$, nazywamy równanie, które można przekształcić równoważnie do postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n.

Równanie wielomianowe stopnia co najmniej pierwszego doprowadzamy do postaci $W(x) = 0$. Wówczas rozwiązaniami tego równania będą wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$. Jeśli wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków, to równanie nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 1. Podaj rozwiązania równania:
a) $3(x+2)(2x-1) = 0$ b) $(x^2-1)(x+3) = 0$.

Żeby wyznaczyć pierwiastki wielomianu $W(x)$, wygodnie jest rozłożyć ten wielomian na czynniki. Wiesz już, że każdy wielomian stopnia większego niż drugi można rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego lub stopnia drugiego.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $x^4 = -4x^2 - 4x^3$.

Równanie najpierw porządkujemy, czyli doprowadzamy do postaci $W(x) = 0$.

$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0$

Ze wszystkich wyrazów wielomianu można wyłączyć wspólny czynnik x^2.

$x^2(x^2 + 4x + 4) = 0$

Do wyrażenia w nawiasie stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$x^2(x+2)^2 = 0$

Iloczyn jest równy 0 tylko wtedy, gdy

$x = 0 \lor x + 2 = 0,$ czyli

$x = 0 \lor x = -2.$

Równanie ma dwa rozwiązania: 0 oraz -2.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $5x^3 - 15x^2 - x + 3 = 0$.

Grupujemy wyrazy. Wspólny czynnik wyłączamy poza nawias.

$$5x^2(x-3)-(x-3)=0$$
$$(x-3)(5x^2-1)=0$$

Wielomian stopnia drugiego rozkładamy za pomocą wzoru skróconego mnożenia.

$$(x-3)\left(\sqrt{5}x-1\right)\left(\sqrt{5}x+1\right)=0, \quad \text{zatem}$$
$$x-3=0 \ \lor \ \sqrt{5}x-1=0 \ \lor \ \sqrt{5}x+1=0$$
$$x=3 \ \lor \ x=\frac{\sqrt{5}}{5} \ \lor \ x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Równanie ma trzy rozwiązania: $3, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^2$.

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$, dane równanie sprowadzamy do postaci:

$$(x-1)^3=(x-1)^2, \qquad \text{stąd}$$
$$(x-1)^3-(x-1)^2=0.$$

Wyłączamy wspólny czynnik $(x-1)^2$ poza nawias.

$$(x-1)^2[(x-1)-1)]=0$$
$$(x-1)^2(x-2)=0, \qquad \text{zatem}$$
$$x=1 \ \lor \ x=2$$

Równanie ma dwa rozwiązania: 1 oraz 2.

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $6x^3-13x^2+4x+3=0$.

To równanie jest uporządkowane. W tym przypadku skorzystamy z twierdzenia o całkowitych pierwiastkach wielomianu. Niech $W(x)=6x^3-13x^2+4x+3$.

Pierwiastka całkowitego szukamy wśród całkowitych dzielników wyrazu wolnego wielomianu, czyli liczby 3. Mamy:

$$W(-1)=6\cdot(-1)^3-13\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+3=-20\neq 0$$
$$W(1)=6\cdot 1^3-13\cdot 1^2+4\cdot 1+3=0$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-1$.

Wykonamy dzielenie schematem Hornera.

	6	–13	4	3
1		6	–7	–3
	6	–7	–3	$\boxed{0}$

$$W(x)=(x-1)(6x^2-7x-3)$$

Rozwiązujemy równanie:

$$(x-1)\cdot(6x^2-7x-3)=0$$

$$x-1=0 \quad \vee \quad 6x^2-7x-3=0$$

$$\Delta=121, \ \sqrt{\Delta}=11$$

$$x_1=-\frac{1}{3} \quad x_2=1\frac{1}{2}$$

Równanie $6x^3-13x^2+4x+3=0$ ma trzy rozwiązania: $1, -\frac{1}{3}$ oraz $1\frac{1}{2}$.

Przykład 5.

Rozwiążemy równanie $x^6=6x^3+16$.

Najpierw równanie porządkujemy:

$x^6-6x^3-16=0,$ stąd

$(x^3)^2-6\cdot x^3-16=0$

Równanie sprowadzamy do równania kwadratowego przez podstawienie zmiennej pomocniczej t, gdzie $t=x^3$. Mamy:

$$t^2-6t-16=0$$

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot(-16)=100, \ \sqrt{\Delta}=10$$

$$t_1=-2, \ t_2=8$$

Teraz wracamy do podstawienia:

$$x^3=-2 \quad \vee \quad x^3=8$$

Funkcja $y=x^3$ jest różnowartościowa, zatem otrzymujemy:

$$x=-\sqrt[3]{2} \quad \vee \quad x=2$$

Równanie ma dwa rozwiązania: $-\sqrt[3]{2}$ oraz 2.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż równania $x^3+2=0$ oraz $x^3-8=0$, rozkładając lewe strony tych równań na czynniki.

Przykład 6.

Rozwiążemy równanie $12x^3+16x^2-5x-3=0$.

Wielomian $W(x)$, gdzie $W(x)=12x^3+16x^2-5x-3=0$ ma całkowite współczynniki. Znajdziemy jego wymierny pierwiastek $\frac{p}{q}$, stosując twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu.

Liczba p jest dzielnikiem liczby (-3), a liczba q jest dzielnikiem liczby 12. Wtedy

$$\frac{p}{q}\in\left\{-1,1,-3,3,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},-\frac{1}{12},\frac{1}{12},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\}.$$

Wielomian nie ma pierwiastków całkowitych (sprawdź!). Stwierdzamy, że pierwiastkiem wielomianu jest liczba $\frac{1}{2}$, bo

$$W\left(\frac{1}{2}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\cdot\frac{1}{2}-3=1\frac{1}{2}+4-2\frac{1}{2}-3=0$$

Na podstawie twierdzenia Bezouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-\frac{1}{2}$. Ilorazem tego dzielenia jest wielomian $12x^2+22x+6$ (sprawdź!). Równanie przyjmuje postać:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(12x^2+22x+6)=0, \qquad \text{stąd}$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \vee \quad 12x^2+22x+6=0$$

$$6x^2+11x+3=0$$

$$\Delta=49, \quad \sqrt{\Delta}=7,$$

$$x_1=-1\frac{1}{2} \quad x_2=-\frac{1}{3}$$

Równanie $12x^3+16x^2-5x-3=0$ ma trzy rozwiązania: $-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{2}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż równanie:
   a) $(3x-2)(2x^2+\sqrt{2})(x+3)=0$
   b) $(x^3-8)(x^2-x+2)(x^2+2x-3)=0$
   c) $(4x^2-9)(125x^3+1)(x+2)=0$
   d) $(4x^2+8x-5)(27-8x^3)=0$
   e) $(4x^2+20x+25)(81x^4-1)=0$
   f) $(x^4-16)(x^2-5)(x^3-64)=0$.
2. Rozwiąż równanie:
   a) $3x^3+18x=-15x^2$
   b) $x^3+3x^2=16x+48$
   c) $9x^3+4x=12x^2$
   d) $x^4-3x^2=4$
   e) $x^3=6-5x$
   f) $3\sqrt{6}x^3+\sqrt{6}x^2=-12x-4$.
3. Rozwiąż równanie:
   a) $24x^4-81x=0$
   b) $x^4+49=14x^2$
   c) $18x^3-27x^2=2x-3$
   d) $x^6-7x^3=8$
   e) $2x^3=x+1$
   f) $(2x+1)^3-64=0$.

4. Rozwiąż równanie:
a) $(8x^3-1)(x^2+6x+9)=0$
b) $6x^3+8x^2-3x-4=0$
c) $x^8+64=20x^4$
d) $(3x^2-1)(x^4+3x^2+2)=0$
e) $2x^3-6x^2=x-3$
f) $5x^3-2x^2+5\sqrt{3}x-2\sqrt{3}=0.$

5. Rozwiąż równanie:
a) $2x^3+2=x^2+4x$
b) $x^4=6x^2+27$
c) $\sqrt{8}x^3-6\sqrt{2}=4\sqrt{18}x-\sqrt{2}x^2$
d) $10x^3-1=3x(x+2)$
e) $x^6+3x^3=40$
f) $3x^4-17x^2+20=0.$

6. Rozwiąż równanie:
a) $x(x^3-1)(3x-5)(3x^2+7)=0$
b) $4x^5+x^3=4x^4$
c) $x^3-3x^2=4x-12$
d) $2x^2\cdot(x^2-3)(x^2-4x+4)=0$
e) $3x^8-2x^4-1=0$
f) $x^3+3x+4=0.$

7. Rozwiąż równanie:
a) $x^3-5x^2=-10+2x$
b) $x^4-3x^3=5x^2-15x$
c) $(3x-1)(x^2-2x-2)=0$
d) $x^8+2x^4=3$
e) $15x+20=6x^3+8x^2$
f) $x^3-8x+7=0.$

8. Rozwiąż równanie:
a) $5x^3+11x^2+7x+1=0$
b) $5x^3+x=2(1+5x^2)$
c) $x^3+8=3x^2+6x$
d) $x^2+6x=x^3$
e) $x^3-x^2=3x+1$
f) $x^8+3x^4+2=0.$

9. Rozwiąż równanie:
a) $x^3+x(x-3)^2=4x^2-3x$
b) $x(x^2-8)=4-x^2\cdot(5x+3)$
c) $(2x-1)^3-(x+2)^3=x^2\cdot(6x-13)-9$
d) $2x^4-(x+1)^3+x^3-26=15x^2-3x(x+1)$
e) $28x+x^3-64=2(x-2)^3$
f) $(2x+1)(4x^2-2x+1)+14+(4x+1)^2=0.$

10. Rozwiąż równanie:
a) $(x-2)(x^2+2x+4)=2x(2-x)$
b) $4+(x+1)(x^2-x+1)=(x+2)^2-3x$
c) $(x^3-1)^2=7(x-1)(x^2+x+1)$
d) $19+x^2+(x-2)(x^2+2x+4)=(x+3)^2-3x$
e) $(x^2-3x)^2-(2x^2-1)^2=13x^2+3x+5$
f) $(2x+3)^2-(2x+1)(4x^2-2x+1)=10x+9.$

11. Rozwiąż równanie:
a) $|x^3+27|=4x^2-12x+36$
b) $x^2\cdot|x-1|+(x-1)(4x-5)=0$
c) $x^4+40=|5x^3+8x|$
d) $2x^3+2x^2+|x^2-1|=0.$

Zadania prowadzące do równań wielomianowych

Rozwiążemy przykładowe zadania, których rozwiązanie sprowadza się do znalezienia rozwiązań równania wielomianowego stopnia co najmniej trzeciego.

Przykład 1.

Wyznaczymy liczbę rzeczywistą, która ma taką własność: iloczyn kwadratu tej liczby i kwadratu liczby o 1 od niej większej wynosi 144.

Analiza:

x – szukana liczba
$x+1$ – liczba o 1 większa od szukanej liczby
$x^2 \cdot (x+1)^2$ – iloczyn kwadratów obu liczb

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$x^2(x+1)^2 = 144$
$[x(x+1)]^2 - 12^2 = 0$
$[x(x+1) - 12] \cdot [x(x+1) + 12] = 0$
$(x^2 + x - 12) \cdot (x^2 + x + 12) = 0$
$x^2 + x - 12 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x + 12 = 0$
$\Delta = 49$ $\qquad \Delta = -47,\ -47 < 0$
$x_1 = -4,\ x_2 = 3$ $\qquad$ równanie sprzeczne

Sprawdzenie:

- Jeśli $x = -4$, to $x + 1 = -3$. Iloczyn kwadratów tych liczb jest równy: $(-4)^2 \cdot (-3)^2 = 16 \cdot 9 = 144$
- Sprawdź, że warunki zadania spełnia także liczba 3.

Odpowiedź:

Dwie liczby spełniają warunki zadania: –4 oraz 3.

Przykład 2.

Prostopadłościenne pudełko o podstawie kwadratowej ma objętość równą 32 dm^3. Wyznaczymy wymiary pudełka, wiedząc, że długości krawędzi są liczbami naturalnymi i krawędź boczna jest o 6 dm dłuższa od krawędzi podstawy.

Analiza:

x – długość krawędzi podstawy pudełka (dm); $x \in \boldsymbol{N}_+$
$x+6$ – wysokość pudełka (dm)
$x^2 \cdot (x+6)$ – objętość pudełka (dm^3)
32 – objętość pudełka (dm^3)

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$x^2 \cdot (x+6) = 32$$

$$x^3 + 6x^2 - 32 = 0$$

Z treści zadania wiemy, że długości krawędzi pudełka są liczbami naturalnymi.

Szukamy naturalnego pierwiastka wielomianu

$$x^3 + 6x^2 - 32$$

wśród dzielników liczby 32.

Jedynym naturalnym dzielnikiem liczby 32, dla którego wartość wielomianu jest równa 0, jest liczba 2 (sprawdź!). Zatem

$$x = 2,\ x + 6 = 8.$$

Sprawdzenie:
Pudełko o wymiarach: 2 dm na 2 dm na 8 dm ma objętość 32 dm^3.

Odpowiedź:
Pudełko ma wymiary: 2 dm na 2 dm na 8 dm.

Ćwiczenie 1. Wyznacz długości krawędzi dwóch sześcianów, wiedząc, że jedna z krawędzi jest dłuższa od drugiej o 1 dm, a objętości tych sześcianów różnią się o 37 dm^3.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + (a^3 - 2a^2 + a)x^2 - 3x$. Wyznacz wartość a i rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki.
2. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + (a^3 - 2)x^2 - (2a^2 - 3a + 25)$ przez dwumian $x + 1$ jest równa -20. Wyznacz a i oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$.
3. Ola jest o 2 lata starsza od swojego brata Igora, który ma więcej niż rok. Oblicz ile lat ma Ola, jeśli wiadomo, że kwadrat wieku Oli pomniejszony o 8 jest równy sześcianowi wieku Igora.
4. W pewnej liczbie trzycyfrowej cyfra jedności jest równa 5, a cyfra dziesiątek jest o 3 mniejsza od cyfry setek. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że iloczyn cyfry dziesiątek i kwadratu cyfry setek jest równy iloczynowi cyfry jedności i cyfry dziesiątek.
5. Wyznacz liczbę, której podwojony kwadrat jest równy iloczynowi sześcianu tej liczby i liczby o 4 od niej większej.
6. Iloczyn kwadratu liczby a i kwadratu liczby o 4 od niej większej jest równy 441. Wyznacz tę liczbę.

Równania wielomianowe z parametrem

Rozwiązywanie równań wielomianowych z parametrem zilustrujemy przykładami.

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru p, dla których jedno z rozwiązań równania

$$3x^3 + (p-2)x^2 - 4x = 0$$

jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych rozwiązań.

Lewą stronę równania zapisujemy w postaci iloczynu:

$$x \cdot \left[3x^2 + (p-2)x - 4\right] = 0, \qquad \text{stąd}$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 3x^2 + (p-2)x - 4 = 0$$

Jednym z rozwiązań danego równania jest liczba 0.
Obliczamy wyróżnik równania kwadratowego $3x^2 + (p-2)x - 4 = 0$.

$$\Delta = (p-2)^2 + 48, \quad \Delta > 0$$

Dla dowolnej wartości parametru p równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania x_1, x_2.
Ze wzorów Viete'a otrzymujemy:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{4}{3} \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 = -\frac{p-2}{3}$$

Z pierwszej równości wynika, że liczby x_1 i x_2 mają przeciwne znaki. Zatem rozwiązanie równe 0 jest średnią arytmetyczną rozwiązań x_1 i x_2, czyli

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 0$$

Obliczamy:

$$-\frac{p-2}{3 \cdot 2} = 0, \quad \text{stąd} \quad p = 2$$

Szukana wartość parametru p jest równa 2.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru p, dla których równanie
$(x-2)\left[x^2 - (p-2)x - p + 1\right] = 0$ ma dwa rozwiązania.

Zauważamy, że $(x-2)\left[x^2 - (p-2)x - p + 1\right] = 0$ wtedy, gdy

$$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - (p-2)x - p + 1 = 0$$

$$x = 2$$

Jednym z rozwiązań danego równania jest liczba 2. Zatem równanie

$$(x-2)\left[x^2 - (p-2)x - p + 1\right] = 0$$

ma dwa rozwiązania wtedy, gdy równanie

$$x^2 - (p-2)x - p + 1 = 0$$

ma jedno rozwiązanie różne od 2 albo dwa rozwiązania, z których jedno jest równe 2.

Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 - (p-2)x - p + 1$ i obliczmy jej wyróżnik.

$$\Delta = (p-2)^2 - 4 \cdot (1-p) = p^2$$

- Funkcja f ma jedno miejsce zerowe tylko wtedy, gdy $p = 0$. Wówczas

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1. Zatem początkowe równanie ma dwa rozwiązania: 2 oraz -1.

- Jeśli $p \neq 0$, to $\Delta > 0$. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe. Chcemy, żeby jednym z nich była liczba 2, czyli żeby był spełniony warunek $f(2) = 0$. Ponieważ

$$f(2) = 4 - (p-2) \cdot 2 - p + 1 = 9 - 3p, \quad \text{więc}$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow p = 3$$

Równanie ma dwa rozwiązania tylko wtedy, gdy $p = 0$ lub $p = 3$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równanie z przykładu 1. w przypadku, gdy $p = 3$.

Ćwiczenie 2. Podaj wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(x-2)(3x-m)(x-6) = 0$ ma dwa rozwiązania.

Przykład 3.

Pokażemy, że dla każdej wartości parametru m równanie $x^3 - x^2 + (m^2 + 2)x - m^2 - 2 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.

Zauważamy, że rozwiązaniem równania jest liczba 1, bo

$$1^3 - 1^2 + m^2 + 2 - m^2 - 2 = 0.$$

Na podstawie twierdzenia Bezouta wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + (m^2 + 2)x - m^2 - 2$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Ilorazem tego dzielenia jest wielomian

$$Q(x) = x^2 + m^2 + 2.$$

Zatem początkowe równanie można zapisać w postaci:

$$(x-1)(x^2 + m^2 + 2) = 0, \quad \text{stąd}$$
$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + m^2 + 2 = 0$$
$$x = 1 \qquad \text{równanie sprzeczne}$$

Jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Ćwiczenie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których równanie $(x-p)(x-p^2)(x-p^3) = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^4 + 5mx^2 + 4m^2 + 3m = 0$ ma trzy rozwiązania.

Dane równanie sprowadzamy do równania kwadratowego przez podstawienie $x^2 = t$.

$$t^2 + 5mt + 4m^2 + 3m = 0 \quad \wedge \quad t = x^2$$

Równanie początkowe ma trzy rozwiązania tylko wtedy, gdy równanie z niewiadomą t ma dwa rozwiązania, z których jedno jest dodatnie, a drugie równe zeru. Warunki zadania są spełnione, wtedy gdy:

$$\Delta > 0 \;\wedge\; t_1 + t_2 > 0 \;\wedge\; t_1 \cdot t_2 = 0$$

Obliczamy:

- $\Delta = (5m)^2 - 4(4m^2 + 3m) = 9m^2 - 12m = 3m(3m - 4)$
- $t_1 + t_2 = -5m$
- $t_1 \cdot t_2 = 4m^2 + 3m = m(4m + 3)$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} 3m(3m-4)>0 \\ -5m>0 \\ m(4m+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty,0)\cup\left(1\frac{1}{3},+\infty\right) \\ m\in(-\infty,0) \\ m=0 \vee m=-0{,}75 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m=-0{,}75$$

Równanie ma trzy rozwiązania wtedy, gdy $m = -0{,}75$.

Przykład 5.

Wykażemy, że jeśli równanie $x^3 + 0{,}5(p + 1)x - 9 = 0$ ma trzy rozwiązania, to $p < -1$.

Założenie: równanie $x^3 + 0{,}5(p + 1)x - 9 = 0$ ma trzy rozwiązania x_1, x_2, x_3
Teza: $p < -1$

Dowód: Z założenia wielomian $W(x) = x^3 + 0{,}5(p + 1)x - 9$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3.
Korzystamy ze wzorów Viete'a, zobacz str. 411.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0{,}5(p+1) \\ x_1x_2x_3 = 9 \end{cases}$$

Z równości $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ wynika równość $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0$, czyli

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 0$$

Podstawiamy w miejsce nawiasu liczbę $0{,}5(p + 1)$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot 0{,}5(p + 1) = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -p - 1$$

Wyrażenie $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jest dodatnie, bo co najmniej dwa pierwiastki są różne od 0.
Zatem $-p - 1 > 0$, stąd $p < -1$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

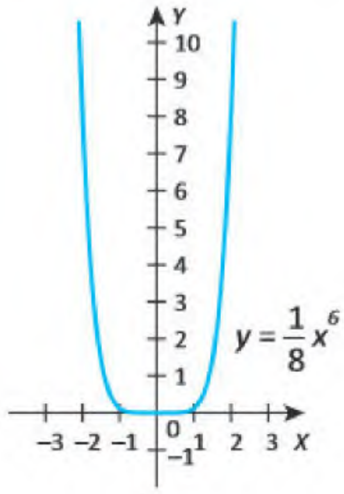
1. Wyznacz liczbę p, dla której jedno z rozwiązań równania $4x^3 + 3px^2 = x(x+1)$ jest średnią arytmetyczną pozostałych dwóch rozwiązań.
2. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $(x+1) \cdot (x^2 + kx + 3) = 0$ ma dwa rozwiązania.
3. D Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, równanie $(x^2 + 9) \cdot [2x^2 + (m+3)x - 2] = 0$ ma dwa rozwiązania.
4. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $(x+2) \cdot [x^2 - (2k+5)x + 1] = 0$ ma trzy rozwiązania.
5. Dla jakich wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, równanie $(x-1) \cdot [x^2 - (3p-1)x + p] = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie?
6. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $(x+3) \cdot [2x^2 - (p+5)x + 8] = 0$ ma dwa rozwiązania. Dla obliczonych wartości parametru p podaj te rozwiązania.
7. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $(x^2 - 6x + 8) \cdot [x^2 + (m-1)x + 16] = 0$ ma trzy rozwiązania. Dla obliczonych wartości parametru m, podaj te rozwiązania.
8. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, równanie $(x^3 - 8) \cdot [3x^2 + (4k+1)x + 3] = 0$ ma trzy rozwiązania?
9. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, równanie $(x^2 + 4x - 5) \cdot [x^2 - 2(m+4)x + 1] = 0$ ma dwa rozwiązania?
10. Dla jakich wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, równanie $(x^2 - 5x + 6) \cdot [4px^2 - (3p+2)x + p] = 0$ ma cztery rozwiązania?
11. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, równanie $x^3 + (2m-7)x^2 + 4m^2x = 0$ ma trzy rozwiązania, z których tylko dwa są dodatnie?
12. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $x^3 + kx^2 + 4x = 0$ ma trzy rozwiązania nieujemne.
13. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, równanie $(m+1)x^3 + 4x^2 + (m+4)x = 0$ ma trzy rozwiązania spełniające warunek $x_1 + x_2 + x_3 = m + 6$?
14. Dla jakich wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, równanie $3x^3 + 2(p-2)x^2 - 2px + 1 = 0$ ma trzy rozwiązania?
15. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $x^4 - (m+1)x^2 + 1 = 0$ ma cztery rozwiązania.
16. Wyznacz liczbę k, dla której równanie $x^4 + (k+1)x^2 + (k+4)^2 = 0$ ma trzy rozwiązania.

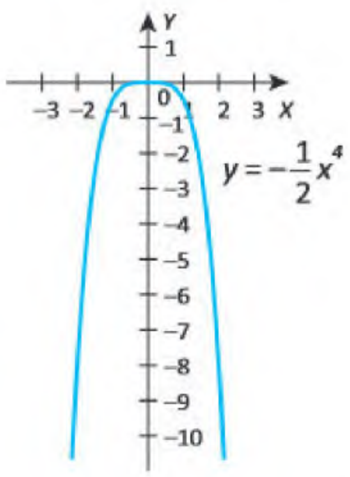
Funkcje wielomianowe

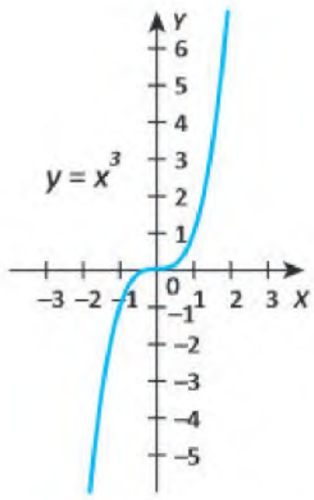
Definicja 1.
Funkcję określoną wzorem $y = W(x)$, gdzie $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest wielomianem jednej zmiennej rzeczywistej x, nazywamy **funkcją wielomianową** zmiennej x. Dziedziną funkcji wielomianowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

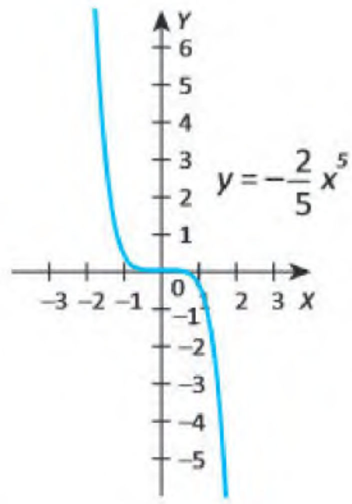
Przykładami funkcji wielomianowych są funkcje określone wzorami:
$y = 3$, $\quad y = -x + 5 \quad y = x^2 + x + 1 \quad y = -5x^3 + 6x + 8 \quad y = x^7 + 9x^6$

Omówimy niektóre własności funkcji wielomianowych, których stopień jest większy od 2. Przyjrzyjmy się najpierw przykładowym wykresom funkcji wielomianowych typu $y = ax^n$, gdzie $a \neq 0$, $n > 2$.

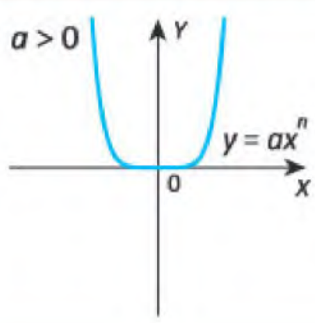
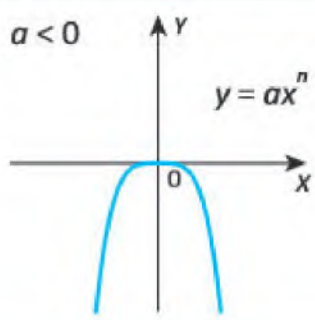
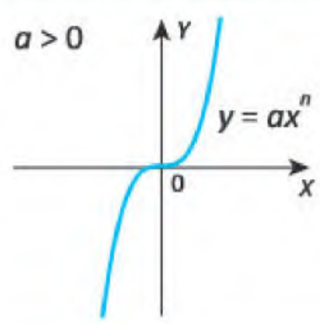
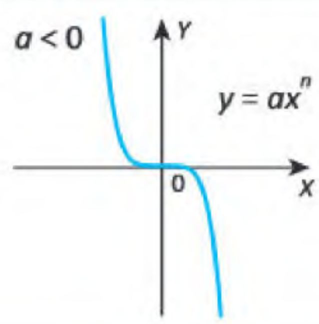






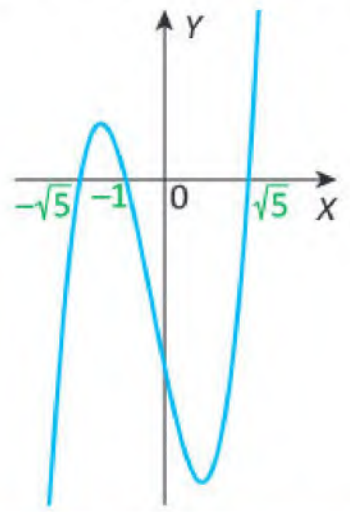


Spróbuj udowodnić poniższe własności funkcji $y = ax^n$, gdzie $a \neq 0$.
1) Jedynym miejscem zerowym tej funkcji jest liczba 0.
2) Jeśli n jest liczbą parzystą, to funkcja ta jest funkcją parzystą, (wówczas jej wykres jest symetryczny względem osi OY).
3) Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja ta jest funkcją nieparzystą, (wówczas jej wykres jest symetryczny względem punktu $O(0, 0)$).

Wykres funkcji wielomianowej $y = ax^n$, $a \neq 0$, $n \in N_+$, $n > 2$	
n – liczba parzysta	n – liczba nieparzysta
 	 

Przedstawimy teraz kilka wykresów innych funkcji wielomianowych, uzyskanych za pomocą komputera. Szczególnie interesują nas te, które mają więcej niż jedno miejsce zerowe. Zwrócimy uwagę na związek wykresu funkcji $y = W(x)$ z krotnością pierwiastków wielomianu $W(x)$ i z wartością współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x.

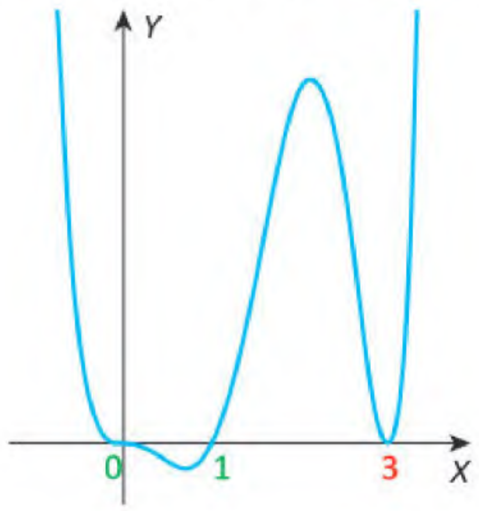
1) $F(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$ czyli
$F(x) = (x+1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$



Miejscami zerowymi funkcji $y = F(x)$ są trzy liczby: $-\sqrt{5}$, -1, $\sqrt{5}$.
Liczby **$-\sqrt{5}$, -1, $\sqrt{5}$** to **jednokrotne pierwiastki** wielomianu $F(x)$.

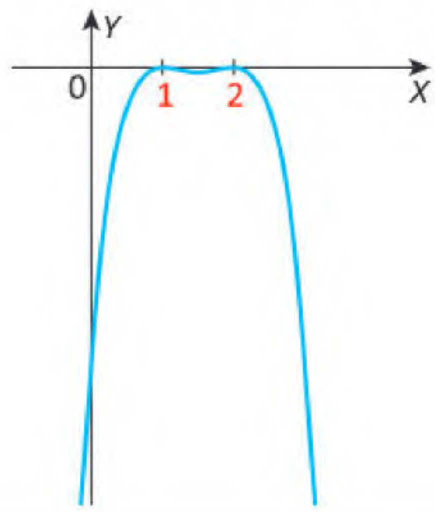
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest dodatni: $a_3 = 1$, $a_3 > 0$

2) $G(x) = 0{,}5x^6 - 3{,}5x^5 + 7{,}5x^4 - 4{,}5x^3$
czyli $G(x) = 0{,}5x^3(x-1)(x-3)^2$



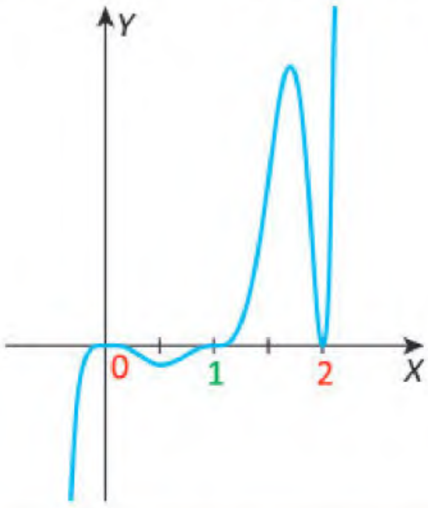
Funkcja $y = G(x)$ ma trzy miejsca zerowe: 0, 1 oraz 3. Liczby 0, 1, 3 to pierwiastki wielomianu $G(x) = 0{,}5x^3(x-1)(x-3)^2$, przy czym:
0 – pierwiastek trzykrotny
1 – pierwiastek jednokrotny
3 – pierwiastek dwukrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest dodatni: $a_6 = 0{,}5$, $a_6 > 0$

3) $H(x) = -x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 12x - 4$
czyli $H(x) = -(x-2)^2(x-1)^2$



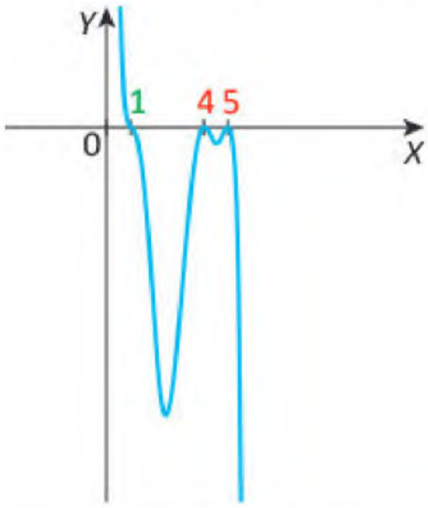
Funkcja $y = H(x)$ ma dwa miejsca zerowe: 1 oraz 2.
Liczby 1 oraz 2 są pierwiastkami wielomianu $H(x) = -(x-2)^2(x-1)^2$, przy czym:
1 – pierwiastek dwukrotny
2 – pierwiastek dwukrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny: $a_4 = -1$, $a_4 < 0$.

4) $P(x) = 10x^4(x-2)^2(x-1)^3$



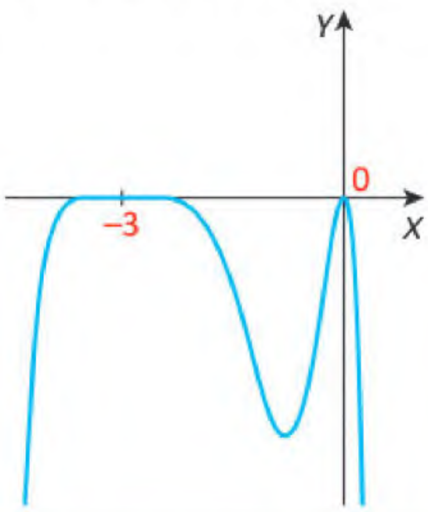
Funkcja $y = P(x)$ ma trzy miejsca zerowe: 0, 1 oraz 2.
Liczby 0, 1, 2 są pierwiastkami wielomianu $P(x) = 10x^4(x-2)^2(x-1)^3$, przy czym:
0 – pierwiastek czterokrotny
1 – pierwiastek trzykrotny
2 – pierwiastek dwukrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest dodatni: $a_9 = 10$, $a_9 > 0$.

5) $Q(x) = 0{,}25(x-5)^2(x-4)^2(1-x)^3$



Funkcja $y = Q(x)$ ma trzy miejsca zerowe: 1, 4 oraz 5.
Liczby 1, 4, 5 są pierwiastkami wielomianu $Q(x) = 0{,}25(x-5)^2(x-4)^2(1-x)^3$, przy czym:
1 – pierwiastek trzykrotny
4 – pierwiastek dwukrotny
5 – pierwiastek dwukrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny: $a_7 = -0{,}25$, $a_7 < 0$.

6) $W(x) = -0{,}01x^2(x+3)^6$



Funkcja $y = W(x)$ ma dwa miejsca zerowe: –3 oraz 0.
Liczby –3 i 0 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = -0{,}01x^2(x+3)^6$, przy czym:
–3 – pierwiastek sześciokrotny
0 – pierwiastek dwukrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny: $a_8 = -0{,}01$, $a_8 < 0$.

Wykres funkcji wielomianowej ma kształt „wężyka", który można naszkicować na kartce bez odrywania ołówka.

Miejsca zerowe funkcji wielomianowej są pierwiastkami wielomianu, który opisuje tę funkcję. Jeśli pierwiastek x_0 ma krotność nieparzystą, to wykres przecina oś OX w punkcie $(x_0, 0)$. Jeśli pierwiastek ma parzystą krotność, to wykres „dotyka" oś OX w punkcie $(x_0, 0)$, nie przecinając tej osi. Szkicowanie wykresu warto rozpocząć z prawej strony kartki. Wówczas linię kreślimy:

- od góry – gdy współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej wielomianu jest dodatni, lub
- od dołu – gdy współczynnik ten jest ujemny.

Przykład 1.

Kierując się powyższymi zasadami, naszkicujemy wykresy następujących funkcji wielomianowych:

a) $y = -0{,}2x(x + 3)(2 - x)(x + 1)$ b) $y = -(x + 2)^2(x - 1)$.

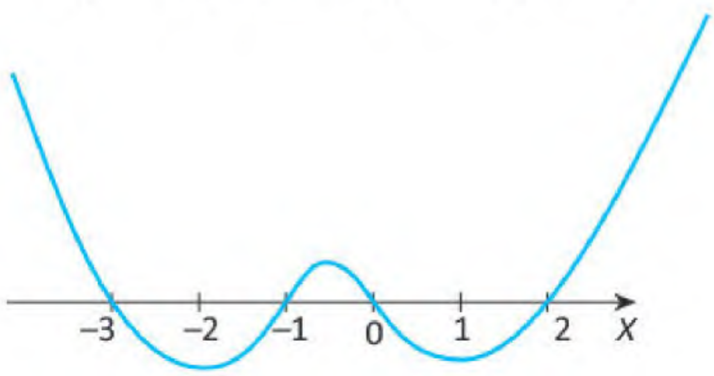
Następnie porównamy otrzymane wykresy z wykresami sporządzonymi komputerowo.

Ad a) Wielomian $W(x) = -0{,}2x(x + 3)(2 - x)(x + 1)$ ma cztery pierwiastki jednokrotne: -3, -1, 0 oraz 2. Współczynnik a_4 przy najwyższej potędze zmiennej jest dodatni, ponieważ

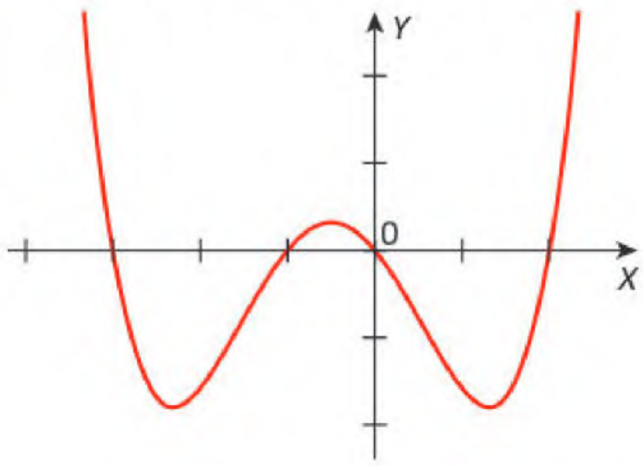
$a_4 = -0{,}2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 0{,}2$. (mnożymy współczynniki przy x)

Szkicowanie wykresu rozpoczynamy od góry z prawej strony.

Szkic wykresu funkcji
$y = -0{,}2x(x + 3)(2 - x)(x + 1)$



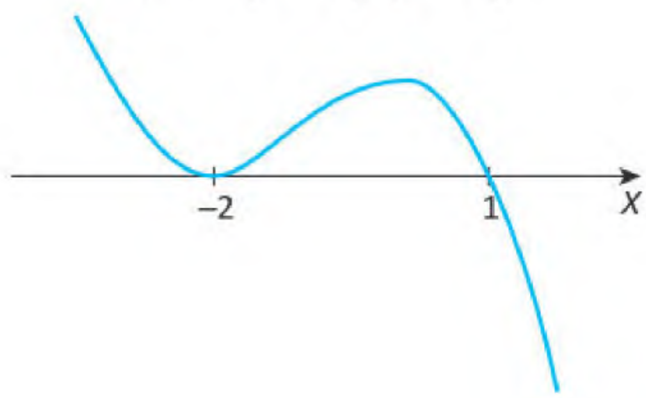
Wydruk komputerowy



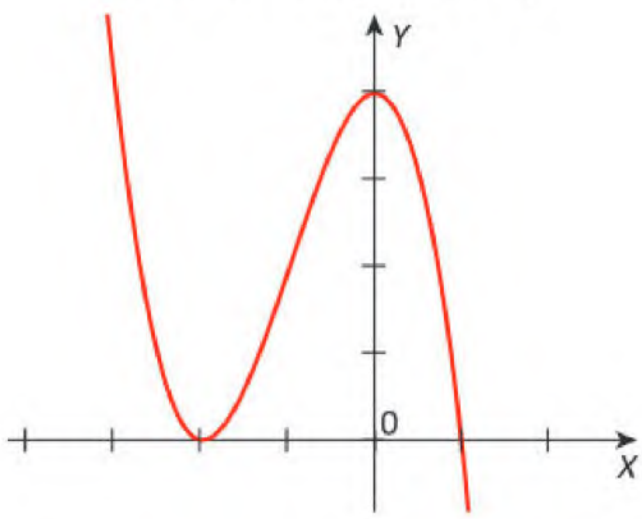
Ad b) Wielomian $W(x) = -(x + 2)^2(x - 1)$ ma dwa pierwiastki: -2 (dwukrotny) oraz 1 (jednokrotny). Współczynnik a_3 przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny, ponieważ

$a_3 = -1 \cdot 1^2 \cdot 1 = -1$. (mnożymy współczynniki przy x)

Szkic wykresu funkcji
$y = -(x + 2)^2(x - 1)$



Wydruk komputerowy

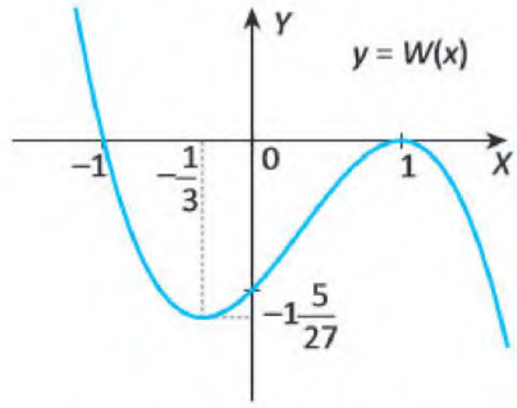


Szkic wykresu funkcji wielomianowej jest wystarczający do określania argumentów, dla których funkcja wielomianowa przyjmuje wartości dodatnie albo dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne. Ten fakt wykorzystamy w rozwiązywaniu nierówności wielomianowych, które omówimy w kolejnym temacie.

Przykład 2.

Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej trzeciego stopnia $y = W(x)$. Do wykresu tej funkcji należą punkty $A(-1, 0)$, $B\left(-\frac{1}{3}, -1\frac{5}{27}\right)$, $C(1, 0)$.

Ustalimy wzór funkcji $y = W(x)$.



Wielomian $W(x)$ ma dwa pierwiastki: -1 oraz 1. Z wykresu odczytujemy, że krotność pierwiastka -1 jest nieparzysta, zaś krotność pierwiastka 1 jest parzysta. Ponieważ st. $W(x) = 3$, więc -1 jest pierwiastkiem jednokrotnym, zaś 1 – pierwiastkiem dwukrotnym. Wzór szukanej funkcji jest następujący:

$$y = a(x+1)(x-1)^2, \text{ gdzie } a < 0.$$

Teraz korzystamy z informacji, że do wykresu funkcji należy punkt $B\left(-\frac{1}{3}, -1\frac{5}{27}\right)$ i obliczamy współczynnik a:

$$-\frac{32}{27} = a \cdot \left(-\frac{1}{3}+1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}-1\right)^2, \qquad \text{więc}$$

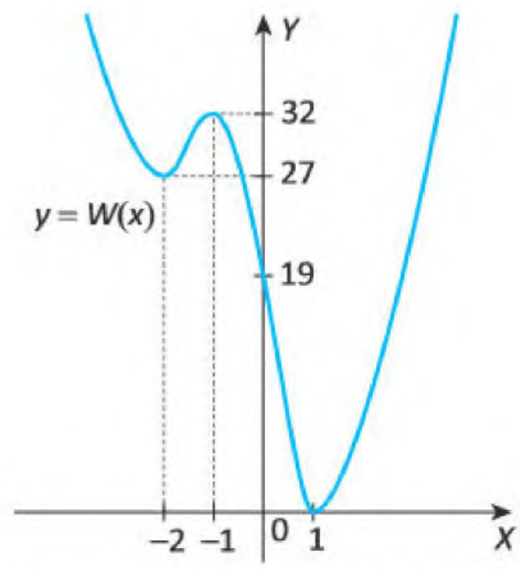
$$-\frac{32}{27} = a \cdot \frac{32}{27} \quad \text{stąd} \quad a = -1.$$

Zatem $y = -1(x+1)(x-1)^2$ czyli $y = -x^3 + x^2 + x - 1$.

Przykład 3.

Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie st. $W(x) = 4$. Do wykresu funkcji należą punkty: $A(-2, 27)$, $B(-1, 32)$, $C(0, 19)$, $D(1, 0)$.

Wyznaczymy wzór tej funkcji.



Na podstawie wykresu funkcji stwierdzamy, że współczynnik a_4 przy najwyższej potędze zmiennej x jest liczbą dodatnią, a liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ o parzystej krotności. Ponieważ st. $W(x) = 4$, więc 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym lub czterokrotnym.

Zatem wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci

$$W(x) = (x-1)^2 \cdot Q(x), \text{ gdzie } Q(x) = ax^2 + bx + c \text{ i } a > 0.$$

Wzór funkcji wielomianowej ma postać

$y=(x-1)^2\cdot(ax^2+bx+c)$, gdzie $a>0$.

Punkty $A(-2, 27)$, $B(-1, 32)$ i $C(0, 19)$ należą do wykresu szukanej funkcji, więc ich współrzędne spełniają wzór tej funkcji. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases}27=9\cdot(4a-2b+c)\\32=4\cdot(a-b+c)\\19=c\end{cases}\quad \text{stąd} \quad \begin{cases}a=3\\b=14\\c=19\end{cases}$$

Zapisujemy wzór wielomianu $Q(x)$:

$Q(x)=3x^2+14x+19$.

Wówczas

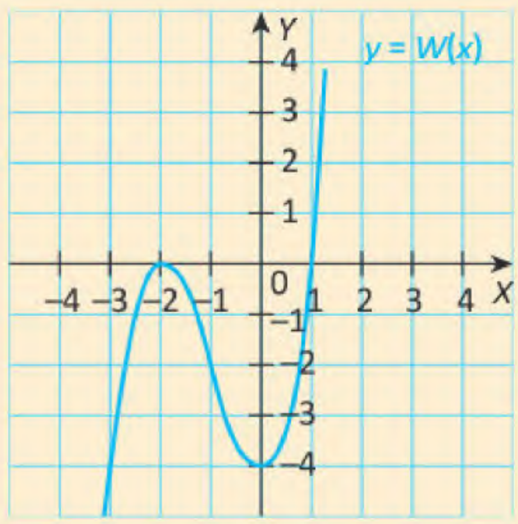
$W(x)=(x-1)^2\cdot(3x^2+14x+19)=(x^2-2x+1)(3x^2+14x+19)$

$W(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+19$

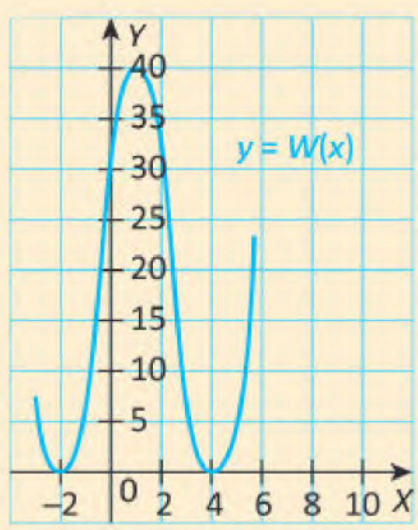
Szukana funkcja wielomianowa ma wzór $y=3x^4+8x^3-6x^2-24x+19$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Naszkicuj wykresy funkcji wielomianowych:
   a) $y=(x+3)(x-1)(2-x)$
   b) $y=-2(x+2)^2(x-5)(x+1)$
   c) $y=-3(x+2)^5(x^2-4)$
   d) $y=3(x^2+4x+4)(x^2+6x+9)x$
   e) $y=(x+4)^4(x-1)^6$
   f) $y=-0{,}8\cdot(x-1)^3(x-6)^7$.
2. Napisz wzór funkcji wielomianowej stopnia 6., wiedząc, że do wykresu tej funkcji należy punkt $A(-1, -18)$, a wielomian we wzorze tej funkcji ma trzy pierwiastki: trzykrotny równy 0, dwukrotny równy 2 i jednokrotny równy 1.
3. Na rysunku obok dany jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie st.$W(x)=3$. Do wykresu tej funkcji należą punkty $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, -4)$.
   a) Wyznacz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.
   b) Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymasz, przekształcając wykres funkcji $y=W(x)$ przez symetrię osiową względem osi OY.



4. Na rysunku obok dany jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y=W(x)$ stopnia czwartego. Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe: -2 oraz 4 i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 32.
   a) Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.
   b) Wyznacz współrzędne wszystkich punktów wspólnych wykresu tej funkcji z prostą o równaniu $y=-8x+32$.



Nierówności wielomianowe

Definicja 1.

Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy nierówność, którą można przekształcić równoważnie do postaci: $W(x) \leqslant 0$ lub $W(x) < 0$ lub $W(x) \geqslant 0$ lub $W(x) > 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n, $n \in \boldsymbol{N}$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż nierówności:

a) $-2x + 8 \geqslant 0$ b) $-4(x+3) \leqslant 2(3-2x)$ c) $(x+1)^2 < x^2 + 2x$

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówność $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$ za pomocą „siatki znaków".

Sprowadzamy nierówność wielomianową do postaci: $-x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \geqslant 0$.
Następnie rozkładamy lewą stronę nierówności na czynniki, np. metodą grupowania wyrazów.
W tym celu wyraz $-5x$ zapiszemy w postaci $-4x - x$. Mamy:

$$-x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = (-x^3 + 4x^2 - 4x) - x + 2 = -x(x^2 - 4x + 4) - 1 \cdot (x-2) =$$
$$= -x \cdot (x-2)^2 - 1 \cdot (x-2) = -(x-2)(x^2 - 2x + 1) = -(x-2)(x-1)^2$$

Dana nierówność jest równoważna nierówności

$$-(x-2)(x-1)^2 \geqslant 0$$

Teraz utworzymy tabelę zwaną „siatką znaków".
W pierwszej kolumnie wypisujemy kolejne czynniki wynikające z rozkładu wielomianu. W górnym wierszu zapisujemy przedziały liczbowe, które zostały wyznaczone na osi OX przez pierwiastki wielomianu: 1 i 2. W kolumnach pod przedziałami umieszczamy znaki przyjmowane w tych przedziałach przez poszczególne czynniki. Ostatni wiersz tabeli informuje nas o znakach wielomianu $W(x) = -(x-2)(x-1)^2$ w poszczególnych przedziałach.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$-(x-2)$	+	+	+	0	−
$(x-1)^2$	+	0	+	+	+
$W(x) = -(x-2)(x-1)^2$	+	0	+	0	−

Z tabeli odczytujemy, że $W(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2\rangle$.
Zbiorem rozwiązań nierówności $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$ jest przedział $(-\infty, 2\rangle$.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż nierówności kwadratowe:

a) $-2(x-4)(x+3) \leqslant 0$ b) $4(x-1)^2 > 0$ c) $-2(x+5)^2 - 3 < 0$.

W przypadku rozwiązywania nierówności kwadratowych posługiwaliśmy się szkicami wykresów funkcji kwadratowych. Podobnie możemy rozwiązywać nierówności wielomianowe stopnia większego od 2.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówność $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$, korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji wielomianowej.

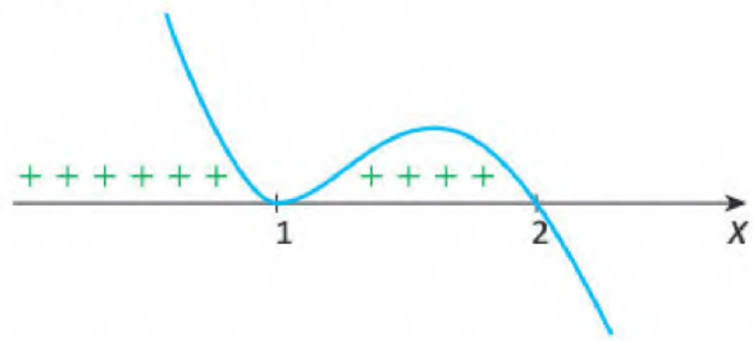
Podobnie jak w przykładzie 1., nierówność przekształcamy równoważnie do postaci

$-(x-2)(x-1)^2 \geqslant 0$

Rozpatrujemy funkcję $y = W(x)$, gdzie $W(x) = -1(x-2)(x-1)^2$. Miejscami zerowymi tej funkcji są dwie liczby:

- 1 – która jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$
- 2 – która jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Współczynnik przy x^3 jest równy -1, więc jest ujemny. Szkicowanie wykresu rozpoczynamy od prawej strony poniżej osi OX.



Rozwiązać nierówność $-(x-2)(x-1)^2 \geqslant 0$ to odpowiedzieć na pytanie:
Dla jakich argumentów omawiana funkcja przyjmuje wartości nieujemne?
Z wykresu funkcji odczytujemy:

$-(x-2)(x-1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2\rangle$

Zbiorem rozwiązań nierówności $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$ jest przedział $(-\infty, 2\rangle$.

Ćwiczenie 3. Na podstawie szkicu wykresu funkcji $f(x) = 2(x+3)^2x^3$ rozwiąż nierówność $2(x+3)^2x^3 \geqslant 0$.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że zbiorem rozwiązań nierówności $4x^3 + 4x^2 + 2 \leqslant 7x$ jest zbiór $(-\infty, -2\rangle \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Przykład 3.

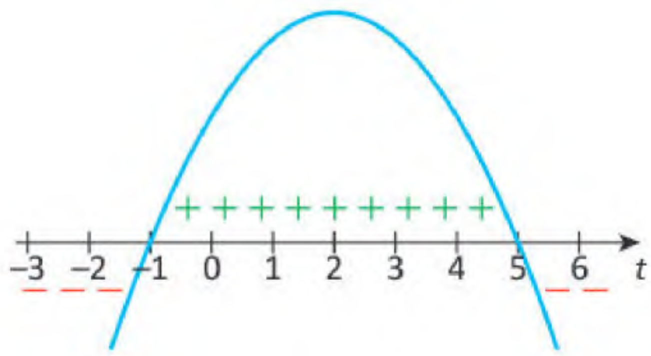
Rozwiążemy nierówność $-x^4 + 4x^2 + 5 < 0$, korzystając z własności funkcji kwadratowej.

Dokonujemy podstawienia $x^2 = t$ i otrzymujemy nierówność kwadratową

$-t^2 + 4t + 5 < 0$

$\Delta = 36, \quad \sqrt{\Delta} = 6$

$t_1 = 5 \quad t_2 = -1$



$-t^2 + 4t + 5 < 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

Wówczas

$t < -1$	$\vee$	$t > 5$
$x^2 < -1$	$\vee$	$x^2 > 5$
nierówność sprzeczna		$x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

Zbiorem rozwiązań nierówności $-x^4 + 4x^2 + 5 < 0$ jest suma przedziałów $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$.

Ćwiczenie 5. Wykaż, że zbiorem rozwiązań nierówności $(x^2 - 1)(x^2 - 4) > 0$ jest zbiór $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

Przykład 4.

Pokażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest nierówność

$$a^8 + 4a^6 + a^2 + 4 \geqslant 2a^5 + 8a^3$$

Nierówność doprowadzamy równoważnie do postaci:

$$a^8 + 4a^6 - 2a^5 - 8a^3 + a^2 + 4 \geqslant 0$$

Wielomian $W(a) = a^8 + 4a^6 - 2a^5 - 8a^3 + a^2 + 4$ rozkładamy na czynniki, grupując wyrazy.

$$W(a) = a^6(a^2 + 4) - 2a^3(a^2 + 4) + 1(a^2 + 4) =$$
$$= (a^2 + 4)(a^6 - 2a^3 + 1) = (a^2 + 4)(a^3 - 1)^2$$

Stwierdzamy, że

$$\bigwedge_{a \in \mathbf{R}} a^2 + 4 > 0 \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{a \in \mathbf{R}} (a^3 - 1)^2 \geqslant 0$$

Ponieważ iloczyn liczby dodatniej i liczby nieujemnej jest liczbą nieujemną, więc dla dowolnej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest nierówność $(a^2 + 4)(a^3 - 1)^2 \geqslant 0$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż nierówności:

a) $(3 - x)(x + 2)^2 \cdot x \geqslant 0$ b) $(3x - 5)(x^2 + 4x + 4)(x - 2) < 0$

c) $(x^2 - 9)(5x - 1)(x^2 + 6x + 9) \leqslant 0$ d) $(2 - x)(-3 + x - x^2)(x + 8) \geqslant 0$

e) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - x - 2)(x - 2) \leqslant 0$ f) $(x^4 - 81)(6 - 2x)(x^2 + 4x - 5)^2 < 0$

2. Rozwiąż nierówności:
   a) $3x^4-2x^3-24x+16<0$
   b) $5x+6\geqslant x^3+2x^2$
   c) $2x^3+7x^2+12<x^4+20x$
   d) $-2x^3-3x^2>8-18x$
   e) $x^4-4x^2<32$
   f) $13x^3+4x\geqslant 3x^4+16x^2$
3. Rozwiąż nierówności:
   a) $2x^3+\sqrt{3}x^2<18x+9\sqrt{3}$
   b) $5x^3+12x^2+x\geqslant 2x^4+4$
   c) $x^3-9<6x^2-12x$
   d) $4x^3+2x^2-4x\geqslant 3x^4-1$
4. Rozwiąż nierówności:
   a) $(x^2-6)^2+3(x^2-6)\geqslant 10$
   b) $(x^2-4x)^2-x^2+4x-20\leqslant 0$
   c) $(x-1)^4\geqslant 9x^2-18x+9$
   d) $(x^2+3x)^3>2(x^2+3x)(x^2+3x+4)$.
5. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja $y=x^3-9x^2+8x$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $y=15-15x$.
6. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja $y=x^3-6x^2$ przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja $y=7-12x$.
7. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:
   a) $f(x)=\sqrt{2x^2-54x^5}$
   b) $f(x)=\sqrt{4x^4-4x^3-3x^2+2x+1}$
8. Rozwiąż nierówności:
   a) $|x-2|^3\geqslant x^2-4x+4$
   b) $x^3-x<|x^3-x|$
   c) $|8x^3-27|\geqslant 20x^2+30x+45$
   d) $|-6x^2+5x-1|\cdot|x^3+8|>0$
   e) $|x^3+3x^2|\geqslant 4x^2+16x+12$
   f) $5x<|x^3-4x|$

D 9. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4-2x^2+3>0$.

D 10. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4+2x^3+3x^2+2x+1>0$.

D 11. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4+x^2>8x-17$.

D 12. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4+16x^2+13>4x^3+18x$

D 13. Wykaż, że jeśli $x\in\langle -2,+\infty)$, to $2x^2+4x\leqslant x^3+8$.

D 14. Wykaż, że jeśli $a<1$, to $a^3+15a<7a^2+9$.

D 15. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest nierówność:

$$(a^3-3a^2+3a)(a-1)+1\geqslant a.$$

D 16. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4+16\geqslant 2x^3+8x$.

D 17. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(x^2+2)^4-x^4-4x^2\geqslant 6$.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 8.

Test

1. Wyrażenie $(-x-2)(2x-x^2-4)$ po uporządkowaniu jest równe:
A. $-x^3-8$ B. x^3-8 C. $-x^3+8$ D. x^3+8

2. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x)=(8x^7-5x^5-1)^6$ jest równa:
A. 8 B. 64 C. 1 D. 32

3. O wielomianie $W(x)=x^3-ax+b$ wiadomo, że $W(-1)=W(2)$. Wówczas:
A. $a\in(2, 4)$ B. $a\in(-\infty, 2\rangle$ C. $a\in\langle 4, 8)$ D. $a\in\langle 8, +\infty)$

4. Liczba $2\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu:
A. $W(x)=x^3+x^2-16$ B. $P(x)=2\sqrt{2}x-4$
C. $Q(x)=x^4-8$ D. $S(x)=x^3-8x$

5. Wielomiany $W(x)=(x-2)(x^2-a)$ i $P(x)=x^3-2x^2-3x+6$ są równe, jeśli:
A. $a=2$ B. $a=3$ C. $a=-2$ D. $a=-3$

6. Jeśli $P(x)=(2x-1)^3$ i $Q(x)=(2x-3)(4x^2+6x+9)$, to stopień wielomianu $P(x)-Q(x)$ jest równy:
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. Objętość sześcianu o krawędzi mającej długość $2\sqrt{3}+1$ jest równa:
A. $30\sqrt{3}+37$ B. $26\sqrt{3}+13$ C. $24\sqrt{3}+1$ D. $46\sqrt{3}+15$

8. Wielomian $W(x)=x^5-32$ jest podzielny przez dwumian:
A. $x+1$ B. $x-2$ C. $x+2$ D. $x-1$

9. Przez który z poniższych wielomianów <u>nie jest</u> podzielny wielomian: $W(x)=(x-1)(x+2)(x+1)$?
A. x^2-1 B. x^2+x-2 C. x^2+3x+2 D. x^2+2x+3

10. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=3x^3+4x^2-18x+5$ przez dwumian $x-2$ jest równa:
A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

11. Ilorazem z podzielenia wielomianu $W(x)=2x^3+x-3$ przez dwumian $x-1$ jest wielomian:
A. $2x^2+2x+3$ B. $2x^2-3$ C. $2x^2+x+3$ D. $2x^2+3x$

12. Wyrażenie $9x^4-6x^3+x^2$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:
A. $3x^2(x^2-2x)+x^2$ B. $x^2(9x^2-6x)$
C. $x^2(3x-1)(3x+1)$ D. $x^2(3x-1)^2$

13. Liczba pierwiastków wielomianu $W(x)=(x^2+4)(5x^2-x-1)(x^3+1)$ jest równa:
A. 7 B. 5 C. 4 D. 3

Zadania otwarte

14. Dane są wielomiany $P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$, $W(x) = 4x^3 - 2x + 1$. Wyznacz wielomian $F(x) = (2x - 1)(2x + 1)P(x) - x^2W(x)$ i uporządkuj go malejąco. Jaki jest stopień wielomianu $F(x)$?

D 15. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x wartość wielomianu $W(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - (x + 2)^3 + 6(x + 1)^2$ jest stała.

16. Sprawdź, czy istnieje liczba m, dla której wielomiany $W(x) = (x - 4)^3$ oraz $P(x) = x^3 + 2(m - 3)x^2 - 16mx - 64$ są równe.

17. Usuń niewymierność z mianownika ułamka: a) $\dfrac{1}{4-\sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$.

D 18. Wykaż, że liczba:
a) $3^{33} - 2^{11}$ jest podzielna przez 5 b) $5^{12} - 2^{18}$ jest podzielna przez 187.

D 19. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej parzystej wartość wielomianu $W(x) = 4x^4 + 16x^3 + 16x^2$ jest liczbą podzielną przez 256.

D 20. Wykaż, że jeśli $x - y = 2$ i $x \cdot y = 6$, to $x^3 - y^3 = 44$.

D 21. Wykaż, że suma sześcianów dwóch kolejnych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2, przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

D 22. Wykaż, że liczba $\sqrt[8]{10}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 10x^{2032} - x^{2040}$.

D 23. Wykaż, że wielomian $W(x) = x^{50} - 20x^{49} + 16x - 5$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$ i nie jest podzielny przez dwumian $x - 1$.

D 24. Wielomian $W(x) = 2x^4 + ax^3 - 11x^2 + x + b$ jest podzielny przez dwumiany $x - 2$ oraz $x + 3$.
a) Oblicz a i b. b) Wykaż, że wielomian $W(x)$ ma tylko dwa pierwiastki.

25. Wielomian $W(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ ma dwa całkowite pierwiastki. Przedstaw ten wielomian w postaci iloczynowej.

26. Rozwiąż równanie:
a) $9x^3 - 18\sqrt{2}x^2 = 4x - 8\sqrt{2}$ b) $x^2(x - 2) = x(8 - 4x)$
c) $(3x - 2)^3 - 64 = 0$ d) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$.

27. Dane są dwa zbiorniki na wodę: jeden w kształcie sześcianu o krawędzi długości x, a drugi w kształcie prostopadłościanu, którego podstawa ma wymiary x na $3x$. Wysokość zbiornika prostopadłościennego jest o 2 m krótsza od wysokości zbiornika sześciennego, a objętość tego zbiornika jest o 32 m^3 większa od objętości zbiornika sześciennego. Podaj wymiary zbiornika prostopadłościennego.

28. Rozwiąż nierówności:
a) $(x + 2)^3 - 11x \leqslant x(x + 2)^2 + 7$ b) $(x - 1)(x^2 + x + 1) < (x - 1)^3$

29. Wyznacz wszystkie wartości a, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - (a^2 + 2)x^2 + 3a$ przez dwumian $x + 1$ jest liczbą mniejszą od -7.

D 30. Wykaż, że wielomian $W(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2$ ma dwa pierwiastki wymierne.

31. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $2x - 3$. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 5$ jest równa 13. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = 2x^2 + 7x - 15$.

32. Wyznacz całkowity pierwiastek wielomianu $K(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1$ i ustal krotność tego pierwiastka.

33. Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki możliwie najniższego stopnia, jeśli:

a) $W(x) = 9x^3 - 12x^2 - 5\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$ b) $W(x) = 2x^5 + 6x^3 + 50x$.

34. Równanie $x^3 - 9x^2 + ax + b = 0$ ma trzy rozwiązania x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2 = x_1 + 5$ i $x_3 = x_2 + 5$. Wyznacz te rozwiązania oraz liczby a i b.

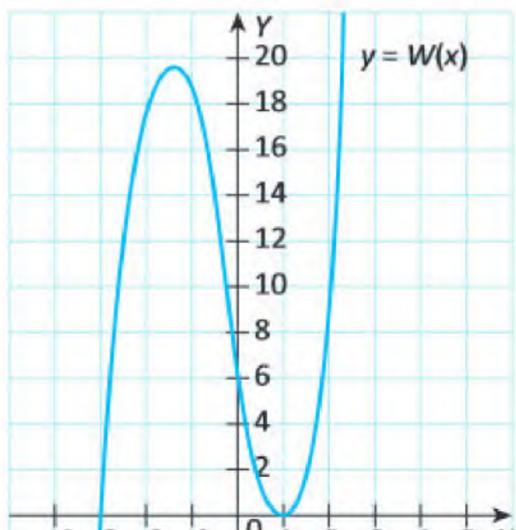
35. Dana jest funkcja wielomianowa $W(x) = 2x^3 + x^2 - 16x - 15$. Wyznacz:
a) współrzędne punktów, w których wykres funkcji przecina osie układu współrzędnych
b) zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

36. Rozwiąż nierówności:
a) $(3 - x)^4 (2x - 5)^2(x + 1)(3 - x) > 0$ b) $(x^6 - 1)x \leqslant (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)$

37. Rozwiąż równania i nierówność:
a) $x^3 - 3x^2 = |16x - 48|$ b) $6x^4 + 1 = |x^3 + 6x|$ c) $|x^3 - 4x| > 2x$.

38. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2 - x^3}$.

39. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej trzeciego stopnia $y = W(x)$. Funkcja ma dwa miejsca zerowe: 1 oraz -3, a do jej wykresu należy punkt $(0, 6)$.
a) Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.
b) Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu tej funkcji i prostej k: $y = -2x + 14$.



D 40. Wykaż, że nierówność $a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 6a + 9 > 0$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej a.

41. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których wielomian $W(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + px + 1)$ ma trzy pierwiastki.

42. Ustal liczbę pierwiastków wielomianu $F(x) = (x - 2)[x^2 - (2k + 1)x + 4]$ oraz ich krotność ze względu na wartość parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$.

Skorowidz

S

Ś

T

U

W

Odpowiedzi do zadań

1. Przekształcenia wykresów funkcji

Wektor w układzie współrzędnych, s. 18-19

1. a) $\overrightarrow{AB} = [3, 4]$ $\overrightarrow{BA} = [-3, -4]$ b) $\overrightarrow{AB} = [-3, 2]$ $\overrightarrow{BA} = [3, -2]$

3. $\vec{a} = [5, 0], |\vec{a}| = 5$ $\vec{b} = [0, -4], |\vec{b}| = 4$ $\vec{c} = [1, 2], |\vec{c}| = \sqrt{5}$

   $\vec{d} = [1, -3], |\vec{d}| = \sqrt{10}$ $\vec{e} = [2, -1], |\vec{e}| = \sqrt{5}$ $\vec{f} = [-6, -2], |\vec{f}| = 2\sqrt{10}$

4. a) $B(4, 5)$ b) $B(-6, 2)$

5. a) $A(7, -5)$ b) $A(2, 9)$

6. $D(11, 0)$ b) $D(3, 6)$

7. a) $a = -3, b = -6$ b) $a = 1, b = -3$

8. a) $(1, 0)$ b) $(9, 2)$ c) $(-21, 11)$ d) $(37, -19)$

9. a) $\sqrt{53}$ b) 17 c) 13 d) 25

10. a) $\overrightarrow{PB} = -2\,\overrightarrow{PA}$ b) $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$ c) $\overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$ d) $\overrightarrow{PB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}$

11. a) $B(-8, 29)$ b) $B(4, 1)$ c) $B\left(2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$

12. a) $[2, 1]$ b) $[6, -5]$ c) $[0, 4]$ d) $[-4, 4]$

13. a) 5 b) $\sqrt{41}$ c) $2\sqrt{41}$ d) $\sqrt{17}$

14. a) $a = 1, b = 4$ b) $a = -\frac{1}{5}, b = 4\frac{2}{5}$ c) $a = \frac{1}{5}, b = \frac{2}{5}$ d) $a = -\frac{3}{10},\ b = -\frac{1}{10}$

15. a) $a = -6$ b) $a = -2$

Przesunięcie równoległe. Przesunięcie równoległe wzdłuż osi *OX*, s. 23-24

1. a) $y = (x+1)^3$ b) $y = (x-2)^3$

2. a) $y = |x-3|$ b) $y = |x+5|$

5. $f(x) = -2x + 15$

6. $y = -x^2 + x + 7$

7. $y = \sqrt{x-1}, x \geqslant 1$

8. $\vec{u} = [-5, 0]$

9. $\vec{u} = [-18, 0]$

10. a) $D_g = \langle 2, 17)$ b) $D_h = \langle -13, 2)$

11. a) $-27, -25, -12$ b) $39, 41, 54$

Przesunięcie równoległe wzdłuż osi *OY*, s. 27

1. a) $y = x^3 - 2$ b) $y = x^3 + 1$

2. $y = |x - 5| - 2$; najmniejsza wartość to -2.

4. *wskazówka*: a) $\vec{u} = [0, 5]$ b) $\vec{u} = [0, -1]$ c) $\vec{w} = [-2, -1]$

5. *wskazówka*: a) $\vec{u} = [0, 3]$ b) $\vec{u} = [5, 0]$ c) $\vec{w} = [3, -2]$

6. a) $D = (-7, 4)$, $ZW = (-\infty, 12\rangle$ b) $D = (0, 11)$, $ZW = (-\infty, -6\rangle$

7. a) $D = \langle -22, -3)$, $ZW = (-\infty, 1\rangle$ b) $D = \langle -1, 18)$, $ZW = (-\infty, 4\rangle$.

8. a) $y = 3x^2 - 2x - 3$ b) $y = 3x^2 - 14x + 17$ c) $y = 3x^2 + 4x + 5$

Symetria osiowa. Symetria osiowa względem osi *OX* i *OY*, s. 31

1. a) $y = -\frac{1}{2}x - 1$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

2. a) $y = \frac{-1}{x-4}$, $x \in \mathbf{R} - \{4\}$ b) $y = \frac{1}{-x-4}$ czyli $y = \frac{-1}{x+4}$, $x \in \mathbf{R} - \{-4\}$

3. a) $y = -\sqrt{x} + 1$, $x \in \langle 0, +\infty)$ b) $y = \sqrt{-x} - 1$, $x \in (-\infty, 0\rangle$

4. $D_f = \langle -3, 5)$, $ZW_f = \langle -3, 2\rangle$ a) $D_g = D_f$, $ZW_g = \langle -2, 3\rangle$ b) $D_h = (-5, 3\rangle$, $ZW_h = ZW_f$

5. a)

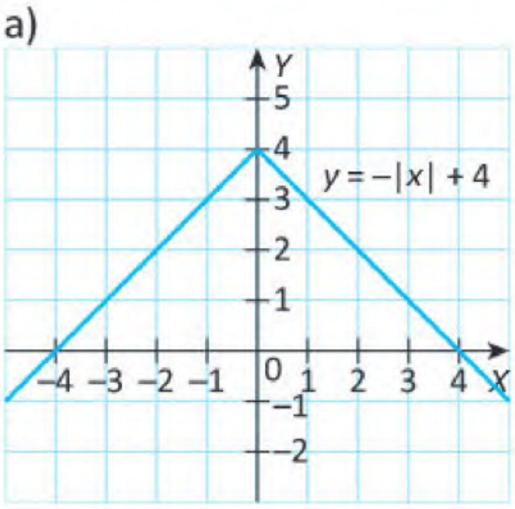
x	-3	-1	0	3	5
$g(x)$	0	-2	-4	-6	-8

b)

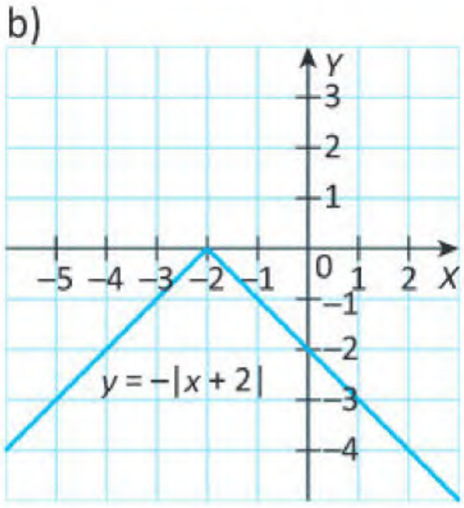
x	-5	-3	0	1	3
$h(x)$	8	6	4	2	0

6. a) $y = -x^2 - 3x + 1$ b) $y = x^2 - 3x - 1$

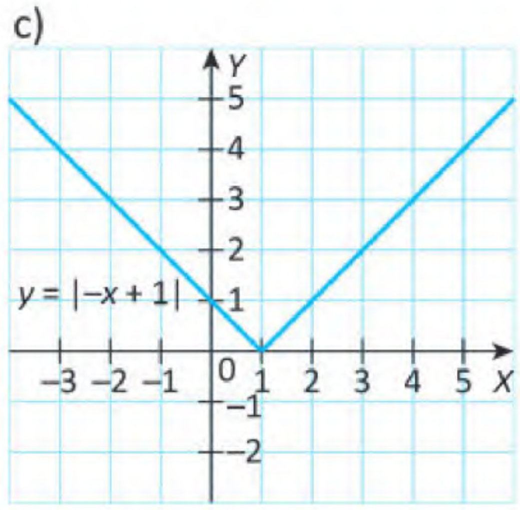
7. a)



b)



c)

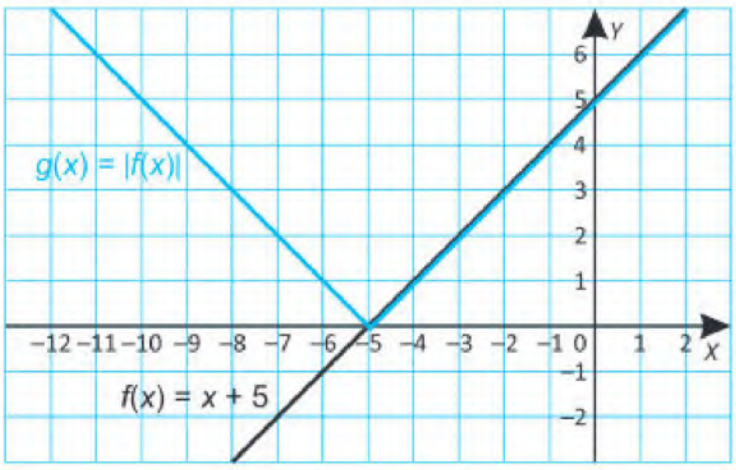


Symetria środkowa. Symetria środkowa względem punktu (0, 0), s. 34

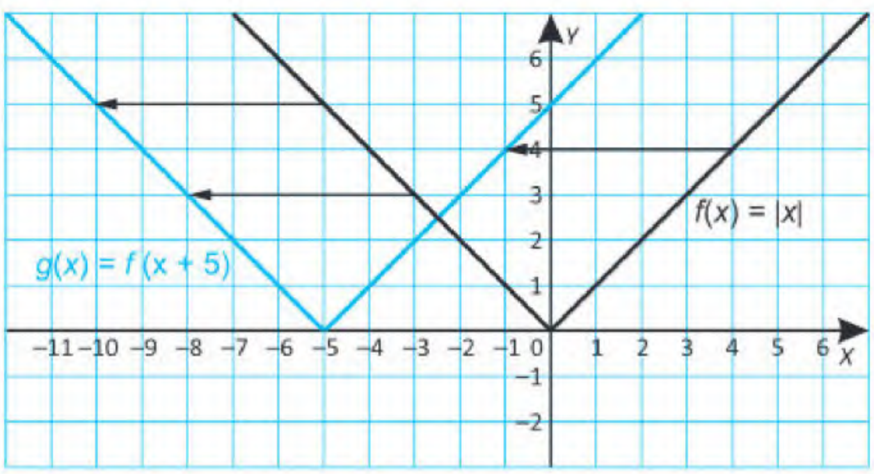
1. a) $y=-|-x+3|$, $D=\boldsymbol{R}$ b) $y=-\sqrt{-x}-2$, $D=(-\infty,0\rangle$
   c) $y=-x-4$, $D=\boldsymbol{R}$ d) $y=\dfrac{1}{x+5}-1$, $D=\boldsymbol{R}-\{-5\}$
2. a) $y=-2x^2-7x+5$ b) $y=x^2+2x+9$
   c) $y=\dfrac{1}{x-3}+1$, $D=\boldsymbol{R}-\{3\}$ d) $y=\dfrac{-3}{x+2}+4$, $D=\boldsymbol{R}-\{-2\}$
3. 2, –7, –108
4. $D=(-8,4)$ $ZW=\langle -5,0\rangle$
5. wartość największa funkcji g: –1, wartość najmniejsza funkcji g: –9
6. a) symetrię osiową względem osi OY b) symetrię osiową względem osi OX
   c) symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$ lub translację o wektor [0, –2]

Wykres funkcji $y=|f(x)|$ oraz $y=f(|x|)$, s. 38

1. a) $D=(-4,6)$, $ZW=\langle 0,3)$ b) $D=(-6,6)$, $ZW=(-2,1\rangle$
2. a) $D=\langle -3,6\rangle$, $ZW=\langle 0,4\rangle$ b) $D=\langle -6,6\rangle$, $ZW=\langle -2,1\rangle$
3. a) $D=\langle -2,5)$ b) $D=(-5,5)$
4. $g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\in\langle 0,2\rangle$
5. $D_g=\langle 0,+\infty)$, $D_h=\boldsymbol{R}$; $g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\in\langle 4,+\infty)$
6. a)



b)



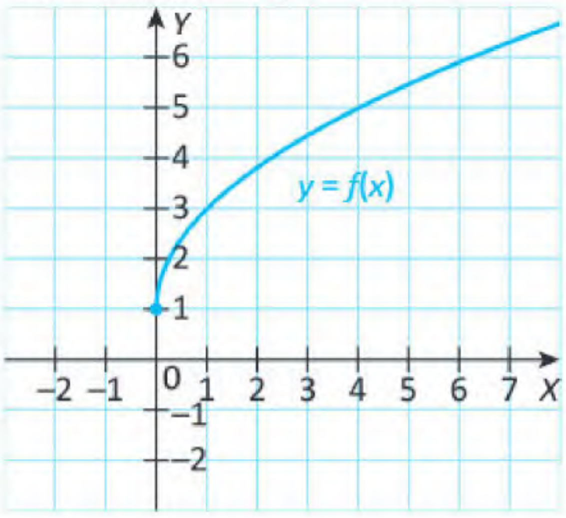
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ oraz $y = f(k \cdot x)$, gdzie $k \neq 0$, s. 44

1.

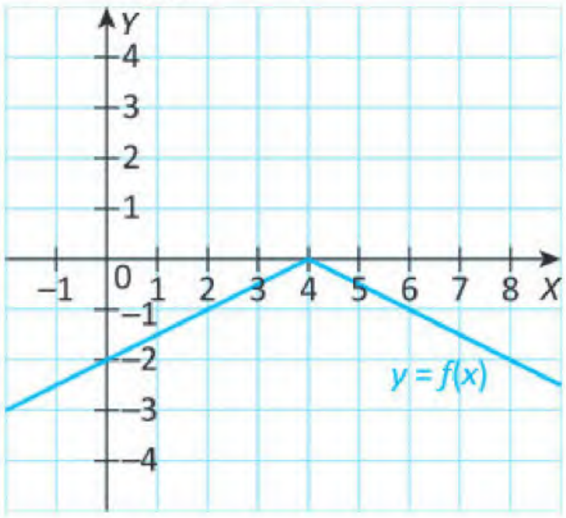
x	-2	-1	0	1	3	5
$g(x)$	-12	6	-9	0	15	27

2. a) $ZW = \langle -8, 4 \rangle$ b) $ZW = \left\langle -1, \frac{1}{2} \right\rangle$ c) $ZW = \langle -1, 2 \rangle$ d) $ZW = \langle -6, 12 \rangle$

3. a) $y = f(x)$, $D = \langle 0, +\infty)$



d) $y = f(x)$, $D = \boldsymbol{R}$



4. a)

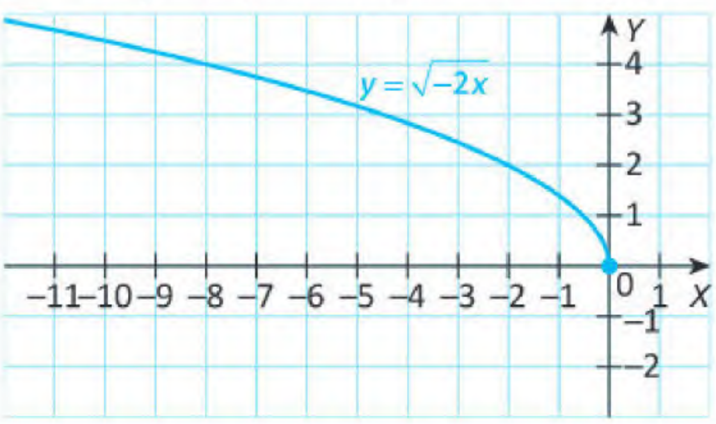
x	-2	-1	0	1	3	4
$g(x)$	-3	-1	-2	0	2	4

b)

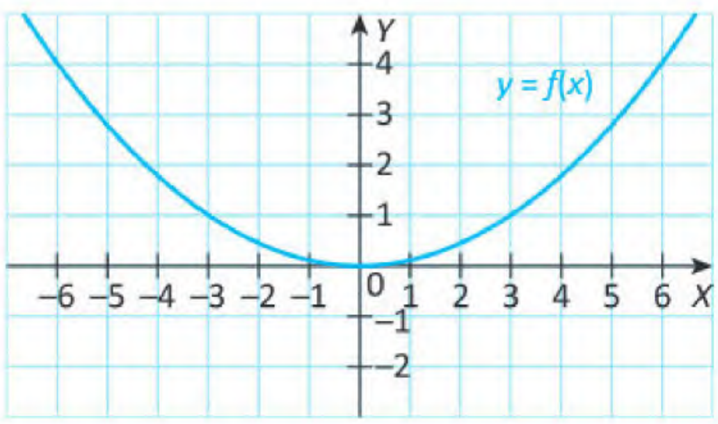
x	-16	-12	-4	0	4	8
$h(x)$	4	2	0	-2	-1	-3

5. a) $D = \langle -4, 2)$ b) $D = (-1, 2\rangle$ c) $(-8, 16\rangle$ d) $D = \langle -6, 3)$

6. a) $D = (-\infty, 0\rangle$



c) $D = \boldsymbol{R}$



7. a) -6 oraz 2 b) -12 oraz 4 c) -24 oraz 8 d) $-\frac{4}{3}$ oraz 4

Szkicowanie wykresów wybranych funkcji, s. 47-48

1. a) $y = -(x-3)^2 - 1$
b) $y = -(x-3)^2 + 1$
c) $y = (-x-3)^2 + 1$, czyli $y = (x+3)^2 + 1$
d) $y = (x-3)^2 + 1$

2. a) $y=-|x+4|+3$ b) $y=-|x+4|-3$

3. a) $y=\sqrt{5-x}$, $D=(-\infty, 5\rangle$ b) $y=\sqrt{-x-5}$, $D=(-\infty, -5\rangle$

4. *wskazówka:* a) $f(x)=\frac{-3}{x}$, $\vec{u}=[-3,-1]$ b) $f(x)=-x^3$, $\vec{u}=[2, 1]$
c) $f(x)=\sqrt{x+2}-4$, $y=f(-x)$

6. *wskazówka*: a) $f(x)=\sqrt{x+1}-2$, $y=|f(x)|$ b) $f(x)=\sqrt{x+4}-5$, $y=f(|x|)$
c) $f(x)=-\sqrt{x}$, $y=f(|x|)$, $\vec{u}=[0, 3]$

7. *wskazówka*: a) $f(x)=\frac{2}{x}$, $y=f(|x|)$, $\vec{u}=[1,-4]$ b) $f(x)=\frac{1}{x}-3$, $y=|f(x)|$, $\vec{u}=[0,-6]$
c) $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $y=f(-x)$, $y=|f(x)|$, $\vec{u}=[0, 1]$

8. *wskazówka*: a) $f(x)=|x-1|-2$, $y=|f(x)|$ b) $f(x)=-|x|+4$, $y=|f(x)|$, $\vec{u}=[0, 2]$
d) $f(x)=|x+2|-3$, $y=-|f(x)|$, $\vec{u}=[0, 4]$

9. a) $f(x)=(x-2)^2$, $y=\frac{1}{2}f(x)$ b) $f(x)=(x+2)^2$, $y=f(2x)$
c) $f(x)=-\sqrt{x+4}$, $y=f(2x)$ d) $f(x)=\sqrt{x-1}$, $y=-2f(x)$, $y=-2f(|x|)$
e) $f(x)=(x-3)^2$, $y=\frac{1}{3}f(x)$, $y=\frac{1}{3}f(|x|)$ f) $f(x)=(x-1)^3$, $y=|f(x)|$, $y=\left|f\left(\frac{1}{2}x\right)\right|$

Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności, s. 51

1. a) $x=1$ b) $x\in\{-1, 1\}$ c) $x\in\{-6,-3\}$
d) $x\in\{-1, 0, 1\}$ e) $x\in\{-1, 0\}$ f) $x\in\{2, 5\}$

2. a) $x\in\langle -4, 0\rangle$ b) $x\in(-\infty,-4)\cup(-3,+\infty)$ c) $x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$
d) $x\in(-\infty, 1\rangle$ e) $x\in\langle -2, 0)\cup\langle 1,+\infty)$ f) $x\in\langle 0, 4\rangle$

3. $x\in(-\infty, 0)\cup(0, 2)\cup(3,+\infty)$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1., s. 52-55

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Odpowiedź	C	B	C	A	D	B	A	D	C	B	A	B	D	C	D

Zadania otwarte

16. a) $(0, 3)$ b) $x\in\{-5, 3\}$ c) $x\in\{-4, 2\}$

17. b) $g(x)=\frac{2}{x-3}$, $D=\mathbf{R}-\{3\}$ c) $x\in(-\infty, 1)\cup(3,+\infty)$

18. b) $g(x) = -x^3 + 2$ c) $x = 1$

19. b) $g(x) = -\sqrt{3-x}$, $D = (-\infty, 3\rangle$ c) $x \in (-1, 3\rangle$

20. a) $x = 1$ b) $x = -4$

21. a) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$ b) $x \in \langle 0, +\infty) \cup \{-4\}$

23. b)

x	−11	−9	−8	−6	−4
y	5	4	3	2	1

c)

x	−4	−2	0	1	3
y	6	7	8	9	10

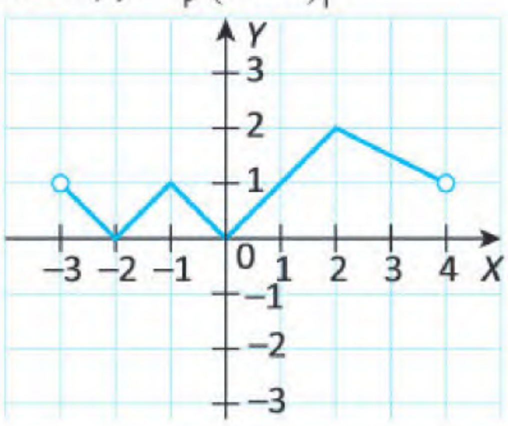
24. a) 21 b) 1 c) 5

25. $D\left(2, 5\frac{2}{3}\right)$

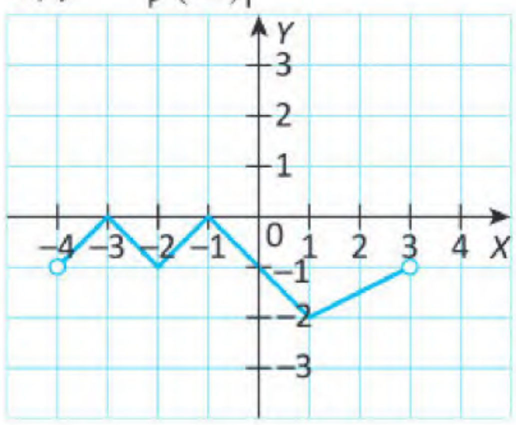
26. $D = \langle 3, +\infty)$ b) 7 d) $x \in \langle 3, 7)$

27. $D = \boldsymbol{R} - \{-3\}$ b) f rosnąca w przedziale $(-\infty, -3)$, malejąca w przedziale $(-3, +\infty)$
c) $-5, -1$ d) $x \in \langle -5, -3) \cup (-3, -1\rangle$

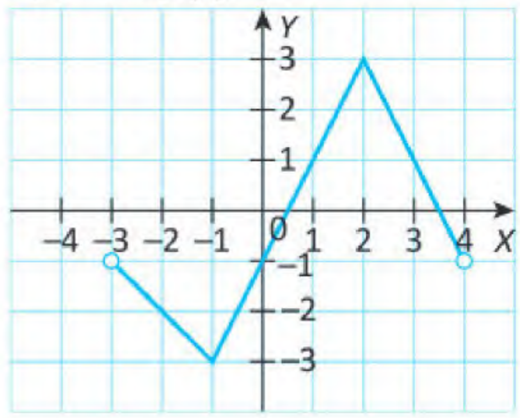
28. a) $y = |f(1-x)|$



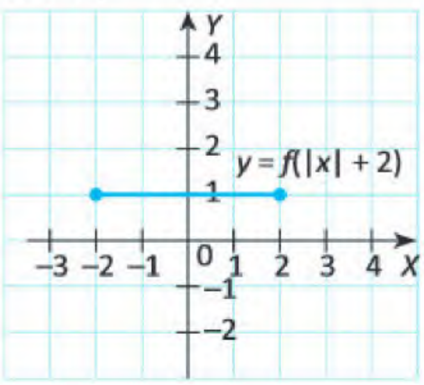
b) $y = -|f(-x)|$



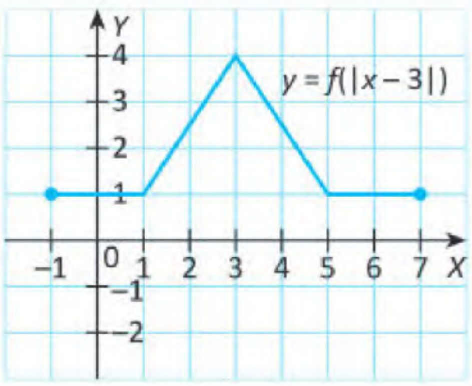
c) $y = -2f(x) + 1$



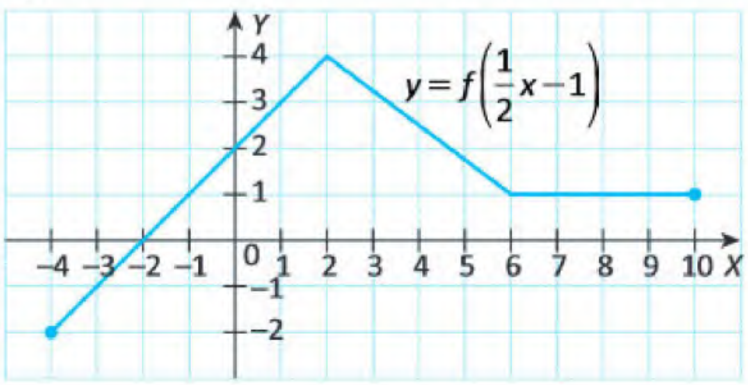
29. a)



b)



c)



30. a) $x \in \{-4, 0, 4\}$ b) $x \in (-\infty, 0\rangle$

31. a) $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 2, +\infty)$ b) $x \in \langle 0, +\infty) \cup \{-2\}$

32. a) $D = (-4, 6\rangle$, $ZW = (-\infty, 4\rangle$
b) $D = \langle -2, 8)$, $ZW = \langle -3, +\infty)$

2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej, s. 57-58

1. a) $1\frac{1}{3}$ b) 0 c) 4,8 d) 0,7 e) 1,4 f) 0,75
2. a) 9 b) -10 c) 6 d) -20
3. a) $-2{,}4$ b) $33\frac{3}{4}$ c) -27 d) 10
4. a) 1 b) 10 c) -1 d) 0 e) $9\sqrt{2}-6\sqrt{3}$ f) $14+2\sqrt{3}-4\sqrt{6}$
5. a) $3\sqrt{15}-11$ b) $69-48\sqrt{2}$ c) -18 d) 44
6. a) $6\sqrt{2}-7$ b) $\frac{11-6\sqrt{3}}{13}$ c) $5\frac{1}{2}$ d) 2
7. a) 0,8 b) 14 c) 5 d) -324
8. a) wartość wyrażenia jest równa 2
   b) wartość wyrażenia jest równa 11
   c) wartość wyrażenia jest równa -18
   d) wartość wyrażenia jest równa 2
9. a) $-a^2+3a+1$ b) $6a-12$ c) $a-7$ d) $-3a^3+32a^2-95a+50$

Odległość między liczbami na osi liczbowej. Geometryczna interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej, s. 60

1. a) 1,4 b) $22\frac{2}{3}$ c) 92,5 d) 53
2. a) 14 b) $\frac{5+\sqrt{6}}{2}$ c) $2-2\sqrt{5}$ d) $\frac{1}{2}$
3. a) $|a-10|=1$ b) $|b|=8$ c) $|c+3|>4$ d) $|d-7|\geqslant 1$

Proste równania z wartością bezwzględną, s. 63

1. $x\in\{-5, 1\}$, wskazówka: $|x+2|=|x-(-2)|$
2. a) $x\in\{-1, 1\}$ b) $x\in\{-13, 5\}$ c) $x\in\{3, 13\}$
   d) $x\in\{3, 7\}$, *wskazówka*: $|5-x|=|x-5|$
   e) $x\in\{-5, 3\}$, *wskazówka*: $|-x-1|=|x+1|$
   f) $x\in\{-2, 10\}$, *wskazówka*: doprowadź równanie do postaci $|x-4|=6$
3. a) $|x-7|=4$ b) $|x+12|=9$ c) $|x+29|=45$
   d) $|x|=\sqrt{3}-1$ e) $|x-5|=\sqrt{3}$ f) $|x+193|=0$
4. a) $x\in\{-3, 3\}$ b) $x\in\{-4, 6\}$ c) $x\in\{-114, 106\}$
   d) $x\in\{-47, -5\}$ e) $x\in\{-9, 19\}$ f) $x\in\{-23, 91\}$

5. a) $x\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ b) $x\in\left\{1-3\sqrt{2},1+3\sqrt{2}\right\}$ c) $x\in\{-55, 105\}$

d) $x\in\{-6, 0\}$ e) $x\in\left\{\frac{1}{3},1\frac{2}{3}\right\}$ f) $x\in\{-3{,}7; -2{,}3\}$

6 a) równanie sprzeczne b) $x\in\{-3, 5\}$ c) $x\in\{-5, -3\}$
d) $x=-2$ e) $x\in\{2, 8\}$ f) $x\in\{-9, -3\}$

8. a) $x\in\{-2, 12\}$ b) $x\in\left\{-20\frac{2}{3},2\frac{2}{3}\right\}$
c) równanie sprzeczne d) $x\in\{-8, 6\}$

9. a) $x\in\left\{-1\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right\}$ b) $x\in\left\{-5\frac{5}{8},-4\frac{3}{8}\right\}$ c) $x\in\{-2, 8\}$

d) $x\in\left\{-3\frac{1}{4},5\frac{1}{4}\right\}$ e) $x\in\{-4{,}7; 0{,}7\}$ f) równanie sprzeczne

Proste nierówności z wartością bezwzględną, s. 67-68

1. $x\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

2. a) $x\in(-1, 1)$ b) $x\in\langle 3, 13\rangle$ c) $x\in(-\infty,-5\rangle\cup\langle 7,+\infty)$
d) $x\in \boldsymbol{R}-\{-5\}$ e) $x\in(-\infty,-8\rangle\cup\langle 6,+\infty)$ f) $x=-8$
g) $x\in\left(-\infty,3\frac{1}{2}\right)\cup\left(6\frac{1}{2},+\infty\right)$ h) $x\in(-10,-8)$ i) $\left(-\infty,-2\frac{2}{3}\right\rangle\cup\left\langle\frac{2}{3},+\infty\right)$

3. a) $\{0\}$ b) $\varnothing$ c) $\boldsymbol{R}$ d) $\boldsymbol{R}-\{3\}$ e) $\boldsymbol{R}$ f) $\{-4\}$

4. a) $|x|<3\frac{1}{3}$ b) $|x-2|\leqslant 2$ c) $|x|>\pi$
d) $|x-4|<8$ e) Na przykład: $|x+3|>-8$ f) $|x-5|\geqslant 7$
g) $|5-x|>0$ h) $|x+4|\leqslant 0$ i) $|x+3|<\sqrt{6}$

5. a) $x\in(-40, 18)$ b) $x\in(-\infty,14)\cup(20,+\infty)$

c) $x\in\langle 20, 50\rangle$ d) $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right\rangle\cup\langle 2,+\infty)$

e) $x\in\left(-1\frac{2}{5},1\right)$ f) $x\in\left(-\infty,-4\frac{1}{2}\right)\cup\left(-3\frac{1}{2},+\infty\right)$

6. a) $x\in(5, 9)$ b) $x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle 7,+\infty)$ c) $x\in(-\infty,-4)\cup(-2,+\infty)$

7. a) $x\in\left(1\frac{1}{4},2\frac{3}{4}\right)$ b) nierówność sprzeczna c) $x\in\{-3\}$

d) $x\in\left(-2\sqrt{2}-4,2\sqrt{2}+4\right)$ e) $x\in\boldsymbol{R}$ f) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{6}\right)\cup(1,+\infty)$

8. a) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(4\frac{1}{3}, +\infty\right)$ b) $x \in \langle -5, -3\rangle$
c) nierówność sprzeczna d) $x \in \{-8\}$

9. a) $x \in (1, 5)$ b) $x \in (-\infty, -14\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ c) $x \in \boldsymbol{R}$ d) $x \in \{5\}$

10. a) $x \in \langle \sqrt{3}-14, \sqrt{3}+14\rangle$ b) $x \in \{-2\sqrt{2}\}$ c) $x \in \left(-1-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

d) $x \in \left(-\infty, -3-\frac{3\sqrt{5}}{2} \cup -3+\frac{3\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

11. a) 2 b) 11 oraz 13

12. a) $x \in \langle -5, -3) \cup (-1, 1\rangle$ b) $x \in \{4\}$ c) $x \in \left(-7\frac{1}{2}, -5\frac{2}{3}\right\rangle \cup \left\langle -4\frac{1}{3}, -2\frac{1}{2}\right)$

13. $A = \{-8, -6, -4, -2, 0\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $C = \langle 0, 4)$
a) $A \cup B = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 3, 5\}$
b) $A \cap C = \{0\}$
c) $B - C = \{5\}$
d) $B \cap C = \{2, 3\}$
e) $C - A = (0, 4)$

Własności wartości bezwzględnej, s. 71-72

1. a) 0 b) $-3|x+2|$ c) $7|x-5|$ d) $|x| - 2|x-1|$
2. a) $-|x-3|$ b) $21|x+2|$ c) $2 \cdot |x-4|$ d) $-5|2x+1|$
3. a) $\frac{2}{3}$ b) $2\frac{1}{2}$ c) $\frac{|5x-6|}{6}$ d) $\frac{|2x+3|}{2}$
4. a) $\frac{3}{|x-2|}$ b) 1 c) $2|x+1|$ d) -1
5. $x \in \{-2, 8\}$ b) $x = -\frac{1}{3}$ c) $x \in \{1, 3\}$ d) $x \in \{1, 9\}$
e) $x \in \{0, 3\}$ f) $x = -\frac{1}{5}$
6. a) $x = -1$ b) $x = 1\frac{1}{2}$ c) $x \in \{-2, 1\}$ d) $x \in \left\{\frac{-1}{3}, 3\right\}$
e) $x \in \left\{-2, -\frac{2}{3}\right\}$ f) $x \in \left\{\frac{5}{8}, \frac{7}{10}\right\}$

12. *wskazówka*: $x^2 + 16y^2 + 8xy = 16xy + 8xy$, czyli $(x+4y)^2 = 24xy$, $(x-4y)^2 = 8xy$
13. *wskazówka*: $x - y = (x-z) - (y-z)$

Równania z wartością bezwzględną, s. 75-76

1. a) $x \in \{-7, -3, -1, 3\}$ b) $x \in \{0, 2\}$ c) $x \in \{-1, 3, 5, 9\}$
d) $x \in \{-2, 4\}$ e) $x \in \{-5, -1, 3\}$ f) $x \in \{-4, -2, 6, 8\}$

2. a) $x = 0$ b) $x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}\right\}$
c) równanie sprzeczne d) $x \in \langle 5, +\infty)$

3. $x \in \{-2, 1\}$ b) $x \in (-\infty, -3\rangle$ c) $x = -3$ d) równanie sprzeczne

4. a) $x \in (-\infty, 9\rangle$ b) $x \in (-\infty, -3\rangle$ c) $x \in \langle -5, +\infty)$ d) $x \in \boldsymbol{R}$
e) $x \in (-\infty, 3\rangle$ f) $x \in (-\infty, -4\rangle$

5. a) $x \in \langle -1, 4\rangle$ b) $x \in \{-4, 12\}$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) równanie sprzeczne

6. a) $x \in \{-2, 0\}$ b) $x = -\frac{2}{5}$ c) $x = -5\frac{1}{2}$ d) $x = -\frac{5}{6}$

7. a) $x \in \{2, 6\}$ b) $x \in \{0, 4\}$ c) $x \in (-\infty, -3\rangle$ d) $x \in \langle 1, 3\rangle$

8. a) $x \in \{-5, 0\}$ b) $x \in \{-3, 5\}$ c) $x \in \{-2, 0, 4, 6\}$ d) $x = -2$

9. a) $x = \frac{4}{5}$ b) $x \in \left\{-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ c) równanie sprzeczne

10. a) 0 b) równanie sprzeczne c) $x \in \{-1, 6\}$
d) $x = 1\frac{1}{3}$ e) równanie sprzeczne f) $x \in \left\{\frac{2}{3}, 6\right\}$

Nierówności z wartością bezwzględną, s. 80

1. a) $x \in (-3, 9)$ b) $x \in \langle -13, -11\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$ c) $x \in (-\infty, -15) \cup (5, +\infty)$ d) $x \in \boldsymbol{R}$
e) $x \in \left\langle -6\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right\rangle$ f) $x \in \langle -1, 1\rangle \cup \langle 2, 4\rangle$ g) $x \in \left(-\infty, -2\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle -1\frac{1}{2}, 0\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$
h) $x \in \langle -1, 3\rangle \cup \langle 5, 9\rangle$ i) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(3\frac{1}{2}, +\infty\right)$ j) nierówność sprzeczna

2. a) $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 5, +\infty)$ b) $x \in \langle -11, -7\rangle \cup \langle -5, -1\rangle$ c) $x \in (-7, -5) \cup (-5, -3)$
d) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (5, +\infty)$ e) $x \in (1, 5)$ f) nierówność sprzeczna
g) $x \in \boldsymbol{R} - \{1\}$ h) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 0, +\infty)$

3. a) $x \in (-10, -7\rangle \cup \{-3\} \cup \langle 1, 4)$ b) $x \in \langle -3, -2) \cup (0, 1\rangle \cup \langle 7, 8) \cup (10, 11\rangle$
c) $x \in (-4, -1) \cup (0, 2) \cup (3, 6)$ d) $x \in \left(-9\frac{1}{2}, -6\right) \cup \left(1, 4\frac{1}{2}\right)$

4. a) $x \in \left\langle -2\frac{1}{2}, +\infty\right)$ b) $x \in \boldsymbol{R}$ c) $x \in (-\infty, 2)$ d) $x \in (-\infty, -1\rangle$

5. a) $x \in \left(-6, 2\frac{1}{3}\right)$ b) $x \in (0, 3)$ c) $x \in \boldsymbol{R}$ d) nierówność sprzeczna

6. a) $x \in \boldsymbol{R}$ b) $x \in (-\infty, -1)$ c) $x \in \boldsymbol{R}$
d) $x \in \langle -11, 1\rangle$ e) $x \in \{3\}$ f) $x \in \langle -4, 1\rangle$

7. a) $x \in \{2\}$ b) $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3\right\rangle$ c) $x \in (1, +\infty)$ d) $x \in \langle -2, -1\rangle$

Równania liniowe z parametrem, s. 84-85

1. a) $m \in \boldsymbol{R}$; $x = \frac{1}{3}m$ b) $m \in \boldsymbol{R} - \{0\}$; $x = \frac{m+1}{m}$
c) $m \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$; $x = 1$ d) $m \in \boldsymbol{R} - \{1\}$; $x = \frac{4}{|m-1|}$
e) $m \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$; $x = \frac{9}{1-m^2}$ f) $m \in \boldsymbol{R} - \{1, 3\}$; $x = \frac{2-m}{|m-2|-1}$

2. a) $k = 0$ b) $k = \frac{1}{2}$ c) nie istnieje d) $k = -2$

3. a) $p = -4$ b) $p = 1{,}5$ c) nie istnieje d) $p = 4$

4. a) Dla $m \in \boldsymbol{R}$ równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{m-2}{m^2+4}$.
b) Jeśli $b \in \boldsymbol{R} - \{-9, 9\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = 0$; jeśli $b \in \{-9, 9\}$, to rozwiązaniami równania są wszystkie liczby rzeczywiste.
c) Jeśli $a \in \boldsymbol{R} - \left\{-1\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}\right\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{-3}{3a+5}$; jeśli $a = 1\frac{2}{3}$, to równanie jest tożsamościowe, $x \in \boldsymbol{R}$; jeśli $a = -1\frac{2}{3}$, to równanie jest sprzeczne i nie ma rozwiązań.
d) Jeśli $k \in \boldsymbol{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{1+2k}{1-2k}$; jeśli $k = \frac{1}{2}$, to równanie jest tożsamościowe, $x \in \boldsymbol{R}$.

5. a) $a \in \boldsymbol{R} - \{-4, 4\}$ b) $a \in \boldsymbol{R} - \{0, 2\}$ c) $a \in \boldsymbol{R} - \{1\}$ d) $a \in \boldsymbol{R} - \{3\}$

6. a) Jeśli $a \in \boldsymbol{R} - \{-3\}$, $b \in \boldsymbol{R}$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{b-4}{a+3}$; jeśli $a = -3$ i $b = 4$, to równanie jest tożsamościowe, $x \in \boldsymbol{R}$; jeśli $a = -3$ i $b \in \boldsymbol{R} - \{4\}$, to równanie jest sprzeczne.
b) Jeśli $a \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$, $b \in \boldsymbol{R}$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{9-b^2}{a^2-4}$; jeśli $a \in \{-2, 2\}$ i $b \in \{-3, 3\}$, to równanie jest tożsamościowe, $x \in \boldsymbol{R}$; jeśli $a \in \{-2, 2\}$ i $b \in \boldsymbol{R} - \{-3, 3\}$, to równanie jest sprzeczne.

c) Jeśli $a \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $p \in \mathbf{R}$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{2p+6}{3a-1}$; jeśli $a = \frac{1}{3}$ i $p = -3$, to równanie jest tożsamościowe, $x \in \mathbf{R}$; jeśli $a = \frac{1}{3}$ i $p \in \mathbf{R} - \{-3\}$, to równanie jest sprzeczne.

d) Jeśli $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, $b \in \mathbf{R}$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{9-b^2}{a}$; jeśli $a = 0$ i $b \in \{-3, 3\}$, to równanie jest tożsamościowe, $x \in \mathbf{R}$; jeśli $a = 0$ i $b \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$, to równanie jest sprzeczne.

7. a) $k \in (-2, 2)$ b) $k \in \left(-\infty, 3\frac{1}{2}\right)$ c) $k \in (-3, 2)$ d) $k \in (-2, 4)$ e) $k \in \left\langle 1\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}\right)$

8. $a \in \langle 0, 2)$ b) $a \in \langle -4, 1)$ c) $a \in \langle -1, 0\rangle$ d) $a \in \langle -5, 1\rangle$

9. *wskazówka*: Skorzystaj z wykresu odpowiedniej funkcji.

a) równanie: nie ma rozwiązań, $a \in (-\infty, 3)$; ma jedno rozwiązanie, jeśli $a = 3$; ma dwa rozwiązania, jeśli $a \in (3, +\infty)$;

$$f(a) = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } a \in (-\infty, 3) \text{ jeśli} \\ 1, \text{ jeśli } a = 3 \\ 2, \text{ jeśli } a \in (3, +\infty) \end{cases}$$

b) równanie: nie ma rozwiązań, jeśli $a \in (-3, 7)$; ma dwa rozwiązania, jeśli $a \in (-\infty, -7) \cup \{-3, 7\} \cup (11, +\infty)$; ma trzy rozwiązania, jeśli $a \in \{-7, 11\}$; ma cztery rozwiązania, jeśli $a \in (-7, -3) \cup (7, 11)$

$$f(a) = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } a \in (-3, 7) \\ 2, \text{ jeśli } a \in (-\infty, -7) \cup \{-3, 7\} \cup (11, +\infty) \\ 3, \text{ jeśli } a \in \{-7, 11\} \\ 4, \text{ jeśli } a \in (-7, -3) \cup (7, 11) \end{cases}$$

Nierówności liniowe z parametrem, s. 89

1. a) $m = -2\frac{1}{4}$ b) $m = -\frac{1}{4}$
2. a) $p = 3$ b) $p = -2$
3. a) $a \in (-\infty, -4\rangle$ b) $a \in (-\infty, 14)$ c) $a \in (-\infty, 17\rangle$ d) $a \in \langle 0, +\infty)$
4. a) $m = 2$ b) $m = -1\frac{1}{3}$ c) $m \in \left(-\infty, 5\frac{1}{2}\right)$ d) $m \in \left\langle 2\frac{5}{7}, +\infty\right)$
5. a) $p = 3$ b) $p = -6$ c) nie istnieje taka wartość parametru d) $p = 4\frac{1}{2}$
6. a) $m = -6$ b) $m \in \{-1, 1\}$ c) $m \in \left\{-6\frac{2}{3}, 12\right\}$ d) $m = 2\frac{1}{2}$

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem, s. 95

1. a) $\begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases}$ b) układ sprzeczny c) $\begin{cases} x=1\frac{24}{43} \\ y=\frac{2}{43} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=5\frac{2}{11} \\ y=2\frac{3}{22} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=\sqrt{3}+2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{3}-\sqrt{2}-2 \end{cases}$

2. a) jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{6\}$, to układ równań ma jedno rozwiązanie: $\left(\frac{1-2m}{m-6}, \frac{3-m^2}{m-6}\right)$; jeśli $m = 6$, to układ jest sprzeczny
b) jeśli $m = -1$, to rozwiązaniem układu równań jest każda para liczb mająca postać $(x, x+2)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$, to układ jest sprzeczny
c) jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$, to układ ma jedno rozwiązanie: $\begin{cases} x=\frac{m}{m^2-4} \\ y=\frac{-1}{m^2-4} \end{cases}$; jeśli $m \in \{-2, 2\}$, to układ jest sprzeczny
d) jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-2, 0\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x=\frac{3}{m} \\ y=0 \end{cases}$; jeśli $m = -2$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami postaci $(x, 2x+3)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; jeśli $m = 0$, to układ jest sprzeczny
e) jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x=\frac{6m-3}{2m-3} \\ y=\frac{4}{2m-3} \end{cases}$; jeśli $m = \frac{3}{2}$, to układ jest sprzeczny
f) jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-4, 4\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x=\frac{3}{4-m} \\ y=\frac{m^2+6m+8}{m^2-16} \end{cases}$, czyli $\begin{cases} x=\frac{3}{4-m} \\ y=\frac{m+2}{m-4} \end{cases}$; jeśli $m = -4$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb postaci $\left(x, 2x-\frac{1}{2}\right)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; jeśli $m = 4$, to układ jest sprzeczny

4. $k \in \langle -9, -7)$

5. $a \in \left(-24, -13\frac{3}{5}\right)$

6. $m = 5\frac{1}{2}$

7. $p = 2$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2., s. 96-98

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Odpowiedź	A	C	B	A	D	B	D	D	B	C	A	C	A	D

Zadania otwarte

15. a) $x \in \{\sqrt{3}-3, \sqrt{3}+3\}$ b) $x \in \{2\}$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \{-3, -1\}$

e) $x \in \{3, 11\}$

16. jeśli $k = -13$, to drugim rozwiązaniem równania jest (-16); jeśli $k = -5$, to drugim rozwiązaniem równania jest 0

17. a) $x \in (-\infty, -8\rangle \cup \langle -2, +\infty)$ b) $x \in \mathbf{R}$ c) $x \in \left(-3\sqrt{2}-2, -3\sqrt{2}+2\right)$

d) $x \in \left\langle 8-5\sqrt{3}, 8+5\sqrt{3}\right\rangle$

18. $A \cap B = (1, 3\rangle$ $A - B = \langle -1, 1\rangle$ $B - A = (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$, $A \cup B = (-\infty, -5) \cup \langle -1, +\infty)$

19. Liczby spełniające nierówność to 1 i 5, więc ich iloczyn jest liczbą podzielną przez 5.

23. a) $x \in \{-3, 9\}$ b) $x \in \{-4, 6\}$ c) $x \in \left\{3\frac{1}{5}, 14\right\}$

24. a) $x \in \langle -9, -1\rangle$ b) $x \in \left(-\infty, -1\frac{1}{5}\right) \cup \left(2\frac{2}{5}, +\infty\right)$ c) $x \in (-6, -4) \cup \left(5\frac{1}{3}, +\infty\right)$

25. a) $x \in \langle -2, 2\rangle$ b) $x \in \{2, 6, 10\}$ c) $x \in \{-2, 3\}$

26. a) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \{-5\} \cup \langle -3, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle 0, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, 0)$

27. a) równanie ma jedno rozwiązanie: $x = k - 1$, jeśli $k \in \mathbf{R} - \{-1\}$; jeśli $k = -1$, to równanie spełnia każda liczba rzeczywista

b) jeśli $k \in \mathbf{R} - \{5\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{k+5}{5-k}$; jeśli $k = 5$, to równanie jest sprzeczne

c) jeśli $k \in \mathbf{R} - \{-4, 4\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{2k}{k-4}$; jeśli $k = 4$, to równanie jest sprzeczne; jeśli $k = -4$, to równanie jest tożsamościowe

28. a) $m = 2$ b) $m = -3$

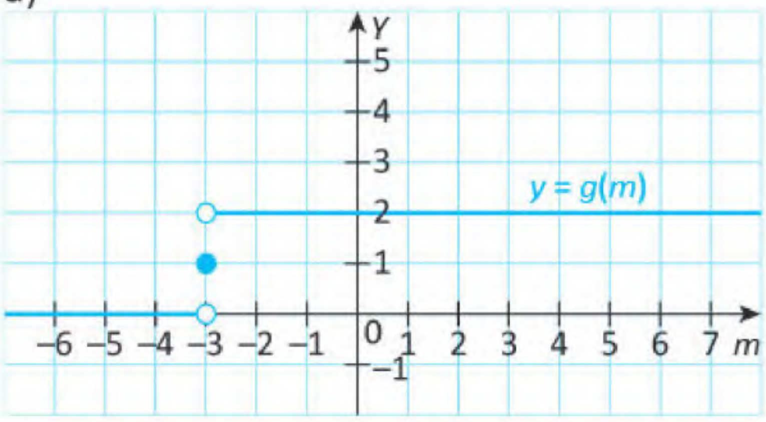
29. a) $p = -1\frac{1}{2}$ b) $p = 2$

30. $k \in \langle 1, +\infty)$

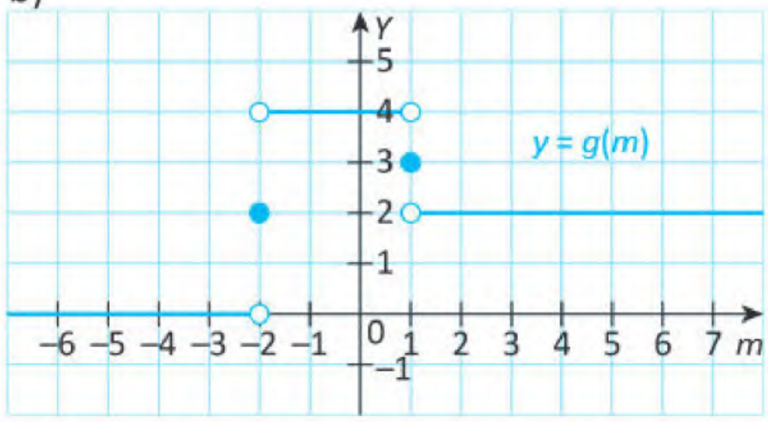
31. a) $a = -4$ b) $a = 1$

32. a) $m \in (-2, 1)$ b) $m = 7$

33. a)



b)



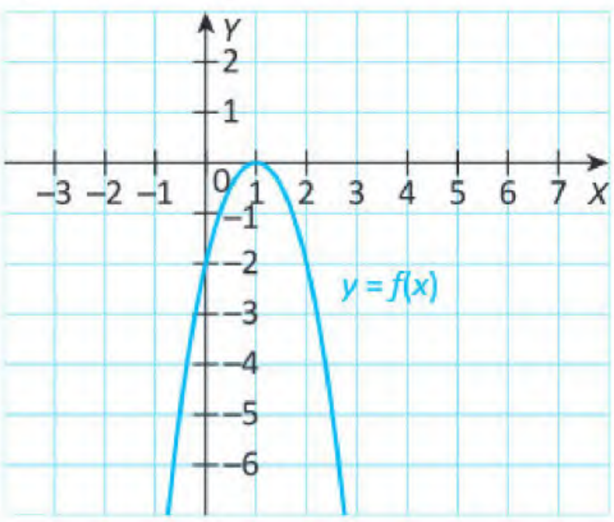
34. Jeśli $a \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$, to układ równań spełnia jedna para liczb $\begin{cases} x = \dfrac{4}{a+2} \\ y = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$; jeśli $a = -2$, to układ nie ma rozwiązań; jeśli $a = 2$, to układ równań spełnia nieskończenie wiele par liczb postaci: $\left(x, \dfrac{2-x}{2}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$.

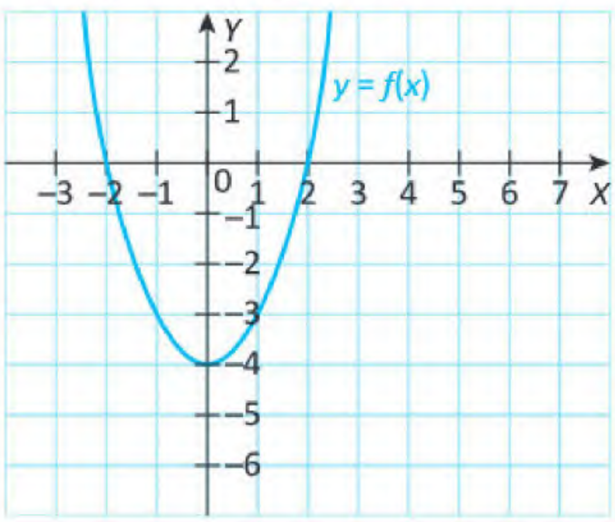
35. $k \in (1, +\infty)$

3. Funkcja kwadratowa

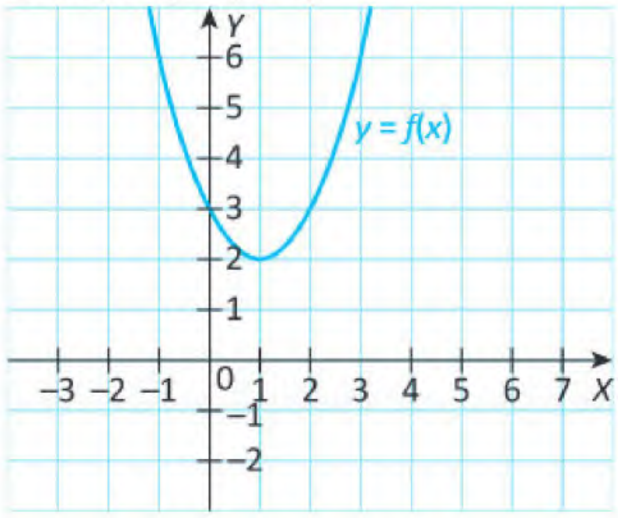
Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej z I klasy, s. 102-103

1. a) $f(x) = -9x^2 + 12x$; $a = -9$, $b = 12$, $c = 0$ b) $f(x) = -2x^2 + 2x - 3$; $a = -2$, $b = 2$, $c = -3$ c) $f(x) = 2x^2 - 1$; $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ d) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ e) $f(x) = 2x^2 - 2x$ f) $f(x) = 4x^2$
2. a) $y = -0{,}5x^2$ b) $y = 3x^2$ c) $y = -2x^2$
3. a) $b = 2$, $c = 4$ b) $b = -1$, $c = -9$
4. a) $y = -2x^2 + 5$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 11$
5. a) $f(x) = 2(x-3)^2$ b) $f(x) = -(x+5)^2$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$ d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 7$
6. a) $y = 3(x+2)^2 - 5$ b) $y = 3(x-4)^2 + 3$
7. a) $W(1, 0)$; $(0, -2)$ b) $W(0, -4)$; $(0, -4)$

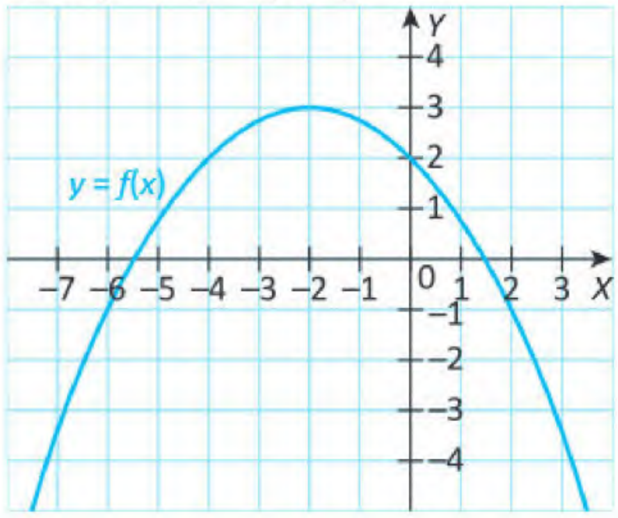




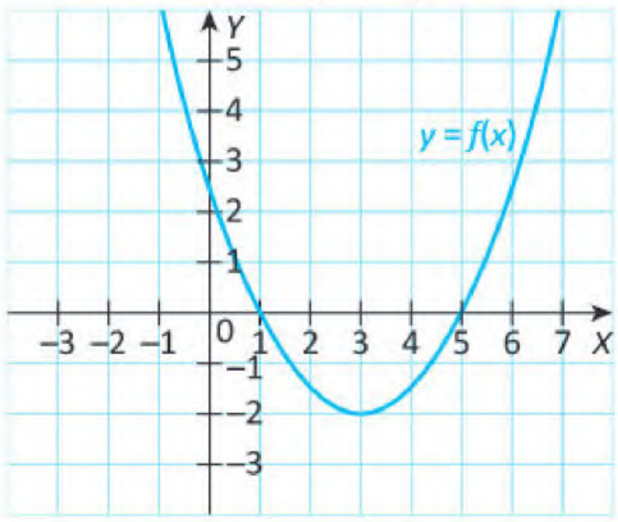
c) $W(1, 2)$; $(0, 3)$



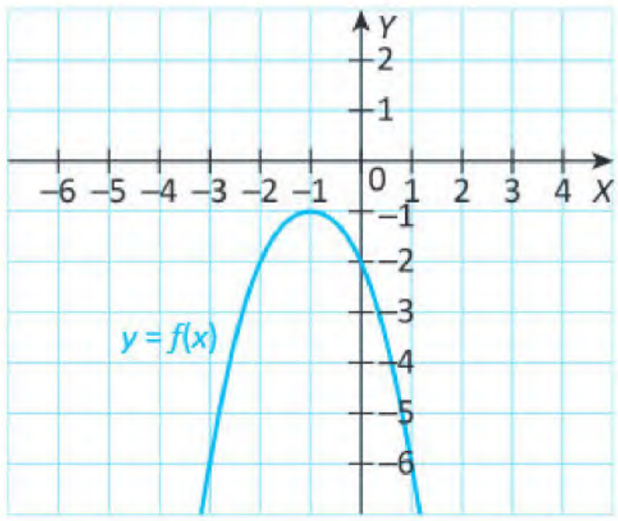
d) $W(-2, 3)$; $(0, 2)$



e) $W = (3, -2)$; $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$



f) $W(-1, -1)$; $(0, -2)$



8. a) $ZW = \langle -4, +\infty)$; f malejąca w przedziale $(-\infty, -2\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2, +\infty)$; $x = -2$
   b) $ZW = (-\infty, 6\rangle$; f rosnąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$; $x = 1$
   c) $ZW = \langle 0, +\infty)$; f malejąca w przedziale $(-\infty, -4\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -4, +\infty)$; $x = -4$
   d) $ZW = (-\infty, 0\rangle$; f rosnąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 3, +\infty)$; $x = 3$
   e) $ZW = \langle -1, +\infty)$; f malejąca w przedziale$(-\infty, -4\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -4, +\infty)$; $x = -4$
   f) $ZW = (-\infty, -4\rangle$; f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$; $x = 2$

9. a) $f(x) = (x+2)^2$ b) $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$
   d) $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$

10. $f(x) = 7 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -4)$

11. $f(x) = 3(x-2)^2 - 5$

Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, s. 107

1. a) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$ c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 17$

2. a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 6$ b) $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$ c) $f(x) = -2(x-3)^2 - 2$

3. a) $\Delta = 0$ b) $\Delta = 25$ c) $\Delta = -36\sqrt{2}$

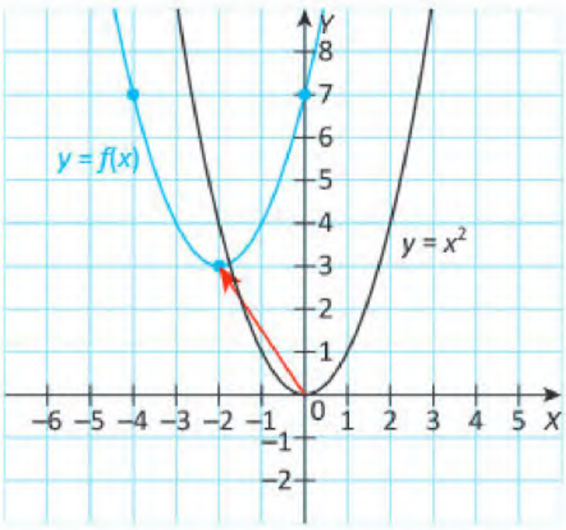
4. a) $W(4, 5)$ b) $W\left(-\frac{4}{5}, -3\frac{1}{5}\right)$ c) $W\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

5. a) $b = -3$ b) $b = 2$ c) $b = -6$

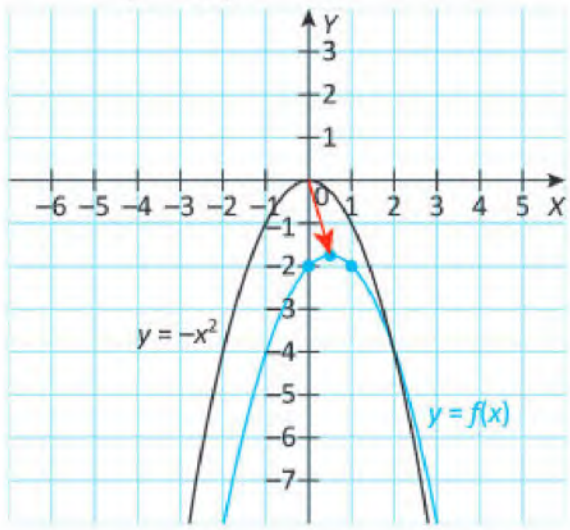
6. a) $a = -2, b = -6, c = 8$ b) $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = -2$ c) $a = -\frac{2}{3}, b = 4, c = -16$

7. a) $a = -2$; $(0, -13)$ b) $a = 3$; $(0, 0)$ c) $a = \frac{1}{8}$; $(0, 8)$

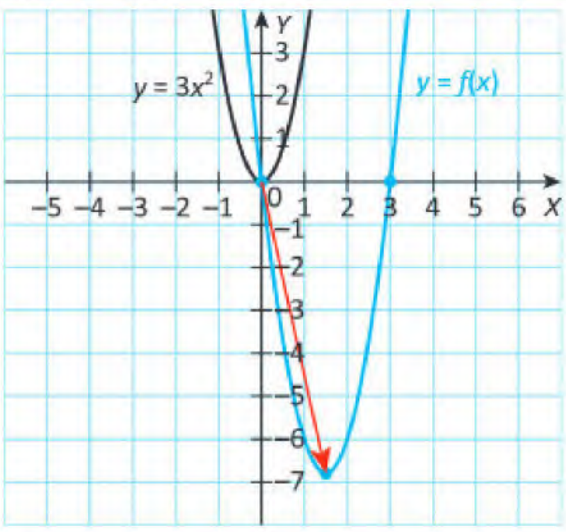
8. a) $f(x) = (x+2)^2 + 3$, $(0, 7), (-4, 7)$



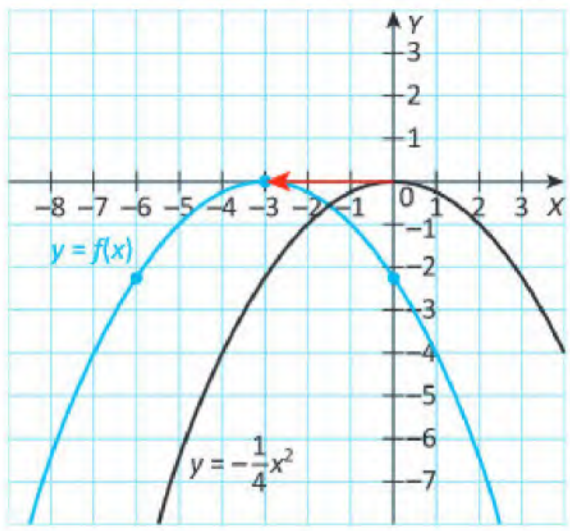
b) $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\frac{3}{4}$, $(0, -2), (1, -2)$



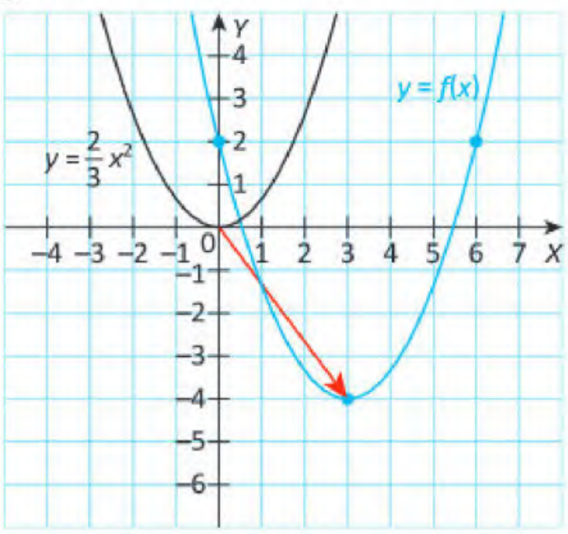
c) $f(x) = 3\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{3}{4}$ $(0, 0)$, $(3, 0)$



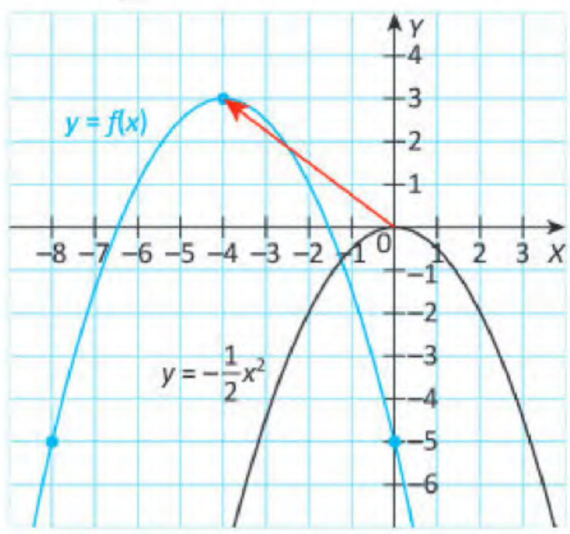
d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2$, $\left(0, -2\frac{1}{4}\right), \left(-6, -2\frac{1}{4}\right)$



e) $f(x) = \frac{2}{3}(x-3)^2 - 4$, $(0, 2)$, $(6, 2)$



f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)^2 + 3$, $(0, -5), (-8, -5)$



Miejsce zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej, s. 114

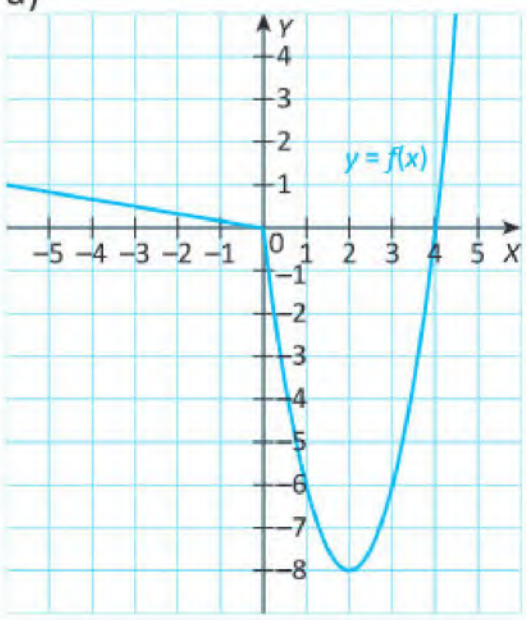
1. a) dwa b) dwa c) jedno
2. a) dwa b) zero c) jedno
3. a) -8, 8 b) 0, 10 c) brak miejsc zerowych
4. a) -7, 1 b) -6 c) -3, 0
5. a) $y=\frac{1}{2}(x+6)\cdot x$ b) $y=-5(x-6)^2$ c) $y=6(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})$
6. a) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+10$ b) $f(x)=3x^2-21x$ c) $f(x)=\frac{1}{6}x^2+3x+13\frac{1}{2}$
7. a) $y=\frac{1}{2}(x-3)(x+5)$ b) $y=-2x(x-6)$ c) $y=-\frac{1}{4}(x+8)^2$
8. a) $x_1=-5,\ x_2=3,\ W(-1,-32)$ b) $x_1=-2,\ x_2=0,\ W\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ c) $x_1=-4,\ x_2=4,\ W(0,16)$
9. a) $f(x)=\frac{3}{4}(x-6)^2-3$ b) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2\sqrt{2})^2+4$ c) $f(x)=2\left(x+3\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$
   d) $y=-2(x+1)^2$ e) $y=-(x-6)^2$ f) $y=x^2-5$
10. a) $f(x)=(x+3)(x+7)$ b) $f(x)=-2(x-3)(x+1)$ c) nie istnieje

Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu, s. 117

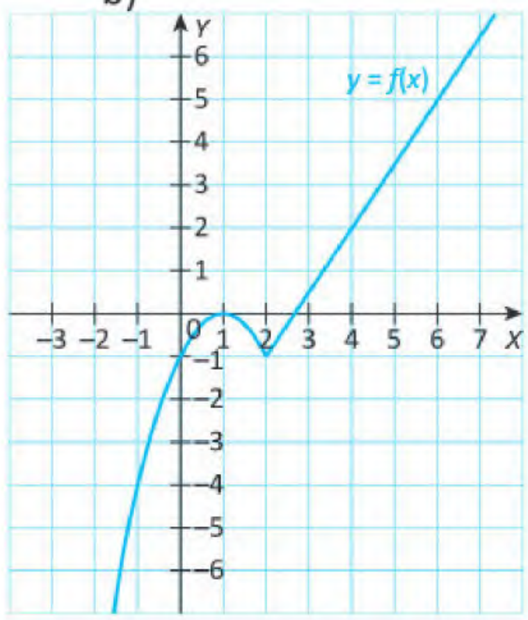
1. a) $D_f=\boldsymbol{R}$, $ZW_f=\left\langle -4\frac{1}{2},+\infty\right)$, miejsca zerowe: -4 oraz 2,
   $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$, $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-4,2)$, funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -1,+\infty)$, funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty,-1\rangle$, funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą $-4\frac{1}{2}$ dla argumentu -1

   c) $D_f=\boldsymbol{R}$, $ZW_f=(-\infty,0\rangle$, miejsce zerowe: -2, $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\boldsymbol{R}-\{-2\}$, funkcja nie przyjmuje wartości dodatnich, funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty,-2\rangle$, funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -2,+\infty)$, funkcja przyjmuje największą wartość równą 0 dla argumentu -2.
2. a) $x\in(-1,2)$ b) $x\in(-\infty,0\rangle\cup\langle 2,+\infty)$
3. a) $a>0,\ b>0,\ c<0,\ \Delta>0$ b) $a<0,\ b>0,\ c<0,\ \Delta<0$ c) $a>0,\ b>0,\ c>0,\ \Delta=0$
   d) $a<0,\ b<0,\ c>0,\ \Delta>0$

4. a)



b)



Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności, s. 120-121

1. $b = 12, \ c = 0$
2. $b = -1, \ c = 12$
3. $f(x) = -0{,}5x^2 + 8x - 31$
4. $f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 - 9$
5. $f(x) = 0{,}6x^2 + 1{,}2x + 0{,}6$
6. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$
7. $f(x) = -2(x-2)^2 + 32$
8. $f(x) = 2x^2 - 32x + 96$
9. $f(x) = -2x^2 + 16x - 32$
10. $f(x) = -0{,}2 \cdot (x+9)(x-1)$
11. $f(x) = 3(x-3)^2 - 48$
12. $f(x) = 1\frac{3}{4}x^2 - 10\frac{1}{2}x + 11\frac{3}{4}$
13. $f(x) = 2(x-3)^2 - 32$
14. $f(x) = -2 \cdot \left(x + \frac{12+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{12-\sqrt{2}}{2}\right)$
15. $f(x) = -x^2 + 10x - 21$
16. $a = -\frac{1}{4}, \ b = -1$
17. $a = \frac{1}{2}, \ b = 2$
18. $b = -4\sqrt{2}, c = 4$ lub $b = 4\sqrt{2}, c = 4$

Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym, s. 124-125

1. a) w przedziale $\langle 3, 5\rangle$: wartość najmniejsza –3, wartość największa –1; w przedziale $\langle 1, 6\rangle$: wartość najmniejsza –6, wartość największa –1; b) w przedziale $\langle 2, 6\rangle$: wartość najmniejsza 0, wartość największa 1; w przedziale $\langle 6, 8\rangle$: wartość najmniejsza 1, wartość największa 4
2. a) najmniejsza wartość: –4, największa wartość: 5 b) najmniejsza wartość: –3, największa wartość: 1 c) najmniejsza wartość: 0, największa wartość: $2\frac{1}{4}$.
3. a) najmniejsza wartość: 2, największa wartość: $3\frac{2}{3}$ b) najmniejsza wartość: –8, największa wartość: 0 c) najmniejsza wartość: $2\frac{4}{5}$, największa wartość: 6 d) najmniejsza wartość: $12-4\sqrt{2}$, największa wartość: 11 e) najmniejsza wartość: 0, największa wartość: 1 f) najmniejsza wartość: $-12\frac{1}{2}$, największa wartość: –8.
4. dla argumentu 5 funkcja *f* przyjmuje najmniejszą wartość
5. a) *f* przyjmuje największą wartość dla argumentu –2 b) *f* jest rosnąca w zbiorze $(-\infty, -2\rangle$, więc jest też rosnąca w przedziale $\langle -4\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\rangle$, $x_w \notin \langle -4\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\rangle$.
6. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$
7. $f(x) = 2(x-2)^2 - 4$
8. $f(x) = -1(x+3)(x-2)$
9. $f(x) = 2(x-4)^2$, *wskazówka*: $W(4, 0)$, zatem $f(1) = 18$ i parabola ma ramiona skierowane do góry
10. $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{16}{5}x - \frac{24}{5}$
11. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$
12. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$ lub $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 8$

Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne, s. 129-130

1. pierwsza liczba to 40, druga to –40
2. pierwsza liczba to 4,8, druga to 19,2
3. 6 cm, $3\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{5}$ cm
4. a) $P(x) = -x^2 + 6x + 160$, $D = (0, 16)$ b) $x = 3$ cm, największe pole: 169 cm^2
5. 0,5 m na 1 m

6. 12. dnia skupu, 432 kg
7. $t \in \langle 0; 2{,}4 \rangle$ 7,2 m
8. a) $S(t) = -t^2 + 9{,}8t + 2$, gdzie $t \in \langle 0, 10 \rangle$ b) piłka spadła po 10 s
9. 76 zł

Równania kwadratowe, s. 133-134

1. a) $x \in \{-1, 8\}$ b) $x \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$ c) równanie sprzeczne d) $x = 2$ e) równanie sprzeczne

   f) $x \in \left\{-\frac{5}{6}, 1\right\}$

2. a) $x \in \{0, 5\}$ b) $x \in \{-2, 2\}$ c) $x \in \left\{0, \frac{3}{5}\right\}$ d) równanie sprzeczne e) $x \in \{-2, 0\}$

   f) $x \in \left\{-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right\}$

3. a) $x = 5$ b) $x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right\}$ c) $x \in \left\{-2, -\frac{2}{3}\right\}$ d) $x \in \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$ e) $x \in \left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$ f) $x \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

4. a) $x \in \left\{-\frac{1}{5}, 0\right\}$ b) $x \in \{-1, 1\}$ c) $x \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ d) $x \in \{1, 2\}$ e) $x = 8$

   f) równanie sprzeczne g) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ h) $x = 2$ i) $x \in \left\{-2, -\frac{3}{2}\right\}$

5. a) $x \in \{-1, 3\}$ b) równanie sprzeczne c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x \in \{-1, 5\}$ e) $x \in \left\{-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right\}$

   f) $x \in \left\{-1\frac{1}{4}, 3\right\}$ g) $x \in \left\{2, 3\frac{1}{3}\right\}$ h) $x \in \{5 - 5\sqrt{2}, 5 + 5\sqrt{2}\}$ i) $x \in \left\{\frac{1}{5}, 5\right\}$

7. a) $x \in \left\{0, 5\frac{1}{2}\right\}$ b) równanie sprzeczne c) $x = -\frac{1}{3}$ d) $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, -1\right\}$

   e) $x \in \left\{\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right\}$ f) $x \in \{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$

8. a) $x \in \{-6, -1\}$ b) $x \in \left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x \in \{-5, 0\}$ e) $x \in \left\{\frac{1}{2}, 6\right\}$ f) $x \in \left\{-\frac{1}{4}, 1\right\}$

9. a) $x \in \left\{-\frac{3}{4}, 0\right\}$ b) $x \in \left\{-\frac{7}{19}, 1\right\}$ c) $x \in \left\{\frac{-9-3\sqrt{2}}{7}, \frac{-9+3\sqrt{2}}{7}\right\}$

10. a) $b = 7\frac{1}{5}$, $c = -14$, b) $b = 0$, $c = -98$, c) $b = -6$, $c = 3\frac{1}{2}$, d) $b = -8\sqrt{3}$, $c = 18$

11. a) $b=-6$, $c=1\frac{1}{2}$, b) $b=48$, $c=96$, c) $b=-2\sqrt{2}$, $c=\frac{1}{3}$, d) $b=40$, $c=66\frac{2}{3}$

12. a) $x=1$ lub $x=5$ b) $x=-3$ lub $x=1$ c) $x=2$ lub $x=5$ d) $x=-3$ lub $x=0$

13. a) $a=4$ b) $a=-5$ lub $a=5$ c) $a=-3$ lub $a=3$ d) $a=-2\frac{1}{3}$ lub $a=1$

17. a) Jeśli $a=2$, to równanie ma tylko jedno rozwiązanie $x=3$; jeśli $a=-\frac{2}{3}$, to równanie ma drugie rozwiązanie $x=-\frac{5}{9}$

b) Jeśli $a=1$, to równanie ma drugie rozwiązanie $x=-2\frac{1}{2}$; jeśli $a=-1\frac{1}{4}$, to równanie ma drugie rozwiązanie $x=-3\frac{5}{8}$

Równania prowadzące do równań kwadratowych, s. 138

1. a) $x\in\{-\sqrt{5},-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$ b) $x\in\{-2, 2\}$ c) równanie sprzeczne
d) $x\in\{-5, 5\}$ e) $x\in\{-9, 0, 9\}$ f) $x=0$

2. a) $x\in\{-1, 1\}$ b) $x\in\{-\sqrt{10},-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{10}\}$ c) $x\in\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$
d) równanie sprzeczne e) równanie sprzeczne f) $x\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

3. a) $x\in\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ b) $x\in\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ c) równanie sprzeczne
d) $x\in\{-1, 0, 1\}$ e) $x\in\{-1, 1\}$ f) $x\in\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

5. a) $x\in\{-2,-1, 1, 2\}$ b) $x\in\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$ c) $x\in\left\{-\frac{5}{2},-2,-\frac{1}{2},0\right\}$
d) równanie sprzeczne e) $x=0$ f) $x\in\{-2,-1, 2, 3\}$

6. a) $x=9$ b) $x\in\{0, 1\}$ c) $x=4$
d) $x=1$ e) $x\in\{5, 6\}$ f) $x\in\{-3, 1\}$

7. a) $x=4$ b) $x\in\{10, 17\}$ c) $x=0$
d) $x\in\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$ e) $x=11$ f) $x\in\{-79,-14\}$
g) $x\in\{-\sqrt{6},-1,1,\sqrt{6}\}$ h) równanie sprzeczne

Nierówności kwadratowe, s. 141-142

1. a) $x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$ b) $x=0$ c) $x\in(-2, 2)$ d) $x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle 3,+\infty)$
e) nierówność sprzeczna f) $x\in\boldsymbol{R}$

2. a) $x \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$ b) $x \in \left\langle 0, 2\frac{2}{3} \right\rangle$ c) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ d) $x = 2$

e) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ f) $x \in \boldsymbol{R}$

3. a) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{1\frac{2}{3}\right\}$ b) $x \in \langle -3, 5 \rangle$ c) $x \in \boldsymbol{R}$ d) nierówność sprzeczna

e) $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 9, +\infty)$ f) $x \in \left(-\infty, -1\frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

4. a) $x \in \left(-1, \frac{2}{7}\right)$ b) $x \in (-\infty, -4) \cup \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) $x \in \left\langle -1, -\frac{1}{3} \right\rangle$

e) $x \in \boldsymbol{R}$ f) $x \in \boldsymbol{R} - \{-3\}$

5. a) $x \in \left(-2, 3\frac{1}{5}\right)$ b) $x \in \{-3\}$ c) $x \in \boldsymbol{R}$ d) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

e) $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$ f) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right)$

7. a) tak, $a = -\frac{1}{3}$ b) nie, *wskazówka*: musiałyby być spełnione jednocześnie dwa warunki: $a < 0$ i $a \cdot (-4) + 1 = 0$.

8. a) $D = \langle 0, 3 \rangle$ b) $D = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ c) $D = \boldsymbol{R} - \{3\}$ d) $D = \boldsymbol{R}$

9. a) $m \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ b) $m \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ c) $m \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

d) $m \in \langle -3, -1 \rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2} \right\rangle$

Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych, s. 145-146

1. –28 i –23 lub 23 i 28
2. –17, –15, –13 lub 21, 23, 25
3. 35 lub 53
4. 325
5. –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5
6. 15, 24, 33
7. 140 m
8. 5 m × 2,5 m
9. 30 cm
10. 2 m
11. 10 cm lub 15 cm

12. o 5%

13. 2%

Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego, s. 151

1. a) $x = 6$ b) $x = 2$ c) $x = 1$ d) $x = 3$

2. a) $x = 1$ b) równanie sprzeczne c) $x = 6$ d) $x \in \left\{2, 2\frac{1}{2}\right\}$

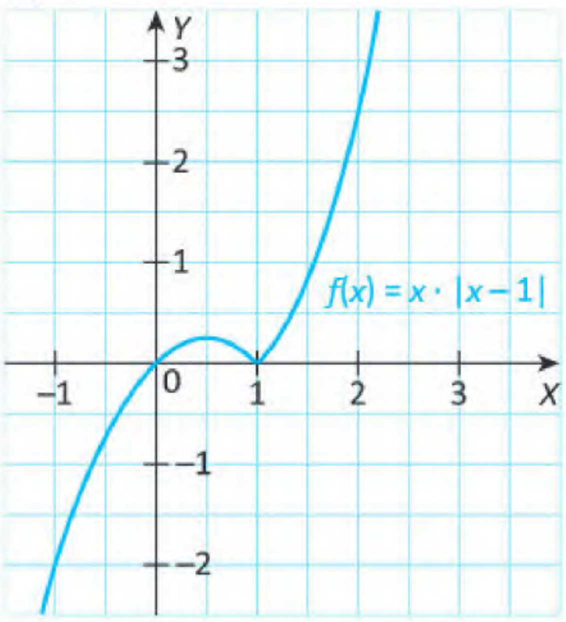
3. a) $x = 5$ b) $x = -1$ c) $x = 1$ d) $x = 7$

4. a) $x \in (1, +\infty)$ b) $x \in \langle 6, +\infty)$ c) $x \in \langle 3, +\infty)$ d) $x \in (-5, 4\rangle$

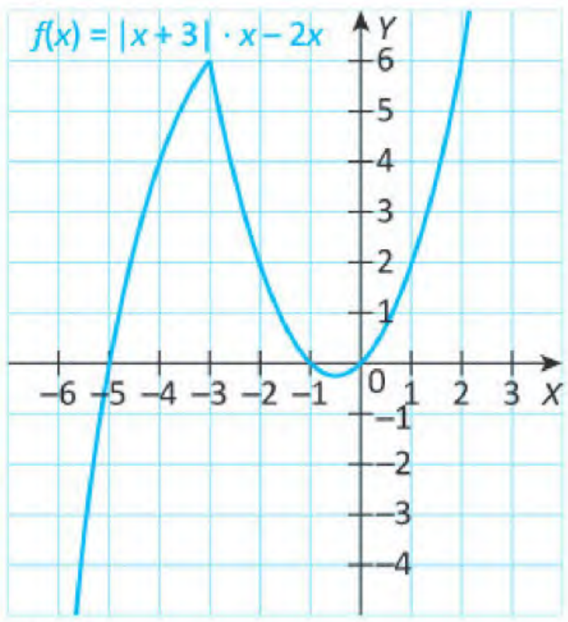
5. a) $x \in \langle -2, 0\rangle$ b) $x \in \langle 0, 1)$ c) $x \in \left(-\infty, 1\frac{4}{9}\right\rangle$ d) $x \in \left(-\infty, -2\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną, s. 154

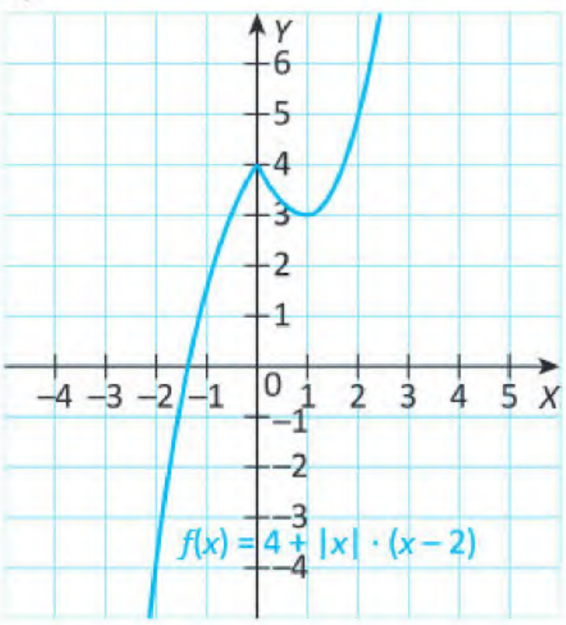
1. a)



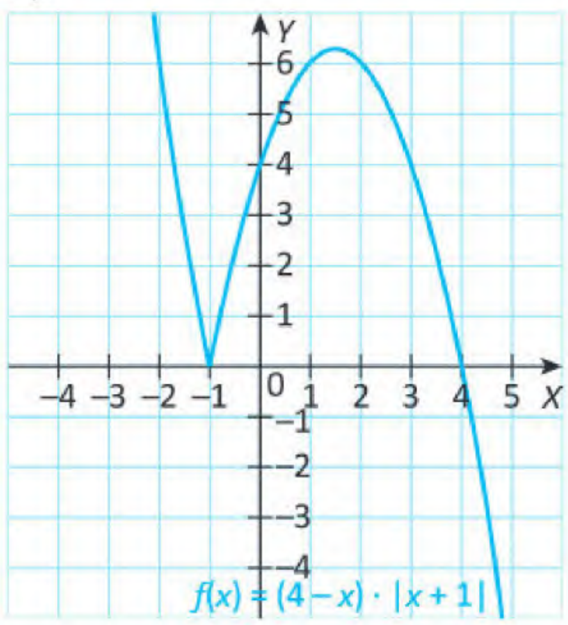
b)



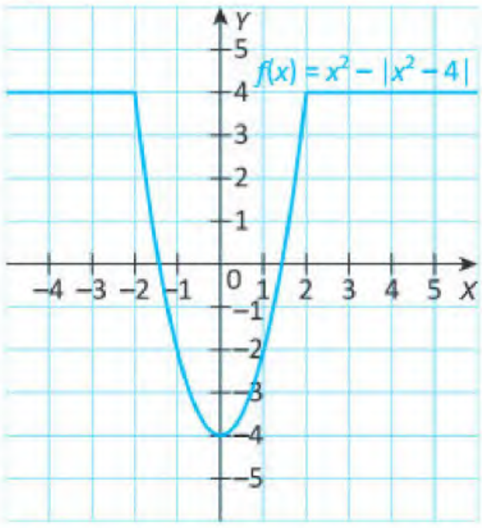
c)



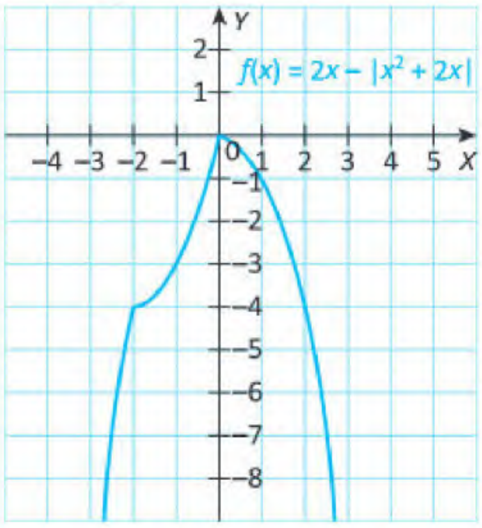
d)



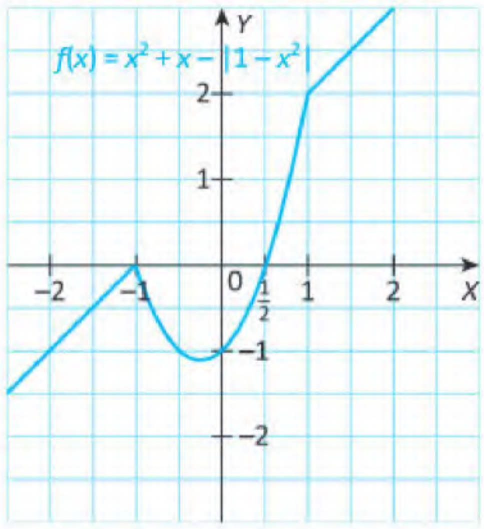
2. a)



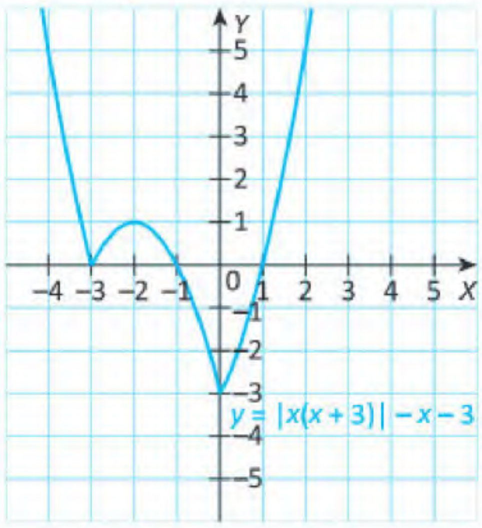
b)



c)



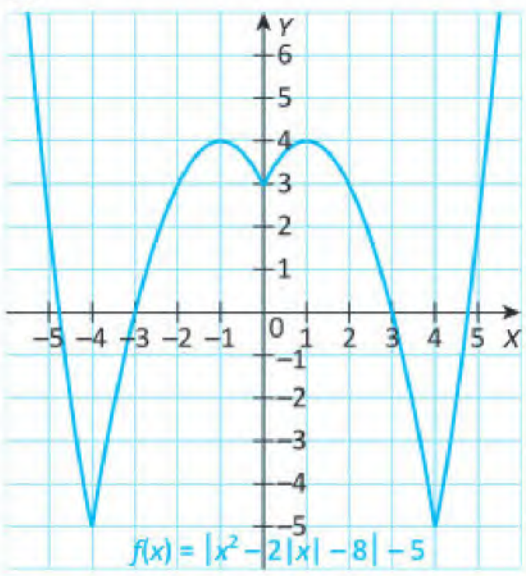
d)



3. a) $f_1(x) = |x^2 - 2x - 3|$, $\vec{u} = [0, -2]$
b) I sposób: $f_1(x) = |x^2 - 1|$, $f_2(x) = -f_1(x)$, $f_3(x) = f_2(x) + 1$, $f_4(x) = |f_3(x)|$, $f(x) = -2f_4(x)$;
II sposób: Jeśli $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$, to $f(x) = -|4 - 2x^2|$, jeśli $x \in (-1, 1)$, to $f(x) = -2x^2$
c) $f_1(x) = x^2 - 4x - 5$, $f_2(x) = f_1(|x|)$, $f(x) = |f_2(x)|$
d) $f_1(x) = |x^2 - 2x|$, $f_2(x) = f_1(x) - 3$, $f_3(x) = |f_2(x)|$, $f(x) = f_3(x) - 1$

4. a) *wskazówka*: wzór funkcji można zapisać w postaci: $f(x) = |x - 3| \cdot (1 - |x + 3|)$.
Jeśli $x \in (-\infty, -3)$, to $f(x) = -(x - 3)(x + 4)$; jeśli $x \in \langle -3, 3)$, to $f(x) = (x - 3)(x + 2)$; jeśli $x \in \langle 3, +\infty)$, to $f(x) = -(x - 3)(x + 2)$
b) *wskazówka*: wzór funkcji można zapisać w postaci: $f(x) = |x + 2| \cdot (|x - 2| + 1)$.
Jeśli $x \in (-\infty, -2)$, to $f(x) = (x + 2)(x - 3)$; jeśli $x \in \langle -2, 2)$, to $f(x) = -(x + 2)(x - 3)$; jeśli $x \in \langle 2, +\infty)$, to $f(x) = (x + 2)(x - 1)$

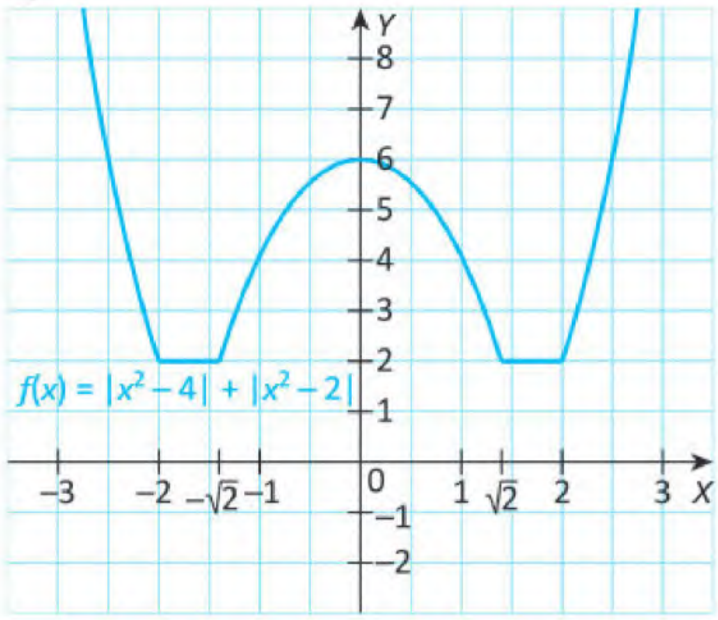
5. a)



b) miejsca zerowe: $-1-\sqrt{14}$, -3, 3, $1+\sqrt{14}$; wskazówka: $|x^2-2|x|-8|-5=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x^2-2|x|-8|=5 \Leftrightarrow (x^2-2|x|-8=5 \vee x^2-2|x|-8=-5) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2-2|x|-13=0 \vee x^2-2|x|-3=0)$. Następnie rozpatrz przypadki:

1. $\begin{cases} x<0 \\ x^2+2x-13=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2-2x-13=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x<0 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$

6. a)



b) $ZW_f=\langle 2, +\infty)$ c) $g(x)=0 \Leftrightarrow x\in\langle 0, 2-\sqrt{2}\rangle \cup \langle 2+\sqrt{2}, 4\rangle$

Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną, s. 159

1. a) $x\in\{-7, 7\}$ b) $x\in\{-4, 4\}$ c) $x\in\left\langle\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ d) $x\in\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{3}{2}, +\infty\right)$

   e) $x\in\{-4, -2, 0\}$ f) $x\in\{0, 2, 3\}$
2. a) $x\in\{1\}$ b) $x\in\{-2, 1\}$ c) $x\in\{-10, -4\}$ d) $x\in\{-9, -2{,}5\}$
3. a) $x\in\{0, 11\}$ b) $x=0$ c) $x\in\{-1, 0\}$ d) $x\in(-\infty, -4\rangle\cup\langle -2, +\infty)$
4. a) $x=-1$ b) $x\in\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ c) równanie sprzeczne d) $x\in\langle 0, 1\rangle$
5. a) $x\in\langle 0, 2\rangle\cup\{-1\}$ b) $x\in(-\infty, -2)\cup(3, +\infty)$ c) $x\in(-4, 0)\cup(0, 2)$
   d) $x\in(-\infty, -3)\cup(-1, 2)\cup(2, +\infty)$
6. a) $x\in\langle 0, 3\rangle$ b) $x\in(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ c) nierówność sprzeczna d) $x\in\left(-\infty, 2+\sqrt{5}\right\rangle$

   e) $x\in(-\infty, -1)\cup(4, +\infty)$ f) $x\in\langle -3, 0\rangle\cup\langle 1, +\infty)$
7. a) $x\in(-2, 0)\cup(0, 4)$ b) $x\in\boldsymbol{R}$ c) $x\in(-1, +\infty)$ d) $x\in\{-2\}\cup\langle 0, 4\rangle$

Wzory Viete'a, s. 164

1. a) są różnych znaków b) są ujemne c) są dodatnie d) są różnych znaków e) są różnych znaków f) są ujemne

2. a) $b=-2,\ c=-15$ b) $b=14,\ c=20$ c) $a=-1,\ c=4$ d) $a=\frac{1}{2},\ b=3$

3. a) $a<0,\ b<0,\ c<0$ b) $a>0,\ b<0,\ c>0$ c) $a<0,\ b>0,\ c<0$ d) $a>0,\ b>0,\ c>0$

6. $6\frac{1}{2}$

7. $4\sqrt{2}$

9. $p=2,\ q=6$

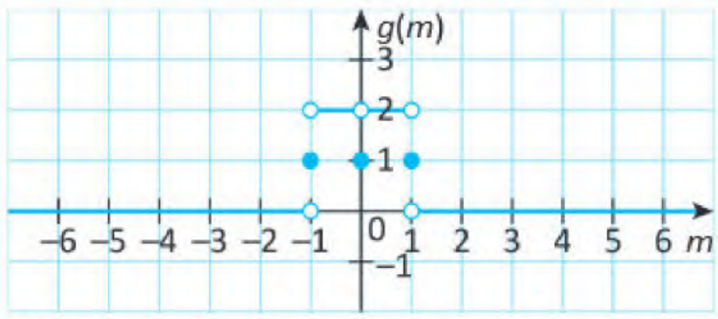
10. a) $x^2-4x-1=0$ b) $x^2-7x+19=0$ c) $7x^2+21x-1=0$
d) $x^2+4x-2=0$ lub $5x^2+20x+8=0$

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem, s. 172-173

1. a) $k\in\left(-2\frac{2}{3},-2\right)\cup(-2,0)$ b) $k\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}$
c) $k\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$ d) $k\in\left(-\infty,\frac{22}{13}\right\rangle\cup(2,+\infty)$

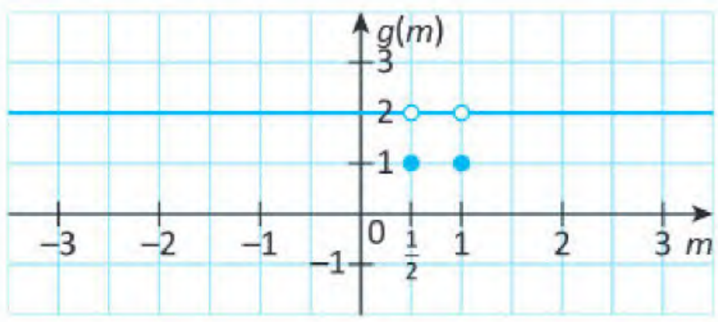
2. a) równanie nie ma rozwiązań wtedy, gdy $m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; równanie ma jedno rozwiązanie wtedy, gdy $m\in\{-1,0,1\}$; równanie ma dwa różne rozwiązania wtedy, gdy $m\in(-1,0)\cup(0,1)$

$$g(m)=\begin{cases}0, & \text{jeśli } m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ 1, & \text{jeśli } m\in\{-1,0,1\}\\ 2, & \text{jeśli } m\in(-1,0)\cup(0,1)\end{cases}$$



b) równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $m\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}$ równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy $m\in\boldsymbol{R}-\left\{\frac{1}{2},1\right\}$

$$g(m)=\begin{cases}1, & \text{jeśli } m\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}\\ 2, & \text{jeśli } m\in R-\left\{\frac{1}{2},1\right\}\end{cases}$$



3. a) $p\in(-3,0)\cup(0,1)$ b) $p\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ c) $p\in(2,3)$ d) $p\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

4. a) $a\in\left(-\infty,1\frac{1}{3}\right)$ b) $a\in\langle 1,+\infty)$

5. $m\in(0,1)\cup(1,2)$

6. $a\in\left(-\infty,-2\frac{1}{3}\right\rangle\cup\left\langle-\frac{1}{3},+\infty\right)$

7. $k \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right)$

8. $m = -1$; *wskazówka*: Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} 3x_2 - 2x_1 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$.

9. $p \in \left(2, 2\frac{1}{4}\right)$

10. $p \in (-\infty, -2)$

11. $p \in (4, +\infty)$

12. $p \in (1, 2)$

13. a) $p \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle -2, 3-2\sqrt{5}\rangle \cup \langle 3+2\sqrt{5}, +\infty)$ b) $p \in \{-2, 8\}$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3., s. 174-176

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Odpowiedź	C	B	A	D	A	B	C	C	A	B	D

Zadania otwarte

12. a) $b = -3$, $c = 4\frac{1}{2}$ b) $f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in \langle 1, 5\rangle$

13. a) $y = -2x^2 + 16x - 25$ b) $y = 2x^2 + 4x$

14. a) $ZW = \left(-\infty, 6\frac{1}{4}\right\rangle$ b) $-13, -3$

15. a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-5)$; $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

16. $f(x) = -1(x+2)(x-4)$; $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

17. a) $x \in \{2, 5\}$ b) $x \in \left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$ c) $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

18. a) $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ b) $x \in \mathbf{R}$ c) $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

19. a) najmniejsza wartość: 1; największa wartość: 10 b) najmniejsza wartość: 170; największa wartość: 730

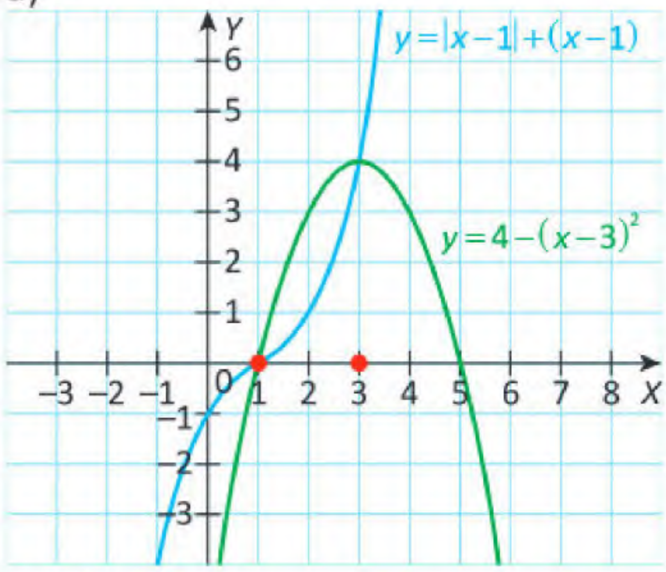
20. 15%

21. a) $Z(x) = 96x - K(x)$, stąd $Z(x) = -5x^2 + 90x - 160$, gdzie $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. b) Produkcja jest opłacalna, gdy $Z(x) > 0$, czyli gdy $x \in \{3, 4, \ldots, 12\}$. c) Największy zysk dzienny osiągnie zakład, gdy wyprodukuje 9 stołów. Zysk dzienny wyniesie wówczas 245 złotych.

22. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in \langle -4, 2\rangle$

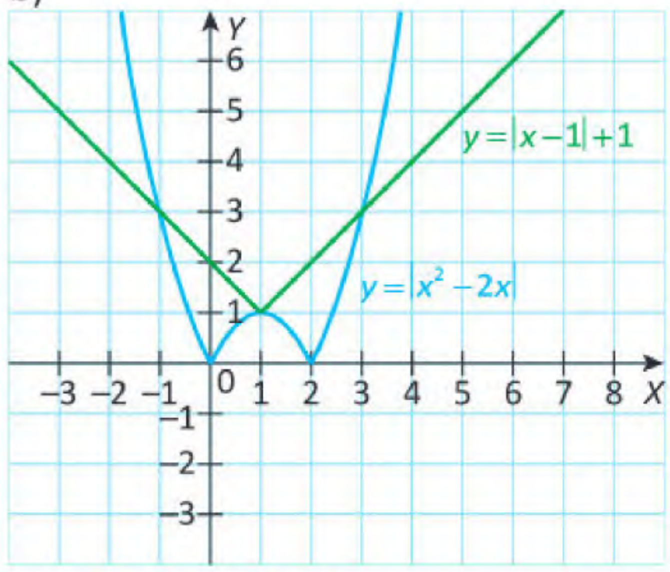
25. $p \in \left(-1\frac{2}{3}, 1\right)$

26. a)



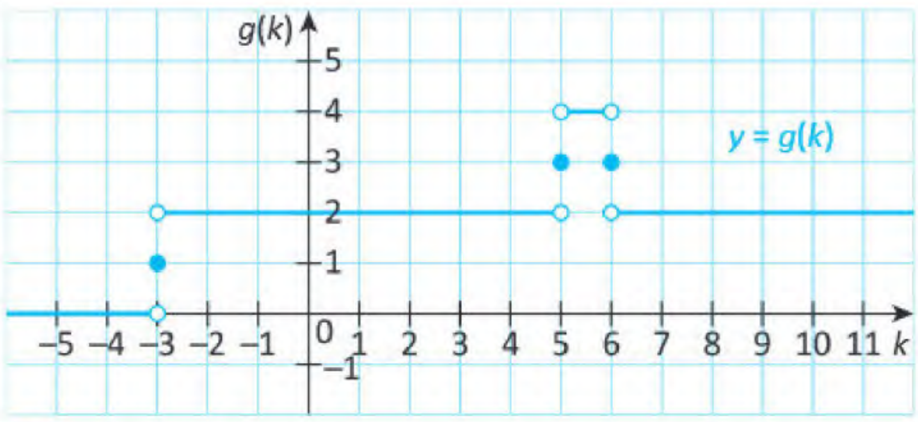
$x \in \{1, 3\}$

b)



$x \in (-1, 1) \cup (1, 3)$

27.



29. a) $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$

30. $k \in \langle 0, 1)$

31. $a \in (-\infty, -3\rangle \cup \left(2\frac{1}{3}, +\infty\right)$

32. $p \in (-3, 1) \cup (1, 5)$

33. $m \in \left\langle -4\frac{1}{3}, 1\right\rangle$

34. $m \in (-\infty, -1\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}, +\infty\right)$

4. Geometria płaska – okręgi i koła

Powtórzenie wiadomości z geometrii z klasy 1., s. 187

1. 12

2. a) $3\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ b) 3, $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, $\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$

3. a) 5 b) $6\sqrt{17}$

4. $0{,}8\sqrt{5}$

5. $|KL| = 15$, $|MN| = 10$; *wskazówka*: $\Delta DKM \sim \Delta BCM$

Okrąg. Położenie prostej i okręgu, s. 193-194

1. 4,5

2. a) 30% b) 48%

3. 10 cm

4. 4π

5. a) sieczna okręgu b) rozłączna z okręgiem
c) sieczna okręgu d) styczna do okręgu

6. 3,6 oraz 14,4

8. 30°

10. 4 cm

11. 24

12. 8 cm lub 6 cm

13. prosta jest styczna do okręgu, gdy $a = 3$; prosta jest rozłączna z okręgiem, gdy $a \in (3, +\infty)$;
prosta jest sieczną okręgu, gdy $a \in \left\langle 1\frac{1}{2}, 3\right)$;

14. $a \in \left\langle -\frac{1}{3}, 4\right\rangle$

Wzajemne położenie dwóch okręgów, s. 199-200

1. a) styczne zewnętrznie b) rozłączne zewnętrznie c) przecinające się
d) styczne wewnętrznie e) styczne wewnętrznie f) przecinające się

2. 6

3. $R = 7$ cm, $r = 4$ cm

4. $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm, $r_3 = 9$ cm

5. trójkąt jest równoboczny

6. *wskazówka*: Zauważ, że półprosta $\overrightarrow{SA}$ jest dwusieczną kąta CSP oraz półprosta $\overrightarrow{SB}$ jest dwusieczną kąta DSP.

7. $R = 9$ cm, $r = 4$ cm

8. tak

9. a) $a = 4$; $r = 3$ b) $a = 8$; $r = 1$

10. $m \in \{-2, -6\}$; *wskazówka*: Rozpatrz przypadek, gdy okręgi są styczne zewnętrznie oraz przypadek, gdy okręgi są styczne wewnętrznie.

11. a) jeśli $a = 1$, to okręgi są styczne wewnętrznie; jeśli $a = -2$, to okręgi się przecinają

12. $a \in \langle 2, 4 \rangle$

13. jeśli $a \in (0, 5)$, to okręgi rozłączne zewnętrznie; jeśli $a = 5$, to okręgi są styczne zewnętrznie; jeśli $a \in (5, 17)$, to okręgi się przecinają; jeśli $a = 17$, to okręgi są styczne wewnętrznie; jeśli $a \in (17, +\infty)$, to okręgi są rozłączne wewnętrznie

14. $21\frac{6}{7}$cm

Koła i kąty, s. 208-209

1. a) $53°$ b) $24°$ c) $41°$ d) $110°$ e) $40°$ f) $65°$
2. a) $27°$ b) $62°$ c) $41°$
3. a) $\alpha = 65°, \beta = 80°, \gamma = 35°$ b) $\alpha = 30°, \beta = 110°, \gamma = 40°$ c) $\alpha = 60°, \beta = 70°, \gamma = 50°$
4. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{9}$
5. $40°$, $60°$, $80°$
6. a) $75°$ b) $60°$ c) $38°$
7. $\alpha = 52°$, $\beta = 26°$
8. ΔACB: $24°, 123°, 33°$ ΔBCD: $90°, 57°, 33°$

11. *wskazówka*: Zauważ, że $|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}|AOC|$ oraz $|\sphericalangle DCB| = \frac{1}{2}|DOB|$

Twierdzenie o stycznej i siecznej, s. 212

1. a) 7 b) 5 c) 2 d) $\sqrt{15}$
2. $12\sqrt{2}$cm

4. *wskazówka*: Przyjmij oznaczenia: $|AB| = 5x$, $|BP| = 4x$ i wyznacz $|CP|$ w zależności od x.
5. $|AP| = 15$ cm, $|PB| = 4$ cm, $|PC| = 7{,}5$ cm, $|PD| = 8$ cm,
   wskazówka: Przyjmij oznaczenie: $|PC| = x$, stąd $|AP| = 2x$, $|PB| = 19 - 2x$, $|PD| = 15{,}5 - x$. Następnie zastosuj twierdzenie o cięciwach.

Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie, s. 227

1. 2 cm
2. 6,25 cm oraz 1,75 cm
3. a) środek okręgu nie należy do trójkąta b) $1\frac{5}{8}$cm, $6\frac{3}{8}$cm, $9\frac{3}{8}$cm
4. a) $2\sqrt{3}$cm b) $(3 + \sqrt{3})$cm
5. $2 + 2\sqrt{2}$

6. 12,5 cm
7. 4 cm
8. 3 cm
9. a) $7\frac{1}{24}$ cm, trójkąt ostrokątny b) $18\frac{1}{16}$ cm, trójkąt rozwartokątny
10. a) 1,75 cm b) $2\frac{2}{3}$ cm
11. 7,5 cm *wskazówka*: Oblicz $|DB|$, następnie zastosuj wzór $|CD|=\sqrt{|AD|\cdot|DB|}$.
12. a) 5 cm b) $1\frac{2}{3}$ cm

Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt, s. 234-235

1. 135°
2. 80°, 80°, 20° albo 40°, 40°, 100°
3. 36 cm
4. 1,5 cm; 2,5 cm; 3,5 cm
5. $r=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
6. a) R = 8 cm b) $24\sqrt{3}$ cm
7. a) 4,5 cm b) 3,75 cm
8. 2
9. a) 3 cm b) 6 cm i 9 cm
10. 17 cm
11. a) 24 cm, 7 cm, 25 cm b) R = 12,5 cm; r = 3 cm
12. a) $x=3\frac{3}{4}$ b) x = 10 c) x = 6
13. 25,2 cm
14. $3\frac{14}{17}$, $9\frac{3}{17}$
15. $3\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$
16. $|DE|=4\frac{4}{9}$
17. a) 10 b) nie; *wskazówka*: Gdyby dwusieczna kąta ABC była również dwusieczną kąta AOC, to spełniona byłaby równość $\frac{|AO|}{|OC|}=\frac{|AD|}{|DC|}$. Ale $|AO|=2{,}5\sqrt{6}$, $|OC|=7{,}5\sqrt{2}$, więc ta równość nie jest prawdziwa.

18. *wskazówka*: Przez punkt B poprowadź prostą równoległą do prostej CD i postępuj podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 2.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4., s. 236-239

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Odpowiedź	B	A	C	C	D	C	A	C	C	D	C	A

Zadania otwarte

13. a) 6 b) $3\sqrt{3}$ c) 2π

14. 24π cm

15. 9:13:14

16. 64°, 26°, 90° *wskazówka*: Oblicz miarę kąta środkowego COA.

17. $|AP| = 8$ cm, $|PB| = 3$ cm, $|CP| = 4$ cm, $|PD| = 6$ cm

18. a) $|PA| = 3\sqrt{5}$, $|PB| = 2\sqrt{5}$ b) $\frac{|BC|}{|AC|} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

19. 16 cm

20. a) 17 cm b) 6 cm

21. $2\frac{1}{6}$, trójkąt rozwartokątny

23. $8\frac{8}{17}$ cm; *wskazówka*: Wykaż na podstawie cechy (bkb) podobieństwa trójkątów, że $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

24. 4,5 cm; *wskazówka*: Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt, następnie skorzystaj z podobieństwa trójkątów ABC i DEC.

25. $|AD| = 2\frac{2}{3}$, $|DC| = 3\frac{1}{3}$

31. a) 2, 3, 3 b) odcinki na podstawie: 1, 1; odcinki na ramionach: 1, 2

32. *wskazówka*: Skorzystaj z własności okręgów wpisanych, opartych na tym samym łuku, a następnie z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.

33. a) $a \in (-1, +\infty)$ b) $a \in \langle -5, -4)$

34. $m \in \left\{1\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}\right\}$; jeśli $m = 1\frac{2}{3}$, to promienie okręgów są równe $3\frac{2}{3}$ i $6\frac{2}{3}$; jeśli $m = 3\frac{2}{3}$, to promienie są równe $5\frac{2}{3}$ i $2\frac{2}{3}$.

35. $m \in (3, 5)$

36. a) 34°, 129°, 17°; *wskazówka*: Zapisz sumę kątów w trójkącie *AEC* b) 28°, 47°, 105°; *wskazówka*: Poprowadź cięciwę *ED* i oblicz $|\sphericalangle BED|$.

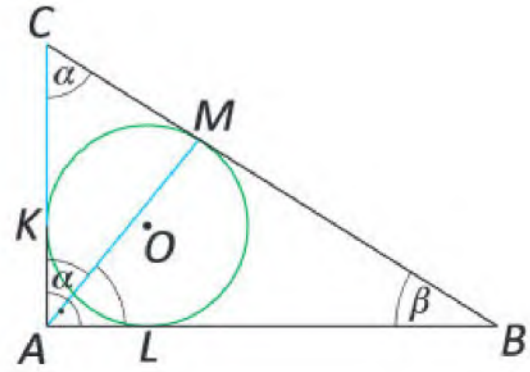
37. *wskazówka*: Niech $|\sphericalangle ACB| = \alpha$, $|ABC| = \beta$,

$\alpha + \beta = 90°$, $|AK| = r$, $|CK| = a$, $|AC| = r + a$.

Ponieważ $|CM| = |CK|$ i z założenia $|CK| = |AM|$,

więc $|CM| = |AM|$. Wówczas $|\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle CAM| = \alpha$,

stąd $|\sphericalangle MAB| = 90° - \alpha = \beta$. Trójkąt *ABM* też jest równoramienny.



38. a) *wskazówka*: Wykaż, że $|\sphericalangle CPB| = 90°$ b) $6\frac{2}{3}$

5. Trygonometria

Trygonometria kąta ostrego – powtórzenie wiadomości z klasy 1., s. 244

1. a) 0,22 b) 0,9032

2. a) $2\frac{25}{36}$ b) $5\frac{337}{1296}$

4. $\frac{-35}{24}$

Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta, s. 250-251

1. a) $\sin\alpha = -0{,}6$ $\cos\alpha = 0{,}8$ $\mathrm{tg}\,\alpha = -0{,}75$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = -1\frac{1}{3}$

   b) $\sin\alpha = 0$ $\cos\alpha = -1$ $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$ $\mathrm{ctg}\,\alpha$ nie istnieje

   c) $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{2}$

2. a) $P(-9, 12)$ b) $P\left(-3, -6\sqrt{6}\right)$

3. a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = 12$ c) $x = 1\frac{2}{3}$ lub $x = -1\frac{2}{3}$ d) $x = 5\frac{1}{3}$ *wskazówka*: $\cos\alpha > 0$, $y < 0$, więc drugie ramię kąta α leży w IV ćwiartce oraz $x > 0$.

   Mamy $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{x^2+16}$. Obie strony otrzymanej równości są dodatnie, więc możemy je podnieść stronami do kwadratu.

4. a) $\mathrm{tg}\,225° = \mathrm{ctg}\,225° = 1$, $\sin 225° = \cos 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

   b) $\mathrm{tg}\,210° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{ctg}\,210° = \sqrt{3}$, $\sin 210° = -\frac{1}{2}$, $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

   c) $\mathrm{tg}\,240° = \sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,240° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240° = -\frac{1}{2}$

d) $\mathrm{tg}\,315^\circ = -1$, $\mathrm{ctg}\,315^\circ = -1$, $\sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. a) w IV b) w II

Podstawowe tożsamości trygonometryczne, s. 256-257

1. a) jeśli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, to $\sin\alpha = 0{,}8$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$;

   jeśli $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, to $\sin\alpha = -0{,}8$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{3}{4}$

   b) jeśli $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, to $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8}{15}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{15}{8}$;

   jeśli $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$, to $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{8}{15}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{15}{8}$

   c) jeśli $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, to $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{3}$

   jeśli $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, to $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{3}$;

   d) jeśli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, to $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$;

   jeśli $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$, to $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$

2. a) $\cos\alpha = -\frac{60}{61}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{11}{60}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{60}{11}$

   b) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

   c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$

   d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = -1$

   e) $\sin\alpha = 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ nie istnieje f) $\cos\alpha = 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ nie istnieje, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$

5. $-2{,}9$ *wskazówka*: Oblicz $(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)^2$, następnie zauważ, że $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$ i $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$.

6. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ *wskazówka*: Oblicz $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$, następnie zauważ, że $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.

9. a) tak b) nie c) nie d) tak e) nie f) tak

Wybrane wzory redukcyjne, s. 262

1. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\sqrt{3}$ d) -1 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. a) $3\frac{1}{4}$ b) -2 c) 4 d) $-\frac{3}{4}$

4. a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\sqrt{3}$ c) 1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $1\frac{1}{2}$ f) 1

7. a) $\alpha = 225°$ b) $\alpha = 60°$ c) $\alpha = 120°$ d) $\alpha = 120°$ e) $\alpha = 240°$ f) $\alpha = 315°$

Kąt skierowany. Miara łukowa kąta, s. 270

1. a) 35° b) 107° c) 199° d) 206°

2. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{5}$ d) 4

3. a) $\frac{2\pi}{5}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $-\frac{7\pi}{6}$ f) $\frac{3\pi}{20}$

4. a) 36° b) −240° c) 315° d) 40° e) −48° f) 330°

5. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) -1 h) $-\sqrt{3}$

6. a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej, s. 277-278

1. a) -1 b) 0 c) -2 d) -1 e) $1-\sqrt{3}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. *wskazówka do* a): $\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}$

3. *wskazówka*: Zastosuj wzory redukcyjne. Następnie podaj kąt, dla którego $L \neq P$.

4. a) $T_0 = 8$ b) $x = 2 + 4k$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

5. a) $T_0 = 8$

b) $1 + 4k$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$; można też zapisać tak: $1 + 8k$ lub $5 + 8k$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$;

pośród liczb: 105, −97, −223, miejscami zerowymi są liczby: 105 i −223

c) $f(260) = 2$, $f(-450) = -2$, $f(903) = -4$

6. a) $T_0 = \frac{\pi}{3}$ b) $T_0 = \pi$ c) $T_0 = 3\pi$ d) $T_0 = \frac{\pi}{3}$ e) $T_0 = 2\pi^2$ f) $T_0 = 2$

7. a) nieparzysta b) parzysta c) parzysta
d) nieparzysta e) nieparzysta f) nieparzysta

Wykresy funkcji trygonometrycznych, s. 285-286

1. a) $ZW = \langle -1, 1\rangle$ b) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\cdot\pi,\ k \in Z$

   c) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$

2. a) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ b) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in Z$

   c) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi,\ k \in Z$

3. a) $\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$

   b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right) \text{lub} \left(x = \frac{-\pi}{3} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right)$

4. a) $\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$

   b) $\operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow \left(x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right) \text{lub} \left(x = \frac{-\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right)$

5. a) f rosnąca w przedziałach: $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right\rangle$; f malejąca w przedziale $\left\langle \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

   b) $\sin 4 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$, *wskazówka*: $\sin 1 = \sin(\pi - 1)$

   oraz $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi - 1 < 3 < 4 < \frac{3\pi}{2}$

6. a) f malejąca w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$, f rosnąca w przedziale $\langle \pi, 2\pi\rangle$

   b) $\cos 3 < \cos 4 < \cos 2 < \cos 1$; *wskazówka*: $\cos 4 = \cos(2\pi - 4)$

7. b) $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ c) $\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$

8. b) $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ c) $\operatorname{ctg} 1 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$;

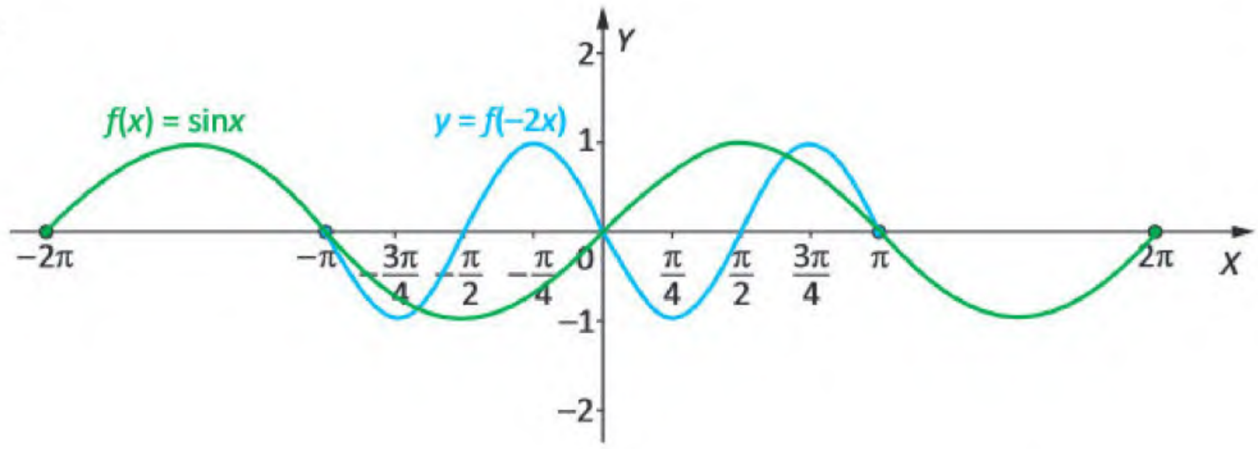
   wskazówka: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{2\pi}{10}\right) = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$

9. a) $f(x) = \sin x,$ gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \left\{x:\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

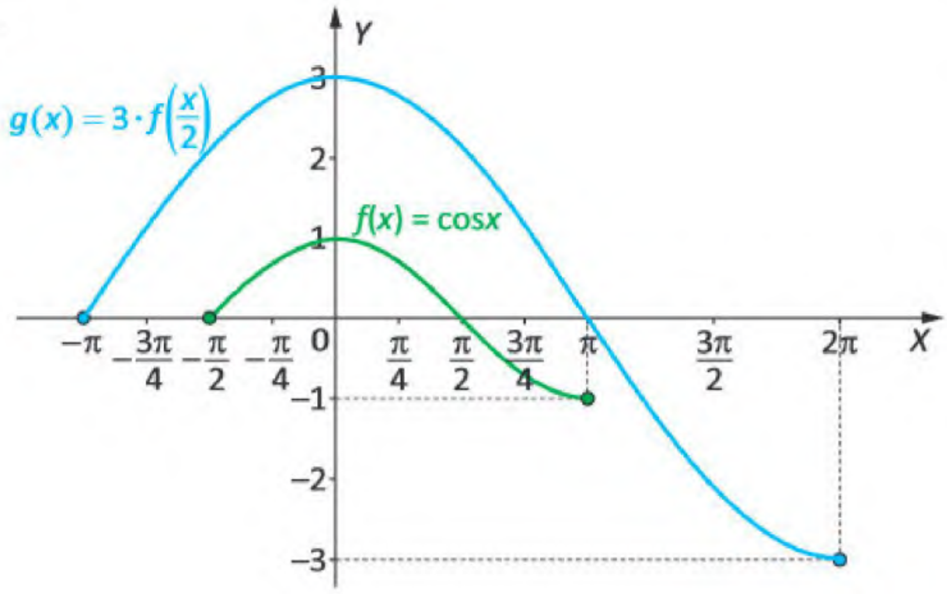
   b) $f(x) = \cos x,$ gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \left\{x:\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

   c) $f(x) = 1,$ gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \left\{x:\ x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

10. $D_g = \langle -\pi, \pi \rangle$



11. $D_g = \langle -\pi, 2\pi \rangle$



12. *wskazówka*: a) $y = 2\sin x,\ \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right],\ D = \boldsymbol{R}$

b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1;\ y = \cos x,\ \left[\frac{\pi}{6}, 1\right],\ D = \boldsymbol{R}$

c) $f(x) = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right);\ y = \mathrm{tg}\, x, \left[\frac{\pi}{4}, 0\right],\ D = \boldsymbol{R} - \left\{x : x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

d) $y = \sin\frac{x}{2},\ [0, -2],\ D = \boldsymbol{R}$

e) $f(x) = \mathrm{ctg}\left[\frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right];\ y = \mathrm{ctg}\,\frac{x}{3},\ \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], D = \boldsymbol{R} - \left\{x : x \neq -\frac{\pi}{2} + 3k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

f) $f(x) = -\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right];\ y = -\cos 2x,\ \left[\frac{\pi}{3}, 0\right],\ D = \boldsymbol{R}$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5., s. 287-289

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Odpowiedź	C	A	B	B	C	C	B	A	A

Zadania otwarte

10. $\sin\alpha=\frac{7}{25}$, $\cos\alpha=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-7}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-3\frac{3}{7}$

12. a) $\sin 270^\circ=-1$, $\cos 270^\circ=0$, $\operatorname{tg} 270^\circ$ nie istnieje, $\operatorname{ctg} 270^\circ=0$

b) $\sin 330^\circ=-\frac{1}{2}$, $\cos 330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 330^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 330^\circ=-\sqrt{3}$

c) $\sin 225^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 225^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 225^\circ=\operatorname{ctg} 225^\circ=1$

13. Jeśli $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$, to $\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$;

jeśli $\alpha\in(90^\circ,180^\circ)$, to $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{15}{8}$

14. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$, $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$

15. $-2{,}5$

17. $\frac{\sqrt{3}}{12}$

18. a) $\alpha=120^\circ$ b) $\alpha=150^\circ$ c) $\alpha=315^\circ$ d) $\alpha=45^\circ \vee \alpha=135^\circ$

19. 1

20. a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

24. a) $-\frac{1}{2}$ b) -1 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

25. a) $x\in\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ b) $\left\langle -2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\rangle$

26. a) $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π b) $-\frac{1}{2}$

27. *wskazówka*: $f(x)=\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; wykres funkcji $y=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ przesuń równolegle

o wektor $\left[\frac{\pi}{3}, 0\right]$ a) $\left(0, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ b) $\langle 1, +\infty)$

28. a) $\cos\pi<\cos\frac{3\pi}{2}<\cos\frac{\pi}{5}<\cos\frac{\pi}{8}$ b) $\operatorname{tg}(\sin 4)<\operatorname{tg}(\sin\pi)<\operatorname{tg}(\sin 1)<\operatorname{tg}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$

29. a) 6π b) 2π c) 1

6. Geometria analityczna

Odcinek w układzie współrzędnych, s. 294

1. $|AB| = 10$, $|AC| = 4\sqrt{5}$, $|BC| = 2\sqrt{5}$; trójkąt jest prostokątny
2. a) $(-2, 1)$ b) $(1, 1)$ c) $(-1, 8)$ d) $\left(-3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$
3. $|AD| = 2\sqrt{13}$, $|BE| = \sqrt{61}$, $|CF| = 1$; $S\left(\frac{2}{3}, 1\right)$
4. a) $C(-1, -3)$ b) $4\sqrt{17} + \sqrt{146} + \sqrt{170}$
5. a) 15 b) $C(6, 9)$
6. a) $P(-2, 3)$ b) $P(0, -1)$ c) $P\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ d) $P\left(-1\frac{3}{7}, 1\frac{6}{7}\right)$

Równanie kierunkowe prostej, s. 300

1. a) $120°$ b) $0°$ c) $30°$ d) $135°$
2. a) $67°$ b) $141°$
3. a) $f(x) = x - 5$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{2}$ d) $f(x) = -x - 6$
4. a) tak b) nie
5. a) $l: y = -2x + 3$ b) $l: y = -6$
6. a) $y = -x - 1$ b) $y = 3x - 22$ c) $y = \sqrt{10}x - 3\sqrt{5}$
7. a) $y = -2x + 8$ b) $y = -x + 9$ c) $y = \frac{2}{3}x - 3$
8. a) $y = x + 3$ b) $x = 1$ c) $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$
9. $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

Równanie ogólne prostej, s. 306-307

1. a), b)
2. a) $y = x + 2$ b) $y = \sqrt{3}x$ c) nie istnieje d) $y = 3$
3. a) $B = -2$ b) $B = 0$ c) $A = \sqrt{3}$ d) $A = -\sqrt{6}$
4. a) tak b) tak c) nie d) nie
5. a) nie b) tak c) tak d) tak
6. a) $-2x + 5y + 15 = 0$ b) $3x - 2y + 3 = 0$
   c) $x - 4 = 0$ d) $y - 2 = 0$
7. a) $-2x + y + 8 = 0$ b) $y + 1 = 0$ c) $3x + \sqrt{2}y + 4\sqrt{2} = 0$
   d) $2x - y + 5 = 0$ e) $2x - 5y + 52 = 0$ f) $x + 3y - 4 = 0$

8. a) $3x + 5y - 11 = 0$ b) $3x - y - 2 = 0$ c) $x - 2 = 0$
d) $y - 3 = 0$ e) $x + y - 3 = 0$ f) $5x + 7y - 58 = 0$

9. $C = -2$

10. $m = 1$

11. $m \in \{-2, 2\}$

12. a) $m = -\frac{1}{5}$, $6x - 4y - 5 = 0$ b) $m = 5$, $4x + 6y - 25 = 0$

13. $m \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$

14. a) $A = 3$, $B = -1{,}5$ b) $A = B = 1$

Równanie okręgu, s. 312

1. a) $S(-2, 1)$, $r = 2$ b) $S(3, 0)$, $r = 2{,}5$ c) $S(0, 0)$, $r = 11$ d) $S(-7, -4)$, $r = \sqrt{5}$

2. a) $x^2 + y^2 - 12x + 27 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 14x + 2y - 31 = 0$

3. a) $S(1, 0)$, $r = 2$ b) $S(2, -3)$, $r = 5$ c) $S(-8, -1)$, $r = \sqrt{65}$
d) $S(0, 10)$, $r = 8$ e) $S(-5, 1)$, $r = 4$ f) $S\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $r = 1{,}5$

4. a) okrąg, $S(-3, 0)$, $r = 3$ b) prosta $x - y = 0$
c) punkt $(6, 0)$ d) okrąg, $S\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $r = 2$

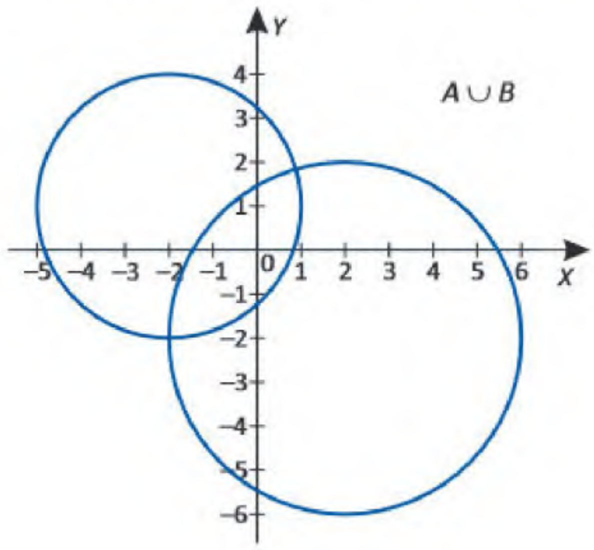
5. a) A i B b) tylko A

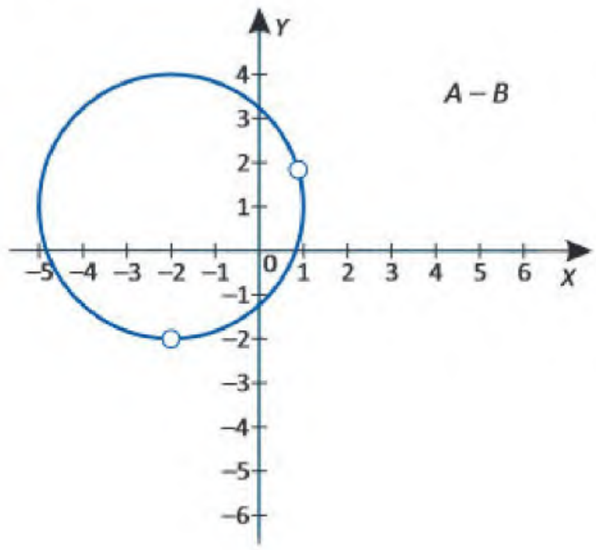
6. a) $x^2 + (y + 1)^2 = 25$ b) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 169$

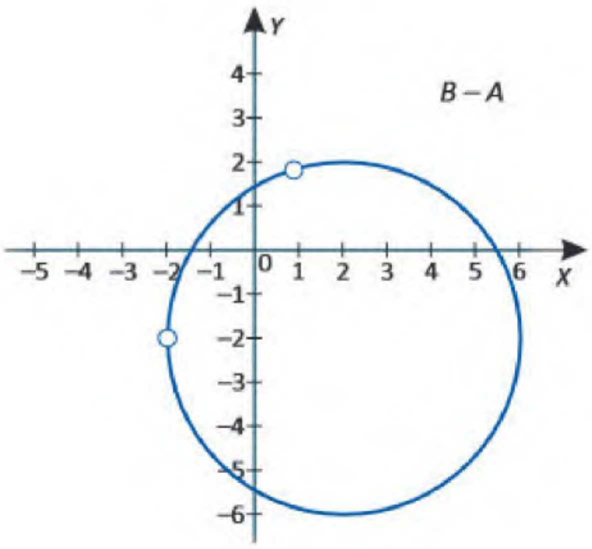
7. a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$ b) $(x + 4)^2 + y^2 = 13$

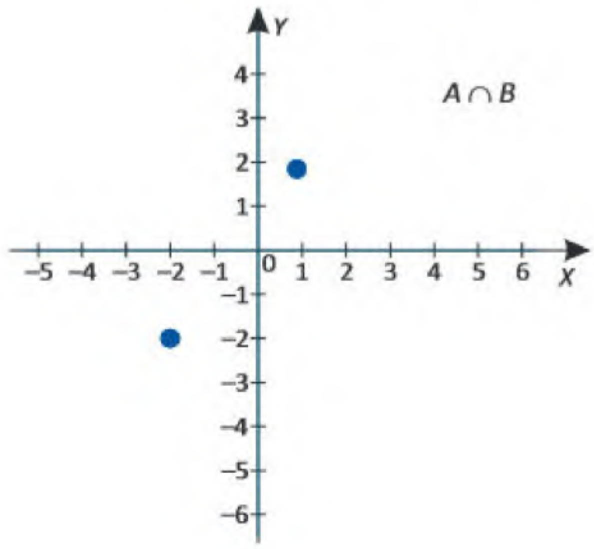
8. a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ b) $x^2 + (y - 1)^2 = 25$

9.









Wyznaczanie w układzie współrzędnych punktów wspólnych prostych, okręgów i parabol, s. 319-320

1. a) (0, 0), (2, –4) b) (–3, 1), (0, 4) c) (4, –1)

2. a) $\left(-\sqrt{3},1\right)$, $\left(\sqrt{3},1\right)$; prosta jest sieczną okręgu b) (–2, 3); prosta jest styczną do okręgu
   c) układ sprzeczny, prosta rozłączna z okręgiem

3. a) prosta ma jeden punkt wspólny z parabolą: (–2, 5)
   b) prosta i parabola nie mają punktów wspólnych, układ sprzeczny
   c) prosta jest styczna do okręgu w punkcie (–1, 2)
   d) prosta jest sieczną okręgu (0, 0), (4, –2)
   e) prosta ma jeden punkt wspólny z parabolą: (–4, 1)
   f) układ sprzeczny; prosta jest rozłączna z okręgiem

4. a) $o\colon x^2+y^2=25$; $k\colon y+2x=0$; $\left(-\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$, $\left(\sqrt{5},\ -2\sqrt{5}\right)$
   b) $o\colon x^2+(y-2)^2=20$; $k\colon x-2y-6=0$; $(2,-2)$
   c) $p\colon y=0{,}25(x+6)(x-2)$; $l\colon x+y+7=0$; $(-4,\ -3)$
   d) $p\colon y=-(x-2)^2+3$; $l\colon x-3y-3=0$; $(0,\ -1)$, $\left(3\frac{2}{3},\ \frac{2}{9}\right)$

5. a) (–3, 0), okręgi są styczne wewnętrznie
   b) (6, 2), (6, –2), (–6, 2), (–6, –2); suma dwóch prostych przecina okrąg w czterech punktach
   c) (0, 5), (1, 2), (4, 5); suma dwóch prostych przecina okrąg w trzech punktach
   d) (–6, 4); okręgi są styczne zewnętrznie
   e) (0, –2), (–1, –3) okręgi się przecinają
   f) (–1, –1), (0, –2), (1, –1); parabola ma trzy punkty wspólne z okręgiem
   g) (2, 1), (4, –3); *wskazówka*: pierwsze równanie opisuje sumę dwóch prostych: $2x+y+5=0$ oraz $2x+y-5=0$; jedna z tych prostych ma dwa punkty wspólne z okręgiem, a druga jest rozłączna z okręgiem
   h) układ sprzeczny; okręgi są rozłączne wewnętrznie

Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej, s. 323

1. $C(-3,-2)$

2. $\left(-2,\ 3\frac{1}{4}\right)$

3. a) $y=\frac{-3}{4}x+7$ b) $D(2, 13)$

4. $A(2, -3)$

5. $\left(-2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{4}\right)$

6. $|AB|=4\sqrt{2}$

7. a) $C_1(-6, -1)$, $C_2(1, 6)$ b) $C_1\left(\frac{\sqrt{14}}{2},\ \frac{\sqrt{14}}{2}+5\right)$, $C_2\left(\frac{-\sqrt{14}}{2},\ \frac{-\sqrt{14}}{2}+5\right)$

8. $C_1\left(0,\ 1-2\sqrt{3}\right)$, $C_2\left(0,\ 1+2\sqrt{3}\right)$

9. $C\left(-1\frac{2}{5},\ 1\frac{1}{5}\right)$

10. $A(1, 4)$, $B(-7, 4)$, $C(-3, 0)$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6., s. 324-326

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Odpowiedź	C	A	D	B	B	C	C	A	D	B	D

Zadania otwarte

12. $C(-5, 3)$, $D(-3, 2)$, $E(-1, 1)$, $F(1, 0)$

13. a) $C(7, 9)$, $D(-1, 7)$ b) $|AB|=|BC|=|CD|=|AD|=2\sqrt{17}$

14. a) $2x-y-3=0$ b) $x+2y+2=0$

15. $7x-5y+24=0$

16. a) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ b) $y=4x-12$

17. Prosta k: $(0, 0)$ prosta l: $(0,\ 4)$, $\left(4\sqrt{3},\ 0\right)$

19. $(x+1)^2+(y-3)^2=16$

20. a) $(5, 7)$ b) $(-2, 5)$, $(1, -1)$ c) układ sprzeczny d) $(6, -1)$

22. $x^2+(y+1)^2=26$

23. $C_1\left(1-\sqrt{2},\ 0\right)$, $C_2\left(1+\sqrt{2},\ 0\right)$

24. $(1, 1)$

25. $a\in\{-2,\ 4\}$; jeśli $a=-2$, to $\vec{u}=\vec{v}$, jeśli $a=4$, to $\vec{u}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{v}$

26. a) $A \in \{-4, 4\}$

b) Jeśli $A = 4$, to k: $y = -\frac{1}{2}x + 1$, l: $y = -\frac{1}{2}x + 3$; jeśli $A = -4$, to k: $y = \frac{1}{2}x + 1$, l: $y = \frac{1}{2}x - 3$

27. $a = 1 \vee a = -3$; jeśli $a = 1$, to k: $-x + 2y + 6 = 0$, l: $2x + y + 2 = 0$; jeśli $a = -3$, to k: $x + 2y + 2 = 0$, l: $-2x + y + 2 = 0$

28. a) $(0, 3)$, $(-2, -1)$ b) $(2, -1)$

c) $\left(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$, $\left(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$, $\left(2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$, $\left(2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$

d) $(-2, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$; *wskazówka*: podstaw w miejsce $(x + 1)^2$ niewiadomą y

29. $a = \frac{2}{3}$ lub $a = 2$

30. $B\left(2\sqrt{3}, 0\right)$, $C(6, 0)$

31. $C_1(0, -3)$, $D_1(-2, 1)$ lub $C_2(8, 1)$, $D_2(6, 5)$

32. $\left(8 - \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}\right)$, $\left(8 + \sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\right)$

33. $B_1(0, -2)$, $D_1(-8, 2)$ lub $B_2(-6, -4)$, $D_2(-2, 4)$

34. $C\left(-1\frac{3}{5}, 3\frac{1}{5}\right)$

35. a) $A(-2, 3)$, $B\left(\frac{-18}{5}, \frac{-9}{5}\right)$ b) $3x - y + 9 = 0$

7. Geometria płaska – rozwiązywanie trójkątów, pole trójkąta, pole koła

Twierdzenie sinusów, s. 330

1. a) $a = 4$, $R = 4$ b) $a = 2\sqrt{6}$, $R = 2\sqrt{3}$
2. a) $\alpha = 30°$ lub $\alpha = 150°$ b) $\alpha = 45°$
3. a) $\cos\gamma = \frac{\sqrt{15}}{4}$ b) $\cos\gamma = \frac{3}{5} \vee \cos\gamma = -\frac{3}{5}$
4. $R = 9{,}75$ cm

Twierdzenie cosinusów, s. 334

2. a) $\sqrt{21}$ cm b) $3\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$ cm
3. a) $45°$ b) $135°$
4. $3\sqrt{7}$ cm, $3\sqrt{13}$ cm
5. $|AD| = \sqrt{46}$ cm, $|BE| = \sqrt{31}$ cm

Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania zadań, s. 340-341

1. a) $\alpha = 105°$, $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $b = 1$

   b) $\beta = 120°$, $\gamma = 30°$, $c = 5$ lub $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$, $c = 10$

   c) $\alpha \approx 26°, \beta \approx 94°$, $b \approx 16{,}1$ d) $\gamma = 20°$, $a \approx 25$, $c \approx 17{,}1$

2. $|BC| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, \alpha = 75°, \beta = 45°, \gamma = 60°$ albo $|BC| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \alpha = 15°, \beta = 45°, \gamma = 120°$

3. $|BC| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{22}, \alpha = 90°, \beta = 30°, \gamma = 60°$ albo $|BC| = 2, \alpha = 90°, \beta = 30°, \gamma = 60°$ albo $|BC| = 1, \alpha = 30°, \beta = 30°, \gamma = 120°$

4. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm $\approx 4{,}0$ cm

5. a) $|AB| = 3$, $|BC| = 7$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ c) 38°, 22°

6. a) $|AB| = \frac{70-10\sqrt{13}}{9}$, $|BC| = \frac{140-20\sqrt{13}}{9}$, $|AC| = \frac{10(\sqrt{13}-1)}{3}$ b) $\frac{140\sqrt{3}-20\sqrt{39}}{27}$

7. a) $\sqrt{7}$; *wskazówka*: Jeśli $x = |AD|$, to z twierdzenia o dwusiecznej (lub z twierdzenia sinusów dla trójkąta *ABC*) wynika, że $|DB| = 2x$. Zastosuj twierdzenie cosinusów do boku $|AB|$ i kąta 120°

   b) 2; *wskazówka*: Zastosuj twierdzenie sinusów dla trójkąta *ADC*.

8. a) 15 cm, 20 cm b) $12\sqrt{2}$ cm

10. $\alpha = 90°$

11. 21

12. $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

13. 4, 5, 6

14. 53

15. $R_1 : R_2 = |AC| : |AB|$

17. *wskazówka*: Skorzystaj dwukrotnie z twierdzenia cosinusów dla kąta *BAC*.

18. a) $a = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})c}{2}$, $b = (\sqrt{3}-1)c$, b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

    wskazówka: Zastosuj twierdzenie sinusów do zapisania zależności między dwoma szukanymi bokami. Następnie skorzystaj z twierdzenia cosinusów dla kąta 45°.

19. trójkąt o bokach długości: 2, 3, 4

Pole figury płaskiej, s. 345

1. a) 19 b) 21,5 c) 24 d) 17
2. a) $\frac{1}{2}s+t+\frac{3}{4}w$ b) $s-\frac{1}{2}w$ c) $2t-\frac{1}{4}s$ d) $2s-w$
3. 78 cm^2

Pole trójkąta, cz. 1, s. 349-350

1. a) $\frac{P}{2}$ b) $\frac{P}{4}$ c) $\frac{P}{6}$
2. $h=3\sqrt{3}$ dm, $r=\sqrt{3}$ dm, $R=2\sqrt{3}$ dm
3. a) $4\frac{8}{13}$ cm b) 4,8 cm
4. a) 22,5 cm^2 b) $15\sqrt{3}$ cm^2
5. a) 6 cm b) 9 cm
6. a) $\sin\alpha = 0{,}6$ b) 6 cm; 4,2 cm
7. $\alpha = 90°$, długość trzeciego boku jest równa 10 cm
10. a) $2(9+\sqrt{61})$ cm b) $2(8+\sqrt{10})$ cm albo $2(8+\sqrt{58})$ cm
11. a) jeśli $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, to $R=2{,}1\sqrt{5}$; jeśli $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, to $R=1{,}5\sqrt{29}$
    b) jeśli $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, to $R=2\sqrt{3}$; jeśli $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$, to $R=\frac{2\sqrt{111}}{3}$
12. a) $P_{ADC}=\frac{48\sqrt{3}}{7}$ cm^2, $P_{DBC}=\frac{36\sqrt{3}}{7}$ cm^2 b) $P_{ADC}=\frac{24\sqrt{3}}{5}$ cm^2, $P_{DBC}=\frac{36\sqrt{3}}{5}$ cm^2
13. a) $2\sqrt{129}$ cm b) $40\sqrt{3}$ cm^2

Pole trójkąta, cz. 2, s. 354-355

1. a) 24 cm^2 b) $42\frac{6}{7}$ cm c) 2,4 cm
2. a) 21 cm^2 b) 8,5 cm lub $\frac{\sqrt{793}}{2}$ cm c) $5\frac{5}{16}$ cm lub $\frac{5}{16}\sqrt{793}$ cm
3. a) 126 cm^2 b) $4\frac{2}{3}$ cm c) 12 cm; 12,6 cm; $19\frac{5}{13}$ cm
4. a) 420 cm^2 b) 32,5 cm c) $\frac{5}{13}$
5. a) 5 cm b) $3\frac{1}{8}$ cm c) $\frac{24}{25}$
6. a) $P=\frac{45\sqrt{7}}{8}$ cm^2 b) $r=\frac{5\sqrt{7}}{12}$ cm c) $R=\frac{4}{3}\sqrt{21\frac{4}{7}}$ cm

7. a) $40\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ b) $60°$ c) $|AD| = \frac{80\sqrt{3}}{13}$ cm, *wskazówka*: $P_{ABD} + P_{ADC} = P_{ABC}$

8. a) $|BC| = 13\frac{1}{3}$ cm b) $P_{ADC} = 10\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $P_{DBC} = \frac{50\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^2$ c) $R_1 : R_2 = 3 : 5$

9. 240 cm^2

10. 29 cm

Pola trójkątów podobnych, s. 358

1. 1:3:5
2. 1:8:27
3. a) o 36% b) o 56,25%
4. $6\frac{2}{3}$ cm
6. 12 dm^2; *wskazówka*: poprowadź wysokość trójkąta z wierzchołka *C*
7. a) 9:25 b) 16:25 c) 9:16
8. $P_{CDS}:P_{ASD}:P_{ABS} = 4:10:25$
9. 50

Pole koła, pole wycinka koła, s. 362-363

1. $R = 11$, $r = 7$
2. 20 cm
3. $P_r = \frac{\pi \cdot a^2}{12}$; $P_R = \frac{\pi \cdot a^2}{3}$; $a = 18$ cm
5. a) 48π b) 40π c) 120π
6. a) $\frac{3}{4}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$ b) $10\pi + 4\sqrt{2}$ c) $\frac{27}{4}(5\pi - 3)$
7. $13{,}5\pi\ \text{cm}^2$
8. 4
9. $2\pi - 4$
10. $P = \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$, $\text{Obw} = 3 + 2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$
12. $\frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{50\pi}{3}$
13. $4\left(\sqrt{2}\pi - 2\right)$
14. $\frac{3}{2}\pi\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2$

15. $\frac{71\sqrt{3}}{12}+\frac{49\pi}{9}$

16. a) 4π cm^2 b) 36π cm^2

17. a) 16π cm^2 b) $\frac{7225\pi}{64}$ cm^2

Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń, s. 367

1. *wskazówka*: Wykorzystaj zależności
$P=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}=\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-c^2\right]$ oraz $a\cdot b=2P$.
2. *wskazówka*: Przedstaw pole trójkąta równobocznego jako sumę pól trzech trójkątów.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 7., s. 368-370

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	C	C	A	C	B	B	C	D	B

Zadania otwarte

11. a) $\gamma = 120°$, $a = b = 3$
b) $(\beta=60°,\ \gamma=75°,\ c=2\sqrt{3}+2)$ lub $(\beta=120°,\ \gamma=15°,\ c=2\sqrt{3}-2)$

12. 24,6 cm^2

13. a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$cm^2 b) $\sqrt{7}$ cm c) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

14. a) 420 cm^2 b) 7 cm c) $\frac{56}{65}$ d) 32,5 cm

15. 18 + 9π cm^2

16. $P_1=\frac{80\pi-48}{3}$, $P_2=\frac{112\pi+48}{3}$

18. a) 18 b) 24

19. a) 8 cm b) 48 cm^2 c) 8 cm d) 12 cm

20. a) 6 cm^2 b) π cm^2

21. a) 7 cm b) $10\sqrt{3}$ cm^2

22. a) $\sqrt{3}:1$ b) $\sqrt{3}+1$

23. $c=2\sqrt{3}$

24. $r = 3$ a) $P = 9$ cm^2 b) $\alpha\approx 115°$

26. $4\frac{2}{3}$

29. $26\frac{2}{3}$ albo 15 albo 60

30. a) *wskazówka*: Poprowadź wysokość trapezu z punktu C i z punktu D na podstawę AB.

31. $|CE| = 25$ cm; $P_{AEC} = 250 \text{ cm}^2$, $P_{EDB} = 40 \text{ cm}^2$; 30°

8. Wielomiany

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej, s. 373-374

1. a) 6 b) 13 c) 28

2. a) $-x^6$ b) $(\pi + 1)x^3$ c) $2x^7$ d) $7x^5$ e) $64x^4$ f) $\sqrt{2}x^8$

3. a) $W(x) = 7 + 3x - 8x^2 - 4x^3 + 5x^6$; st.$W(x) = 6$; $a_0 = 7$, $a_1 = 3$, $a_2 = -8$, $a_3 = -4$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, $a_6 = 5$
   b) $W(x) = -1 + x^2 - 12x^3 + 6x^7$; st.$W(x) = 7$; $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -12$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$, $a_7 = 6$
   c) $W(x) = -6 - 6x + 26x^3$; st.$W(x) = 3$; $a_0 = -6$, $a_1 = -6$, $a_2 = 0$, $a_3 = 26$

4. a) $F(x) = 4x^3 + x^2$; st.$F(x) = 3$; $a_3 = 4$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 0$
   b) $F(x) = 10$; st.$F(x) = 0$; $a_0 = 10$
   c) $F(x) = 13x^5 + 4$, st.$F(x) = 5$; $a_5 = 13$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 4$

6. $W(-3) = -21$, $W(1) = -5$, $W(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - 10$

7. a) $-4{,}8$ b) $-1\frac{1}{10}$ c) 2 d) -1

8. $a = 3$

9. $c = 6$

10. a) $a = -5$, $b = 4$ b) $a = -1$, $b = 4$, lub $a = 4$, $b = 4$

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów, s. 378-379

1. a) $x^6 + x^5 + 10x$ b) $-0{,}8x^3 + 1{,}5x + 1$ c) $-3x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{9}x^2 + 3\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$
   d) $5\sqrt{2}x^3 + \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - 4)x + 2\sqrt{2} - 1$

2. a) $-2x^5 + x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 11x - 5$ b) $x^6 + 0{,}27x^3 - 1$ c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$
   d) $5\sqrt{5}x^3 + \sqrt{5} - 3$

3. a) $F(x) = -6x^4 + 9x^3 - 12x - 15$ b) $F(x) = 7x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 4x - 1$
   c) $F(x) = -6x^3 + 4x^2 + 8x + 9$ d) $F(x) = 11x^4 - 21x^3 + 9x^2 + 20x + 25$

4. a) $-15x^9 + 34x^7 - 16x^5$
   b) $6x^8 - 26x^7 + 28x^6 + 18x^5 - 42x^4$
   c) $-8x^{12} + 32x^{10} + 12x^8 - 48x^6 - 4x^3 + 16x$
   d) $12x^5 - 8x^4 + 19x^3 - 31x^2 + 19x - 7$

5. a) $-3x^9 + 2x^8 + x^7 - 15x^5 + 10x^4 + 5x^3$ b) $-3x^6 + 2x^5 + 7x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 10x + 5$
c) $-4x^9 + 6x^8 + 6x^7 - 12x^6 - 16x^5 + 38x^4 - 10x^3 - 16x^2 + 40$
d) $x^{11} - 2x^9 + 10x^7 - 10x^5 + 25x^3$

6. a) $-x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x + 8$
b) $x^8 - 2x^7 + x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x - 14$
c) $-x^9 + 4x^7 + x^5 + x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 4x$
d) $x^{10} - 3x^9 + 6x^8 - 3x^7 + 9x^6 - 3x^5 + 11x^4 - 24x^3 + 21x^2 - 33x + 18$

7. a) $-x^6 - 3x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x$
b) $-x^4 + 4x^2 + 1$
c) $x^8 - 2x^6 - 13x^4 - 2x^2 + 1$
d) $-2x^4 + 12x^3 - 48x - 32$

8. a) st.$W(x) = 9$, $a_9 = -54$, $a_0 = -4$ b) st.$W(x) = 16$, $a_{16} = 2$, $a_0 = -4$
c) st.$W(x) = 20$, $a_{20} = -6$, $a_0 = 0$ d) st.$W(x) = 17$, $a_{17} = -8$, $a_0 = 9$

11. a) $W(x) = -6x^7 + 13x^6 - 23x^5 + 20x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 13x - 3$
b) $W(x) = -8x^9 - 4x^8 + 8x^7 - 16x^6 - 19x^5 + 14x^4 - 11x^2 + 10x + 8$
c) $W(x) = 2x^{11} + x^9 + 4x^8 - 7x^7 + x^6 + 8x^5 + 7x^4 - 27x^3 + 23x^2 - 2x - 5$
d) $W(x) = -6x^{10} + 11x^9 + 2x^8 - 12x^7 - 7x^6 + 16x^5 + 6x^4 - 32x^3 + 24x^2 + 4x - 12$

Równość wielomianów, s. 382

1. a) nie są równe, b) są równe, c) są równe, d) nie są równe

2. a) nie są równe b) są równe c) są równe d) są równe

3. a) $a = 0$ b) nie istnieje c) $a = -2$ d) $a = 3$

4. a) nie istnieje b) $a = -2$ c) nie istnieje d) $a = 1$

5. a) $a = 2,\ b = 4$ b) nie istnieją
c) $a = 1,\ b = 4$ d) $b = a^2$, gdzie a – dowolna liczba rzeczywista

6. a) $a = -1,\ b = 1$ b) $a = 1,\ b = 1$ c) $a = 2,\ b = 3$

7. a) $a = 4,\ b = -3$ b) $a = -2,\ b = 2$ c) $a = -5,\ b = 2$

Wzory skróconego mnożenia stopnia 3. Wzór na $a^n - b^n$, s. 387-388

1. a) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$ b) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
c) $b^3 - 18b^2 + 108b - 216$ d) $125 + 75y + 15y^2 + y^3$
e) $27 - 54y + 36y^2 - 8y^3$ f) $27 + 108a^2 + 144a^4 + 64a^6$
g) $-1 - 3x - 3x^2 - x^3$ h) $8x^3 - 6x^2 + 1{,}5x - 0{,}125$

2. a) $100 + 51\sqrt{3}$ b) $11\sqrt{5} - 17\sqrt{2}$ c) $200 + 80\sqrt{5}$
d) $-20 + 14\sqrt{2}$ e) $270\sqrt{2} - 156\sqrt{6}$ f) $30 + 27\sqrt[3]{3} + 9\sqrt[3]{9}$
g) $-89 - 54\sqrt[3]{9} - 36\sqrt[3]{3}$ h) $-92 + 108\sqrt[3]{4} - 72\sqrt[3]{2}$.

3. a) $(x + 6)(x^2 - 6x + 36)$ b) $(5b + 2)(25b^2 - 10b + 4)$
c) $(t + 5)^3$ d) $(2y - 3)^3$
e) $(4a - 1)(16a^2 + 4a + 1)$ f) $\left(\sqrt{3} - x\right)\left(3 + \sqrt{3}x + x^2\right)$
g) $\left(y - \sqrt{3}\right)^3$

4. a) a^3+1 b) $8-x^3$ c) $8z^3+27$ d) $125-8y^3$
e) $8x^3-12x^2+6x-1$ f) $8x^3+36x^2+54x+27$

5. a) 25 b) 13 c) -11 d) $-1+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$

6. a) $2\sqrt[3]{2}$ b) $-1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$ c) $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{2}$ d) $\frac{2-\sqrt[3]{3}}{5}$
e) $\frac{3\sqrt[3]{2}+9}{29}$ f) $1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ g) $\frac{5+4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{25}}{13}$
h) $1+\sqrt[3]{6}$

7. a) $x=-3 \lor x=0$ b) równanie sprzeczne c) $x=-1$
d) $x=1$ e) $x=\frac{-7}{2}-\frac{\sqrt{47}}{2} \lor x=\frac{-7}{2}+\frac{\sqrt{47}}{2}$
f) $x=\frac{1}{4} \lor x=1$

8. a) $x\in\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}\right)$ b) $x\in\boldsymbol{R}$ c) $x\in\left\langle -6\frac{1}{2}, +\infty\right)$
d) $x\in\boldsymbol{R}-\{1\}$

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu, s. 391

14. 1

15. 24, *wskazówka*: $\sqrt[3]{25}-1=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-1^2$

16. -2, *wskazówka*: $1-6\sqrt[3]{81}+12\sqrt[3]{9}=9-6\sqrt[3]{81}+12\sqrt[3]{9}-8$

Podzielność wielomianów, s. 394-395

1. a) $x-3$ b) $x+2$ c) np. $5-x$ d) $2x+1$
e) $x-1$ f) $x-2$, *wskazówka*: skorzystaj z twierdzenia 2. str. 386
g) np. $2x+1$ h) np. $3x-1$ i) $x-1$.

2. $3x-1$, $3x+1$, $x-2$, $x+3$, $x+2$

3. a) x^2+2x-8 b) $36x^2+30x+25$ c) $4x^2+12x+9$ d) $4x^2-3$

4. a) $2x-1$, $x+1$, $x-1$ b) $(2x-1)(x+1)$, $(2x-1)(x-1)$, $(x+1)(x-1)$

5. a) $P(x)=2x-3$ b) $P(x)=-2x-3$ c) $P(x)=3x+2$

6. $a=15$, $b=2$

7. $a=1$, $b=6$

8. $a=3$, $b=2$

9. $P(x)=x^2+2x+4$

10. $P(x)=-5x^2+17x-6$

11. $Q(x)=x^2-8x+1$

12. $Q(x)=12x^4-18x^3+50x-75$

13. a) $Q(x)=4x^3+10x^2-16x+5$ b) $Q(x)=x-8$

14. $P(x) = 3x - 1$

15. $P(x) = x + 2$

16. np. $K(x) = 2x + 3$

17. np. $K(x) = x - 1$

18. np. $K(x) = x^3 + 1$

Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy. Schemat Hornera, s. 401

1. a) $2x^2 - x + 8$ b) $2x^3 - 4x^2 + 5x + 1$
   c) $x^2 + 2x + 3$ d) $4x^3 + 11x^2 + 22x + 44$
   e) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ f) $9x^6 + 9x^5 + 9x^4 + 17x^3 + 17x^2 + 17x + 15$

2. a) $2x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 6$; $r = -10$ b) $-2x^3 + 6x^2 + x + 3$; $r = 4$
   c) $2x^4 - 3x^3 + 4x - 20$; $r = 100$ d) $-4x^3 + 11x^2 - 22x + 49$; $r = -90$
   e) $x^2 - 9$; $r = -6$ f) $x^4 + 2x^2 + 1$; $r = -5$

3. a) $2x^3 - x^2 + 3x + 2$, $r = 0$ b) $5x^3 - 5x^2 - 7x - 1$, $r = 4$
   c) $-3x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 5$, $r = 8$ d) $2x^4 - 6x^3 + x + 2$, $r = 0$
   e) $5x^4 + 3$, $r = 0$ f) $-x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2$, $r = 3$

4. a) 10 b) 6 c) -5 d) 10

5. a) $r = 73$ b) $r = -12$

6. a) $r = 98$ b) $r = -91$

7. $a = -4$

8. $m = 4$

9. $p = -\frac{1}{2} \vee p = 3$

10. $a \in (-2, 3)$

11. $k \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

Dzielenie wielomianu przez wielomian stopnia większego od 1, s. 405

1. a) $3x^2 + x + 2$ b) $-2x^2 + 4$ c) $4x^2 + 2x - 1$ d) $3x^3 + 9x^2 + 6$

2. a) $-2x^2 + 8x + 7$ b) $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x - 1$ c) $-x^2 + x - 2$ d) $2x^2 + 3$

3. a) $Q(x) = -3x + 4$, $R(x) = -2x - 5$ b) $Q(x) = 3x^2 - 2x + 3$, $R(x) = -10x + 20$
   c) $Q(x) = -2x^2 + x + 1$, $R(x) = -4$ d) $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $R(x) = 4x^2 - 5x + 3$

4. $r = -1$

5. $R(x) = 7x + 3$

6. $R(x) = -2x - 1$

7. $R(x) = 2x^2 - 2$

8. $a = 5$, $b = 2$

9. $a = 1$, $b = -7$

Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bézouta, s. 412-413

1. a) $-4,\ 1\frac{1}{3},\ 2;$ st. $W(x)=5$ b) $-5,\ -1\frac{1}{2},\ 0,\ 1\frac{1}{2};$ st. $W(x)=6$
   c) $-3,\ -\frac{1}{2},\ 1;$ st. $W(x)=6$
3. a) tak b) nie c) tak
4. a) $k = 6$ b) $k = 5$ c) $k = 1$ lub $k = 2$
5. a) $-\frac{1}{3},\ 1\frac{1}{2},\ 2$ b) $-5,\ -\frac{1}{2}$ c) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ -1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
6. a) $-1\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}$ b) $-3\frac{1}{2}$ c) nie istnieją d) $-\frac{1}{2},\ 1$
7. a) $m = 3$; pozostałe pierwiastki: $-1,\ 2$ b) $m = 6$; pozostałe pierwiastki: $-\frac{1}{3},\ \frac{1}{5}$
   c) $m = 1$; pozostały pierwiastek: 2
8. $a=3,\ b=6,\ x_3=-\frac{1}{2}$
9. $a=23,\ b=17,\ x_1=-1,\ x_2=1\frac{1}{2},\ x_3=2,\ x_4=2\frac{1}{2}$
10. a) $a = -2,\ b = 24$ b) $x_1 = -3,\ x_2 = 2$
11. a) $a = -2,\ b = 3$ b) $a = 1,\ b = 4$
12. $W(x) = -2x^3 + 12x^2 - 22x + 12$
13. pierwiastki: $-1,\ 3$; $W(x) = -2x^4 + 12x^2 + 16x + 6$
14. $W(x) = 2x^4 - 10x^2 + 8$
15. $x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -4;\ m = 7,\ n = 14$
16. $x_1 = 3,\ x_2 = 6,\ x_3 = 8;\ a = 90,\ b = -144$
17. $x_1=-2,\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=\sqrt{3}$
18. a) $m = 0,\ n = 20$ b) $-5,\ 1,\ 4$

Pierwiastki wymierne wielomianu, s. 418-419

1. a) -1 b) $-2,\ 2$ c) $-2,\ -1,\ 1$
   d) 1 e) $-2,\ -1,\ 1,\ 4$ f) $-3,\ -1,\ 2$
2. a) trzy pierwiastki całkowite: $1,\ -1,\ 7$ b) jeden całkowity pierwiastek: 3
3. a) pierwiastki wielomianu: $0,\ \frac{2}{3},\ 1,\ 3$ b) pierwiastki wielomianu: $-2,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}$
5. $a = 1,\ b = 3$
6. a) $a = 16,\ b = -8$

7. a) $-2, 1, 3$ b) 2 c) $\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, 1$
d) $-2\frac{1}{2}, -1, 1$ e) $-\frac{1}{2}, -1, 5$ f) $-1-\sqrt{2}, -2, -1+\sqrt{2}$

9. a) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ b) $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ c) $-1\frac{1}{2}, -1, 3$
d) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ e) $-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ f) $-2, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$

10. *wskazówka*: $W\left(-\frac{7}{2}\right)=0$ oraz współczynniki wielomianu $W(x)$ są całkowite, więc 7 dzieli q oraz 2 dzieli p.

11. a) $-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$ b) $-1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ c) 2
d) $-1, -\frac{1}{2}, 1$ e) $-1, \frac{1}{5}, 2$ f) $\frac{1}{3}, 2$

13. a) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 3$ c) $-2, \frac{1}{3}, 1, 2$ d) $-1, \frac{1}{2}$
e) $-1, 2, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ f) $-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$

Pierwiastek wielokrotny, s. 423

1. a) $-\frac{1}{2}$ jednokrotny, –1 dwukrotny, 1 jednokrotny, $\frac{1}{2}$ dwukrotny
b) 0 trzykrotny, –2 czterokrotny, $-\frac{1}{4}$ jednokrotny
c) –5 jednokrotny, 5 dwukrotny, –2 trzykrotny, 2 czterokrotny
d) 0 dwukrotny, 1 czterokrotny, –3 pięciokrotny

2. – 2 – pierwiastek jednokrotny, 2 – pierwiastek czterokrotny

3. a) pierwiastek dwukrotny b) pierwiastek czterokrotny

6. $a = 5, b = 2$

7. $a = 2, b = -1$

8. a) –3 – pierwiastek jednokrotny, 1 – pierwiastek dwukrotny b) $k=-\frac{2}{3}$

Rozkładanie wielomianów na czynniki, s. 427-428

1. a) $W(x) = (\sqrt{2}x-1)^2(\sqrt{2}x+1)^2$ b) $W(x) = (3x^2 + 7)(3x^2 + 7)$
c) $W(x) = (4x - 1)(4x + 1)(16x^2 + 1)$ d) $W(x) = (x - 2)(3x - 8)$
e) $W(x) = (2x - 1)(2x - 1)(2x - 1)$ f) $W(x) = (x+6)(x^2 - 6x + 36)$
g) $W(x) = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$ h) $W(x) = -2(x + 1)(13x^2 - 10x + 4)$

2. a) $W(x) = 3x^3\cdot(2x^2 + x + 1)$ b) $W(x) = (x^2 + 3)(3x - 4)$
c) $W(x) = (x - 2)(x^2 + 5)$ d) $W(x) = (x - 2)(2x^2 + 1)$

3. a) $W(x) = (3x - 2)(x - 1)(x + 1)$ b) $W(x) = (x - 4)(x - 2)(x + 2)$
c) $W(x)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$ d) $W(x)=(x+2)(3x^2+2\sqrt{2})$

e) $W(x) = (2x + 3)(x - 1)(x^2 + x + 1)$ f) $W(x) = (3x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
g) $W(x) = (5x - 3)(x + 1)(x^2 - x + 1)$ h) $W(x) = (x - 1)(4x + 3)(16x^2 - 12x + 9)$

4. a) $(x - 1)(x + 1)^2(x^2 - x + 1)$ b) $(x + 3)(x + 4)^2$ c) $(x - 2)(2x - 5)(2x - 1)$
d) $(x - 5)^2(x - 15)$ e) $(x - 1)(x - 3)^2$ f) $(x + 1)(x - 1)(x + 3)$

5. a) $W(x) = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 7)$ b) $W(x) = x(1 - x)(x^2 + 7x + 19)$
c) $W(x) = (3x + 1)(3x^2 - 3x + 7)$ d) $W(x) = (-3x + 5)(x - 1)(x + 1)$
e) $W(x) = x(4x + 1)(x - 3)(x + 3)$ f) $W(x) = x^2(2x + 3)\left(3x^2 + \sqrt{5}\right)$
g) $W(x) = (x + 2)(7x^2 + x + 1)$ h) $W(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^2\left(x + \sqrt{3}\right)^2$

6. a) $W(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ b) $W(x) = (x - 1)(4x^2 + 4x + 3)$
c) $W(x) = (x + 1)(2x + 1)^2$ d) $W(x) = (x - 2)(2x^2 + 3x + 5)$
e) $W(x) = (x + 2)(x^2 - x + 1)$ f) $W(x) = (2x - 5)(2x + 1)(x - 1)$
g) $W(x) = (x - 1)(5x^2 + x + 2)$ h) $W(x) = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$

7. a) $W(x) = \left(x^2 - \sqrt{10}x + 5\right)\left(x^2 + \sqrt{10}x + 5\right)$
b) $W(x) = \left(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4\right)\left(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4\right)$
c) $W(x) = (x^2 - x + 4)\ (x^2 + x + 4)$ d) $W(x) = (x^2 - 3x + 9)(x^2 + 3x + 9)$

8. a) $W(x) = 5(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
b) $W(x) = (x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)$
c) $W(x) = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$
d) $W(x) = (2x - 1)^2 \cdot (4x^2 + 2x + 1)^2$

9. a) $W(x) = (2x - 1)(x^2 + 2x + 3)$ b) $W(x) = (3x - 1)(x - 2)^2$
c) $W(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + x + 1\right)$ d) $W(x) = (3x - 1)(x - 1)(2x + 1)$
e) $W(x) = (2x + 1)(3x + 1)(x + 2)$ f) $W(x) = \frac{1}{2}(2x - 5)(2x - 1)(x + 2)$

10. a) $W(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)^2$ b) $W(x) = (3x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)$
c) $W(x) = (x + 1)^3(x - 2)(x + 2)$ d) $W(x) = (3x + 2)(x + 1)^2(x - 1)^2$

Równania wielomianowe, s. 432-433

1. a) $x \in \left\{-3, \frac{2}{3}\right\}$ b) $x \in \{-3, 1, 2\}$ c) $x \in \left\{-2, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, 1\frac{1}{2}\right\}$
d) $x \in \left\{-2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$ e) $x \in \left\{-2\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ f) $x \in \left\{-\sqrt{5}, -2, 2, \sqrt{5}, 4\right\}$

2. a) $x \in \{-3, -2, 0\}$ b) $x \in \{-4, -3, 4\}$ c) $x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$
d) $x \in \{-2, 2\}$ e) $x = 1$ f) $x = -\frac{1}{3}$

3. a) $x \in \left\{0, 1\frac{1}{2}\right\}$ b) $x \in \left\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right\}$ c) $x \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}\right\}$
d) $x \in \{-1, 2\}$ e) $x = 1$ f) $x = 1\frac{1}{2}$

4. a) $x \in \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ b) $x \in \left\{-1\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ c) $x \in \left\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right\}$
d) $x \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ e) $x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\right\}$ f) $x = \frac{2}{5}$

5. a) $x \in \left\{-\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\}$ b) $x \in \{-3, 3\}$ c) $x \in \left\{-\sqrt{6}, -\frac{1}{2}, \sqrt{6}\right\}$
d) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, 1\right\}$ e) $x \in \left\{-2, \sqrt[3]{5}\right\}$ f) $x \in \left\{-2, -\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}, 2\right\}$

6. a) $x \in \left\{0, 1, 1\frac{2}{3}\right\}$ b) $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ c) $x \in \{-2, 2, 3\}$
d) $x \in \left\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 2\right\}$ e) $x \in \{-1, 1\}$ f) $x = -1$

7. a) $x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5\right\}$ b) $x \in \left\{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}, 3\right\}$ c) $x \in \left\{1-\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 1+\sqrt{3}\right\}$
d) $x \in \{-1, 1\}$ e) $x \in \left\{-1\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$
f) $x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{29}}{2}, 1, \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right\}$

8. a) $x \in \left\{-1, -\frac{1}{5}\right\}$ b) $x = 2$ c) $x \in \{-2, 1, 4\}$
d) $x \in \{-2, 0, 3\}$ e) $x \in \left\{-1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}$ f) równanie sprzeczne

9. a) $x \in \{0, 2, 3\}$ b) $x \in \left\{\frac{-2\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$ c) $x \in \{-1, 0, 6\}$
d) $x \in \{-3, 3\}$ e) $x \in \{-2, 2, 12\}$ f) $x = -2$

10. a) $x \in \{-2, 2\}$ b) $x \in \{-1, 1\}$ c) $x \in \{1, 2\}$
d) $x \in \{-2, 1\}$ e) $x \in \{-2, -1\}$ f) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

11. a) $x \in \{-7, 1\}$ b) $x = 1$
c) $x \in \{-5, -2, 2, 5\}$ d) $x = -1$

Zadania prowadzące do równań wielomianowych, s. 435

1. $a = 2$, $W(x) = x(x + 3)(x - 1)$
2. $a = 2$, pierwiastki: $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$
3. 4 lata
4. 305
5. Są trzy takie liczby: $-2-\sqrt{6}$, 0, $-2+\sqrt{6}$
6. $a = -7$ lub $a = 3$

Równania wielomianowe z parametrem, s. 439

1. $p=\frac{1}{3}$
2. $k\in\left\{-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ 4\right\}$
4. $k\in\left(-\infty,\ -3\frac{3}{4}\right)\cup\left(-3\frac{3}{4},\ -3\frac{1}{2}\right)\cup\left(-1\frac{1}{2},\ +\infty\right)$
5. $p\in\left(\frac{1}{9},\ 1\right\rangle$
6. Jeśli $p = 3$, to $x \in \{-3, 2\}$; jeśli $p = -13$, to $x \in \{-3, -2\}$; jeśli $p=-13\frac{2}{3}$, to $x\in\left\{-3,\ -1\frac{1}{3}\right\}$
7. Jeśli $m = 9$, to $x \in \{-4, 2, 4\}$; jeśli $m = -9$, to $x \in \{2, 4, 8\}$
8. $k\in\left(-\infty,\ -2\frac{1}{8}\right)\cup\left(-2\frac{1}{8},\ -1\frac{3}{4}\right)\cup\left(1\frac{1}{4},\ +\infty\right)$
9. $m\in(-5,\ -3\rangle$
10. $p\in\left(-\frac{2}{7},\ 0\right)\cup\left(0,\ \frac{3}{14}\right)\cup\left(\frac{3}{14},\ \frac{4}{11}\right)\cup\left(\frac{4}{11},\ 2\right)$
11. $m\in\left(-3\frac{1}{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ 1\frac{1}{6}\right)$
12. $k \in (-\infty, -4)$
13. $m = -2$
14. $p\in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
15. $m \in (1, +\infty)$
16. $k = -4$

Funkcje wielomianowe, s. 445

2. $y = -x^3(x-1)(x-2)^2$
3. a) $y = x^3 + 3x^2 - 4$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$
4. a) $y=\frac{1}{2}x^4-2x^3-6x^2+16x+32$

   b) $(0,\ 32)$, $(4,\ 0)$, $\left(-2\sqrt{3},\ 32+16\sqrt{3}\right)$, $\left(2\sqrt{3},\ 32-16\sqrt{3}\right)$

Nierówności wielomianowe, s. 448-449

1. a) $x \in \{-2\}\cup\langle 0, 3\rangle$

   b) $x\in\left(1\frac{1}{3},\ 2\right)$

   c) $x\in(-\infty,\ -3\rangle\cup\left\langle\frac{1}{5},\ 3\right\rangle$

   d) $x \in (-\infty, -8\rangle\cup\langle 2, +\infty)$

   e) $x \in (-\infty, -1\rangle\cup\{2\}$

   f) $x \in (-3, 1)\cup(1, 3)\cup(3, +\infty)$

2. a) $x\in\left(\frac{2}{3},\ 2\right)$ b) $x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle-1,2\rangle$ c) $x\in(-\infty,-3)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

d) $x\in(-\infty,\ -4)\cup\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$ e) $x\in\left(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$ f) $x\in\left\langle 0,\ \frac{1}{3}\right\rangle\cup\{2\}$

3. a) $x\in(-\infty,\ -3)\cup\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\ 3\right)$ b) $x\in\{-1\}\cup\left\langle\frac{1}{2},\ 4\right\rangle$

c) $x\in(-\infty,\ 3)$ d) $x\in\left\langle-1,\ \frac{1}{3}\right\rangle\cup\{1\}$

4 a) $x\in\left(-\infty,\ -2\sqrt{2}\right\rangle\cup\langle-1,\ 1\rangle\cup\left\langle 2\sqrt{2},\ +\infty\right)$; *wskazówka*: podstaw $x^2-6=t$

b) $x\in\langle-1,5\rangle$ c) $x\in(-\infty,-2\rangle\cup\{1\}\cup\langle4,+\infty)$

d) $x\in(-\infty,-4)\cup(-3,-2)\cup(-1,0)\cup(1,+\infty)$

5. $x\in(1,3)\cup(5,+\infty)$

6. $x\in(-\infty,1)$

7. a) $D_f=\left(-\infty,\ \frac{1}{3}\right\rangle$ b) $D_f=\boldsymbol{R}$

8. a) $x\in(-\infty,\ 1\rangle\cup\{2\}\cup\langle3,\ +\infty)$ b) $x\in(-\infty,\ 1)\cup(0,\ 1)$

c) $x\in(-\infty,\ -1\rangle\cup\langle4,\ +\infty)$ d) $x\in\boldsymbol{R}-\left\{-2,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right\}$

e) $x\in\left(-\infty,\ 2-2\sqrt{2}\right\rangle\cup\left\langle2+2\sqrt{2},\ +\infty\right)$ f) $x\in(-\infty,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$

10. *wskazówka*: $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=x^2(x^2+x+1)+x(x^2+x+1)+x^2+x+1$

11. *wskazówka*: np. $x^4+x^2-8x+17=(x^4+1)+(x^2-8x+16)$

12. *wskazówka*: $x^4-4x^3+16x^2-18x+13=x^2(x^2-4x+4)+3(x^2-4x+4)+9x^2-6x+1$

17. *wskazówka*: Nierówność $(x^2+2)^4-x^4-4x^2\geq6$ doprowadź do postaci

$(x^2+2)^4-(x^2+2)^2-2\geq0$. Następnie wykaż, że wyrażenie t^2-t-2, gdzie $t=x^2+2$, przyjmuje tylko wartości nieujemne dla $t\geqslant2$.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 8., s. 450-452

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Odpowiedź	D	B	A	D	B	C	A	B	D	D	A	D	D

Zadania otwarte

14. $F(x)=x^3-109x^2+27$; st.$F(x)=3$

15. Wartość wielomianu jest równa 6

16. $m=-3$

17. a) $\dfrac{16+4\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{61}$ b) $2\cdot\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$

24. a) $a = 2$, $b = -6$ b) *wskazówka*: $W(x) = (x-2)(x+3)(2x^2+1)$

25. $W(x)=3(x-1)(x+2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

26. a) $x\in\left\{-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 2\sqrt{2}\right\}$ b) $x\in\{-4,\ 0,\ 2\}$

c) $x = 2$ d) $x\in\left\{\dfrac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$

27. 4 m × 12 m × 2 m

28. a) $x\in\left\langle\dfrac{1}{2},\ 1\right\rangle$ b) $x\in(0,1)$

29. $a\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$

30. pierwiastki: $\dfrac{1}{2}$, 2

31. $R(x) = -2x + 3$

32. Liczba 1 jest pierwiastkiem trzykrotnym

33. a) $W(x)=\dfrac{3}{4}(3x+2)(2x-1)(2x-3)$ b) $W(x)=2x\cdot\left(x^2-\sqrt{7}x+5\right)\left(x^2+\sqrt{7}x+5\right)$

34. $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 8$; $a = 2$, $b = 48$

35. a) $\left(-2\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ oraz $(0,\ -15)$ b) $x\in\left\langle-2\dfrac{1}{2},\ -1\right\rangle\cup\langle 3,\ +\infty)$

36. a) $x\in\left(-1,\ \dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},\ 3\right)$ b) $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\{1\}$

37. a) $x\in\{3, 4\}$ b) $x\in\left\{-1,\ -\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6},\ 1\right\}$

c) $x\in(-\infty,\ 0)\cup\left(0,\ \sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{6},\ +\infty\right)$

38. $D = (-\infty, 1\rangle$

39. a) $W(x) = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6$ b) $(-2, 18)$, $(-1, 16)$, $(2, 10)$

40. *wskazówka*: $a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 6a + 9 = (a^4 - 4a^3 + 4a^2) + (a^2 - 6a + 9)$

41. $p\in\left\{-\dfrac{10}{3},\ 2\right\}$

42. Wielomian ma:

- jeden pierwiastek jednokrotny, jeśli $k\in\left(-2\dfrac{1}{2},\ 1\dfrac{1}{2}\right)$
- jeden pierwiastek trzykrotny, jeśli $k=1\dfrac{1}{2}$
- jeden pierwiastek jednokrotny i jeden dwukrotny, jeśli $k=-2\dfrac{1}{2}$
- trzy pierwiastki jednokrotne, jeśli $k\in\left(-\infty,\ -2\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(1\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

α	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\cos\alpha$	
1°	0,017	0,017	57,290	1,000	89°
2°	0,035	0,035	28,636	0,999	88°
3°	0,052	0,052	19,081	0,999	87°
4°	0,070	0,070	14,301	0,998	86°
5°	0,087	0,087	11,430	0,996	85°
6°	0,105	0,105	9,514	0,995	84°
7°	0,122	0,123	8,144	0,993	83°
8°	0,139	0,141	7,115	0,990	82°
9°	0,156	0,158	6,314	0,988	81°
10°	0,174	0,176	5,671	0,985	80°
11°	0,191	0,194	5,145	0,982	79°
12°	0,208	0,213	4,705	0,978	78°
13°	0,225	0,231	4,331	0,974	77°
14°	0,242	0,249	4,011	0,970	76°
15°	0,259	0,268	3,732	0,966	75°
16°	0,276	0,287	3,487	0,961	74°
17°	0,292	0,306	3,271	0,956	73°
18°	0,309	0,325	3,078	0,951	72°
19°	0,326	0,344	2,904	0,946	71°
20°	0,342	0,364	2,747	0,940	70°
21°	0,358	0,384	2,605	0,934	69°
22°	0,375	0,404	2,475	0,927	68°
23°	0,391	0,424	2,356	0,921	67°
24°	0,407	0,445	2,246	0,914	66°
25°	0,423	0,466	2,145	0,906	65°
26°	0,438	0,488	2,050	0,899	64°
27°	0,454	0,510	1,963	0,891	63°
28°	0,469	0,532	1,881	0,883	62°
29°	0,485	0,554	1,804	0,875	61°
30°	0,500	0,577	1,732	0,866	60°
31°	0,515	0,601	1,664	0,857	59°
32°	0,530	0,625	1,600	0,848	58°
33°	0,545	0,649	1,540	0,839	57°
34°	0,559	0,675	1,483	0,829	56°
35°	0,574	0,700	1,428	0,819	55°
36°	0,588	0,727	1,376	0,809	54°
37°	0,602	0,754	1,327	0,799	53°
38°	0,616	0,781	1,280	0,788	52°
39°	0,629	0,810	1,235	0,777	51°
40°	0,643	0,839	1,192	0,766	50°
41°	0,656	0,869	1,150	0,755	49°
42°	0,669	0,900	1,111	0,743	48°
43°	0,682	0,933	1,072	0,731	47°
44°	0,695	0,966	1,036	0,719	46°
45°	0,707	1,000	1,000	0,707	45°
	$\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\sin\alpha$	α